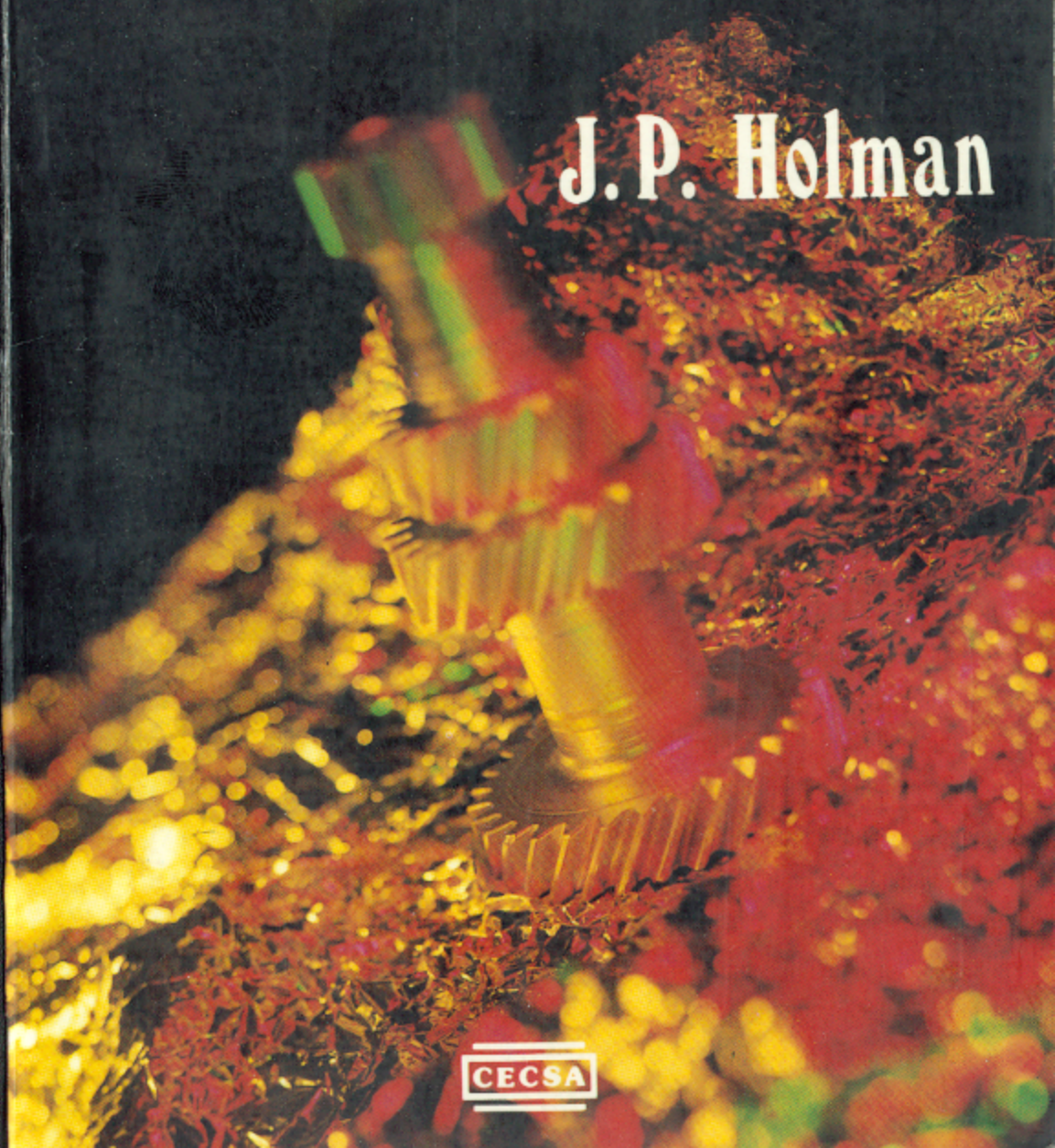
TRANSFERENCIA DE CALOR

J. P. Holman



CECSA

Transferencia de Calor

J. P. Holman
Professor of Mechanical Engineering
Southern Methodist University

DÉCIMA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 1999

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.
MÉXICO

Título original de la obra:
HEAT TRANSFER
ISBN o-07-0229618-9

Publicada por:
McGRAW HILL BOOK COMPANY, INC.
©McGraw HiII Book Company, Inc.

Traducción:
Dr. Raúl Valenzuela M.

Transferencia de calor
Derechos reservados en español:
© 1986, COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. de C.V.
Renacimiento 180. Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, DF.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial.
Registro núm. 43

ISBN 968-26-0649-7

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o *parciai del* contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónico cas o mecánicas, sin el consentimiento previo **y por escrito** del **editor.**

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición: 1986
Novena reimpresión: 1998
Décima reimpresión: 1999

Contenido

Prefacio 9
Lista de símbolos 13
1 Introducción 17

1-1 Transferencia de calor por conducción 18
1-2 Conductividad térmica 22
1-3 Transferencia de calor por convección 26
1-4 Transferencia de calor por radiación 29
1-5 Dimensiones y unidades 30
1-6 Resumen 36

2 Conducción en Estado Estacionario -Una Dimensión 41

2-1 Introducción 41
2-2 La pared plana 41
2-3 Aislamiento y valores R 43
2-4 Sistemas radiales-cilindros 44
2-5 El coeficiente de transferencia de calor total 48
2-6 Espesor crítico del aislante 50
2-7 Sistemas con fuentes de calor 51
2-8 Cilindro con fuentes de calor 53
2-9 Sistemas de conducción-convección 55
2-10 Aletas 59
2-11 Resistencia térmica de contacto 67

3 Conducción en Estado Estacionario – Dimensiones Múltiples 79

3-1 Introducción 79
3-2 **Análisis matemático** de la conducción de calor bidimensional 80
3-3 **Análisis gráfico** 84

3-4 El factor de forma de conducción 86
3-5 Método numérico de análisis 91
3-6 Formulación numérica en términos de elementos de resistencia 101
3-7 Iteración Gauss-Seidel 103
3-8 Analogía eléctrica para conducción bidimensional 119

4 Conducción en Estado Transitorio 129

4-1 Introducción 129
4-2 Sistema de capacidad calorífica global 131
4-3 Flujo de calor transiente en un sólido semiinfínito 137
4-4 Condiciones de frontera de convección 140
4-5 Sistemas multidimensionales 152
4-6 Método numérico transiente 157
4-7 Formulación de capacidad y resistencia térmicas 165
4-8 Análisis gráfico -La gráfica de Schmidt 179

5 Principios de Convección 193

5-1 Introducción 193
5-2 Flujo viscoso 193
5-3 Flujo no viscoso 197
5-4 Capa límite laminar en una placa plana 201
5-5 Ecuación de energía de la capa límite 209
5-6 La capa límite térmica 212
5-7 La relación entre fricción del fluido y transferencia de calor 221
5-8 Transferencia de calor en capa límite turbulenta 223
5-9 Espesor de la capa límite turbulenta 231
5-10 Transferencia de calor de flujo laminar en tubos 233
5-11 Flujo turbulento en un tubo 238
5-12 Transferencia de calor en flujo a alta velocidad 241

6 Relaciones Empíricas y Prácticas para Transferencia de Calor por Convección Forzada 253

6-1 Introducción 253
6-2 Relaciones empíricas para flujo en tuberías y conductos 255
6-3 Flujo a través de cilindros y esferas 271
6-4 Flujo a través de bancos de tubos 282
6-5 Transferencia de calor en metales líquidos 286
6-6 Comentarios breves 289

7 Sistemas de Convección Natural 299

7-1 Introducción 299
7-2 Transferencia de calor por convección libre en una placa plana vertical ... 299
7-3 Relaciones empíricas para convección libre 308
7-4 Convección libre en planos y cilindros verticales 308

7-5 Convección libre a partir de cilindros horizontales 315
7-6 Convección libre a partir de placas horizontales . . . . . '316
7-7 Convección libre a partir de superficies inclinadas 317
7-8 Fluidos no newtonianos 319
7-9 Ecuaciones simplificadas para aire 320
7-10 Convección libre a partir de esferas 321
7-11 Convección libre en espacios cerrados 321
7-12 Convección libre y forzada combinadas 327

8 Transferencia de Calor por Radiación 341

8-l Introducción 341
8-2 Mecanismo físico 341
8-3 Propiedades de radiación 343
8-4 Factor de forma de la radiación 352
8-5 Relaciones entre factores de forma 362
8-6 Intercambio de calor entre cuerpos que no son negros 367
8-7 Planos paralelos infinitos 374
8-8 Protección contra la radiación 375
8-9 Radiación en gases 380
8-10 Red de radiación para un medio absorbente y transmisor 390
8-11 Intercambio de radiación con superficies especulares 397
8-12 Intercambio de radiación con medios transmisivo, reflejante y absorbente 403
8-13 Formulación para una solución numérica 409
8-14 Radiación solar 425
8-15 Propiedades de radiación del medio ambiente 430
8-16 Efecto de la radiación sobre la medición de temperatura 436
8-17 El coeficiente de transferencia de calor por radiación 437

9 Transferencia de Calor por Condensación y Ebullición 451

9-1 Introducción 451
9-2 Fenómenos de transferencia de calor por condensación 451
9-3 El número de condensación 456
9-4 Condensación por película dentro de tubos horizontales 458
9-5 Transferencia de calor por ebullición 460
9-6 Relaciones simplificadas para transferencia de calor por ebullición con agua 474
9-7 Resumen e información del diseño 475

10 Cambiadoresde Calor.. 483

10-l Introducción 483
10-2 El coeficiente de transferencia de calor total 484
10-3 Factores de incrustación 490
10-4 Tipos de cambiadores de calor 490
10-5 La diferencia de temperatura media logarítmica 494
10-6 Métodosdeeficacia NUT 502

10-7 Cambiadores de calor compactos 515
10-8 Análisis para propiedades variables 5 17
10-9 Consideraciones de diseño de cambiadores de calor 524

I I Transferencia de Masa 633

ll- 1 Introducción 533
ll-2 Ley de difusión de Fick 534
ll-3 Difusión en gases 555
ll-4 Difusión en líquidos y sólidos 541
Il-5 El coeficiente de transferencia de masa 541
ll -6 Procesos de evaporación en la atmósfera 546

12 Tópicos Especiales en la Transferencia de Calor 663

12-l Introducción 553
12-2 Transferencia de calor en sistemas de dinámica de magnetofluidos (DMF) 553
12-3 Enfriamiento por transpiración 560
12-4 Transferencia de calor a baja densidad 566
12-5 Ablación.. 576
12-6 El tubo calefactor.. 578

Aphdice A Tablas 667

Aphdice B Soluciones exactas a ecuaciones de capa límite laminar 606

Indice 613

Prefacio

Este libro presenta un tratado elemental de los principios de transferencia de calor. Como texto contiene material suficiente para un curso de un semestre que puede presentarse al nivel del penúltimo año de universidad o superior, dependiendo de los objetivos particulares del curso. Para el aprovechamiento adecuado del material son convenientes antecedentes en ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque algunas nociones de mecánica de fluidos facilitarían los estudios de convección, no son esenciales. Los conceptos de balances termodinámicos de energía también son útiles en los diversos desarrollos analíticos.

La presentación de los temas sigue las líneas clásicas de tratamientos separados para conducción, convección y radiación, aunque se subraya que el mecanismo físico de la transferencia de calor por convección es el de conducción a través de la capa estacionaria de fluido cerca de la superficie de transferencia de calor. A todo lo largo del libro se enfatiza la comprensión física mientras que, al mismo tiempo, se descansa en datos experimentales significativos en aquellas circunstancias que no permiten una solución analítica simple.

La conducción se trata tanto desde el punto de vista analítico como numérico, de modo que el lector se beneficia con el aspecto obtenido de las soluciones analíticas, así como del de las herramientas importantes de análisis numérico que deben usarse en la práctica con frecuencia. Se sigue un procedimiento similar en la presentación de la transferencia de calor por convección. Se utiliza un análisis integral de las capas límite en convección tanto libre como forzada para presentar una imagen física del proceso de convección. A partir de esta descripción física, se pueden deducir las consecuencias que conducen en formanatural a la presentación de relaciones empíricas y prácticas para el cálculo de coeficientes de transferencia de calor por convección. El método de la red de radiación se usa ampliamente en la introducción al análisis de sistemas de radiación, debido a que proporciona un medio de instrucción más simple que otros métodos.

En el análisis de cambiadores de calor se presentan las aproximaciones de diferencia de temperatura logarítmica media y de eficacia, ya que ambas se utilizan ampliamente y cada una de ellas ofrece sus propias ventajas al diseñador. Se presenta una breve introducción a difusión y transferencia de masa con objeto de familiarizar al lector con estos procesos, y establecer con más validez las analogías importantes entre transferencias de calor, masa y momento.

En el Cap. 12 se estudian diversos temas especiales que dan mayor interés al material básico de los capítulos precedentes.

Al final de cada capítulo se incluyen problemas. Algunos de ellos son de naturaleza rutinaria, para familiarizar al estudiante con las manipulaciones numéricas y órdenes de magnitud de diversos parámetros que se presentan en el tema de' transferencia de calor. Otros problemas amplían el material del tema solicitando al estudiante la aplicación de los principios básicos a situaciones nuevas y el desarrollo de sus propias ecuaciones. Los dos tipos de problemas son importantes.

El tema de la transferencia de calor no es estático. Con bastante regularidad, ocurren nuevos desarrollos y los profesionales en este campo disponen continuamente de mejores soluciones analíticas y datos empíricos. Debido a la enorme cantidad de información de que se dispone en la literatura de investigación, el estudiante que se inicia podría ser abrumado fácilmente si se presentan y amplían demasiados detalles del tema. El libro está diseñado para servir como un texto elemental, por lo que el autor ha adoptado un papel de intérprete de la literatura cuyos descubrimientos y ecuaciones pueden tener una utilidad inmediata para el lector. Se espera que la atención del estudiante sea atraída hacia trabajos más extensos en un número suficiente de casos, para subrayar la mayor profundidad de que se dispone en la mayor parte de los temas de transferencia de calor. Así, para el estudiante formal, las referencias al final de cada capítulo ofrecen una puerta abierta a la literatura de transferencia de calor, sobre la cual puede construirse para investigación ulterior.

Un libro de texto en su quinta edición refleja obviamente muchos compromisos y procesos evolutivos sobre los años. Este libro no es la excepción. Aunque los mecanismos físicos básicos de transferencia de calor no han cambiado, las técnicas analíticas y los datos experimentales se revisan y mejoran constantemente. Un objetivo de esta nueva edición es mantener la exposición al día con información reciente, conservando al mismo tiempo un enfoque sencillo que pueda ser comprendido por el estudiante que se inicia.

Las computadoras se utilizan ahora por todos los estudiantes e ingenieros prácticos para la solución de problemas de transferencia de calor. El rápido desarrollo de los dispositivos de estado sólido para memorias desafía la imaginación y podemos predecir la disponibilidad en el escritorio del poder de computación a gran escala en el futuro inmediato. A pesar de mayor disponibilidad de este poder de computación, el autor resistió a la tentación de incluir programas de cómputo específicos por dos razones: (1) cada instalación de cómputo es un poco diferente en su alimentación, salida y capacidad de subrutinas; (2) parece que muchos problemas en el futuro se resolverán con minicomputadoras de escritorio, las cuales son más individuales en su programación y sus características de alimentación y salida. Por estas razones en las secciones de solución numérica se ha hecho énfasis en el planteamiento y formulación del problema, que después podrá adaptarse por la persona a su propia instalación de cómputo.

El cambio al SI (Système Internationale, métric), se está llevando a cabo con gran rapidez en la comunidad ingenieril profesional. Para aquellos de nosotros que crecimos con el sistema Btu y la libra masa, el proceso de transición será molesto, pero para el estudiante que se inicia en transferencia de calor, encontrará las unidades SI mucho más fáciles de manejar que para estudiantes anteriores lo fue el sistema inglés hace algunos años. Debido al rápido cambio al sistema métrico en los E.U.A., el SI se ha adoptado como el conjunto de unidades básico en este texto. A pesar de mi entusiasmo personal para el cambio, se debe reconocer la necesidad de relacionar las unidades métricas con el sistema Btu-pie-libra masa, que aún se utiliza ampliamente en la industria. El estudiante de transferencia de calor en este periodo de cambio debe poseer una habilidad "bilingiie" en el tema, por lo que se presentan pasos intermedios y respuestas a los ejemplos en unidades inglesas.

Para esta edición las secciones sobre soluciones numéricas a problemas de conducción se han ampliado en los Caps. 3 y 4. Se han agregado varios ejemplos nuevos que ilustran condiciones de radiación y convección no lineales, propiedades variables, espacios nodales no uniformes, materiales compuestos y técnicas iterativas de solución para conjuntos de ecuaciones no lineales. Los Caps. 5, 6 y 7 sobre convección libre y forzada se han puesto por completo al día en lo que respecta a correlaciones empíricas. También se han incluido nuevos ejemplos en estos capítulos. El Cap. 8 sobre transferencia de calor por radiación tiene varios ejemplos nuevos utilizando tanto la técnica de solución por matrices como por redes. Algunos ejemplos que ilustran soluciones iterativas para problemas no lineales que involucran tanto convección como radiación son de mucho interés, como en el caso de un colector solar. Se han hecho algunas adiciones al Cap. 9 sobre ebullición y condensación, y se proporcionan expresiones analíticas adicionales para parámetros de rendimiento de cambiadores de calor en el Cap. 10, así como una sección sobre cambiadores de calor compactos. Para ilustrar sistemas de almacenamiento de energía y análisis de propiedades variables en un cambiador de calor simple, se han agregado nuevos ejemplos. La sección sobre tubos calefactores en el Cap. 12 se ha puesto al día. Más de 100 problemas nuevos se han adicionado al final de los capítulos.

Con un libro en esta etapa de revisión, la lista de gente que ha sido generosa con sus comentarios y sugerencias ha crecido mucho en verdad. Para evitar el riesgo de omitir un solo nombre, espero que un agradecido reconocimiento general expresará mi gratitud sincera por la ayuda y el estímulo de estas personas.

J. P. Holman

Lisia de Símbolos

a	Velocidad local del sonido
a	Coeficiente de atenuación (Cap. 8)
A	Area
A	Albedo (Cap. 8)
A_m	Area de perfil de aleta (Cap. 2)
B	Inducción de campo magnético
c	Calor específico, usualmente kJ/ $\mathbf{kg \cdot °C}$
C	Concentración (Cap. ll)
C_D	Coeficiente de arrastre, definido por la Ec. 6-13
C_f	Coeficiente de fricción, definido por la Ec. 5-48
c_p	Calor específico a presión constante, usualmente kJ/kg. °C
c_v	Calor específico a volumen constante, usualmente kJ/kg°C
d	Diámetro
D	Profundidad o diámetro
D	Coeficiente de difusión (Cap. **11)**
D_H	Diámetro hidráulico, definido por la Ec. 6-14
e	Energía interna por unidad de masa, usualmente kJ/kg
E	Energía interna, usualmente kJ
E	Poder emisivo, usualmente $\mathbf{W/m^2}$ (Cap. 8)
E_{b0}	Constante solar (Cap. 8)
$E_{b\lambda}$	Poder emisivo de cuerpo negro por unidad de longitud de onda, definido por la Ec. 8-12
E	Vector de campo eléctrico
f	Factor de fricción, definido por la Ec. 5-106 o la Ec. 10-29
F	Fuerza, usualmente N
F_{m-n} o F_{mn}	Factor de forma de radiación, para radiación de la superficie m a la superficie n
g	Aceleración de la gravedad
gc	Factor de conversión, definido por la Ec. 1-12
$G = \frac{\dot{m}}{A}$	Masa velocidad
G	Irradiación (Cap. 8)

h	Coeficiente de transferencia de calor, usualmente $W/m^2 \cdot °C$
$\bar{h}$	Coeficiente de transferencia de calor promedio
h_D	Coeficiente de transferencia de masa, usualmente m/h
h_{pg}	Entalpía de evaporación, kJ/kg
h_r	Coeficiente de transferencia de calor por radiación (Cap. 8)
H	Intensidad de campo magnético
ι	Entalpía, usualmente kJ/kg
I	Intensidad de radiación
Z	Insolación solar (Cap. 8)
I_0	Insolación solar en el extremo exterior de la atmósfera
J	Radiosidad (Cap. 8)
J	Densidad de corriente
k	Conductividad térmica, usualmente W/m°C
k_e	Conductividad térmica efectiva de espacios cerrados (Cap. 7)
k_λ	Coeficiente de dispersión (Cap. 8)
L	Longitud
L_c	Longitud corregida de aleta (Cap. 2)
m	Masa
m	Rapidez de flujo de masa
M	Peso molecular (Cap. ll)
n	Densidad molecular
n	Factor de turbiedad, definido por la Ec. 18-120
N	Rapidez de difusión molal moles por unidad de tiempo (Cap. ll)
P	Presión, usualmente N/m^2
P	Perímetro
q	Rapidez de transferencia de calor, kJ por unidad de tiempo
q''	Flujo de calor, kJ por unidad de tiempo por unidad de área
$\dot{q}$	Calor generado por unidad de volumen
$q_{m,n}$	Residuo de un nodo, usado en el método de relajamiento (Caps. 3, 4)
Q	Calor, kJ
r	Radio o distancia radial
r	Factor de recuperación, definido por la Ec. 5-119
R	Radio fijo
R	Constante de los gases
R_{th}	Resistencia térmica, usualmente °C/W
s	Una dimensión característica (Cap. 4)
S	Razón de velocidades moleculares (Cap. 12)
S	Factor de forma para conducción, usualmente m
t	Espesor, aplicado a problemas de aletas (Cap. 2)
t, T	Temperatura
u	Velocidad
v	Velocidad
ν	Volumen específico, usualmente m^3/kg
V	Velocidad
V	Volumen molecular (Cap. 11)
W	Peso, usualmente N
x, y, z	Coordenadas espaciales en el sistema cartesiano
$\alpha = \frac{k}{\rho c}$	Difusividad térmica, usualmente m^2/s
α	Absorbancia (Cap. 8)
α	Coeficiente de ajuste (Cap. 12)
α	Angulo de altitud solar, grados (Cap. 8)
β	Coeficiente volumétrico de expansión, l/K
β	Coeficiente de temperatura de la conductividad térmica, 1/°C
$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	Exponente isoentrópico, adimensional
I	Flujo en masa de condensado por unidad de profundidad de placa (Cap. 9)
δ	Espesor de capa límite hidrodinámica
δ_t	Espesor de capa límite térmica
ϵ	Eficacia de cambiador de calor
ϵ	Emisividad
ϵ_H, ϵ_M	Difusividad a contraflujo de calor y momento (Cap. 5)
$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta}$	Razón de espesor de capa límite térmica a espesor de capa límite hidrodinámica

η	Variable de similitud, definida nor la Ec. B-6
η_f	Eficiencia de aleta, adimensional
0	Angulo en sistema de coordenadas esféricas o cilíndricas
0	Diferencia de temperaturas, T – $T_{referencia}$ La temperatura de referencia se escoge de forma diferente para sistemas diferentes (véanse los Caps. 2 a 4)
λ	Longitud de onda
λ	Trayectoria libre media (Cap. 12)
μ	Viscosidad dinámica
v	Viscosidad cinemática
v	Frecuencia de radiación (Cap. 8)
P	Densidad, usualmente kg/m^3
P	Reflectancia (Cap. 8)
ρ_e	Densidad de carga
σ	Conductividad eléctrica
σ	Constante de Stefan-Boltzmann
σ	Tensión superficial de interfase líquido-vapor (Cap. 9)
τ	Tiempo
τ	Esfuerzo cortante entre capas de fluido
τ	Transmitancia (Cap. 8)
ϕ	Angulo en el sistema de coordenadas esféricas 0 cilíndricas
ψ	Función de corriente

Grupos adimensionales

$Bi = \frac{hs}{k}$	Módulo de Biot
$Ec = \frac{u_\infty^2}{c_p(T_\infty - T_w)}$	Número de Eckert
$Fo = \frac{\alpha\tau}{s^2}$	Módulo de Fourier
$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2}$	Número de Grashof
$Gr^* = Gr\ Nu$	Número de Grashof modificado para flujo de calor constante
$Gz = Re\ Pr\frac{d}{L}$	Número de Graetz
$Kn = \frac{\lambda}{L}$	Número de Knudsen
$Le = \frac{\alpha}{D}$	Número de Lewis (Cap. ll)
$M = \frac{u}{a}$	Número de Mach
$N = \frac{\sigma B_y^2 x}{\rho u_\infty}$	Número de influencia magnética
$Nu = \frac{hx}{k}$	Número de Nusselt
$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}x}{k}$	Número de Nusselt promedio
$Pe = Re\ Pr$	Número de Peclet
$Pr = \frac{c_p\mu}{k}$	Número de Prandtl
$Re = \frac{\rho ux}{\mu}$	Número de Reynolds
$Sc = \frac{\nu}{D}$	Número de Schmidt (Cap. ll)
$Sh = \frac{h_m x}{D}$	Número de Sherwood (Cap. 11)
$St = \frac{h}{\rho c_p u}$	Número de Stanton
$\overline{St} = \frac{h}{\rho c_p u}$	Número de Stanton promedio

Subíndices

aw	Condiciones de pared adiabática
b	Se refiere a condiciones de cuerpo negro (Cap. 8)
b	Evaluado en condiciones globales
d	Basado en el diámetro
f	Evaluado en condiciones de película
g	Condiciones de vapor saturado (Cap. 9)

i	Condiciones iniciales o de entrada
L	Basado en la longitud de la placa
m	Condiciones de flujo promedio
m, n	Indican posiciones nodales en la solución numérica (véanse los Caps. 3, 4)
0	Indica condiciones de flujo de estancamiento (Cap. 5) o alguna condición inicial en tiempo cero
r	A una posición radial especificada
s	Evaluado en condiciones de los alrededores
x	Denota alguna posición local con respecto a la coordenada x
w	Evaluado en condiciones de pared
*	(Indice superior) Propiedades evaluadas a la temperatura de referencia, expresada por la Ec. 5-123
∞	Evaluación en condiciones de corriente libre

1
Introducción

La transferencia de calor es aquella ciencia que busca predecir la transferencia de energía que puede ocurrir entre cuerpos materiales, como resultado de una diferencia de temperatura. La termodinámica enseña que esta transferencia de energía se define como calor. La ciencia de la transferencia de calor no sólo trata de explicar cómo puede ser transferida la energía calorífica, sino también trata de predecir la rapidez a la que se realizará este intercambio bajo ciertas condiciones especificadas. El hecho de que un régimen de transferencia de calor sea el objetivo deseado de un análisis, señala la diferencia entre la transferencia de calor y la termodinámica. La termodinámica se ocupa de sistemas en equilibrio; se puede utilizar para predecir la cantidad de energía requerida para pasar un sistema de un estado de equilibrio a otro; no puede usarse para predecir qué tan rápido se realizará un cambio, ya que el sistema no se encuentra en equilibrio durante el proceso. La transferencia de calor completa al primér y segundo principios de la termodinámica, al proporcionar reglas experimentales adicionales que se pueden utilizar para establecer rapideces de transferencia de energía. Tal como en la ciencia de la termodinámica, las reglas experimentales utilizadas como base del tema de la transferencia de energía son muy simples y se les puede ampliar con facilidad para que abarquen -diversas situaciones prácticas.

Como un ejemplo de los diferentes tipos de problemas que son tratados por la termodinámica y la transferencia de calor, considérese el enfriamiento de una barra de acero caliente que se coloca en un recipiente con agua. La termodinámica puede usarse para predecir *la* temperatura de equilibrio final de la combinación de la barra de acero y agua. La termodinámica no nos dirá cuánto tardará en alcanzar esta condición de equilibrio o cuál será la temperatura de la barra después de pasado un cierto tiempo antes que se alcance la condición de equilibrio. La transferencia de calor puede usarse para predecir la temperatura tanto de la barra como del agua, en función del tiempo.

La mayor parte de los lectores conocerán los términos utilizados para indicar los tres modos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación. En este

capítulo tratamos de explicar en forma cualitativa los mecanismos de estos modos, de manera que cada uno pueda ser considerado en su perspectiva adecuada. Los capítulos subsecuentes tratan en detalle los tres tipos de transferencia de calor.

l-l Transferencia de calor por conducción

La experiencia ha demostrado que cuando existe un gradiente de temperatura en un cuerpo, hay una transferencia de energía de la región de alta temperatura a la de baja temperatura. Decimos que la energía es transferida por conducción y que la rapidez de transferencia de energía por unidad de área es proporcional al gradiente normal de temperatura:

$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial T}{\partial x}$$

Cuando se inserta la constante de proporcionalidad,

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \tag{l-1}$$

en donde q es la rapidez de transferencia de calor y $\delta T/\delta x$ es el gradiente de temperatura en la dirección del flujo de calor. A la constante positiva *k* se le llama la conductividad térmica del material, y el signo menos se inserta para que se satisfaga el segundo principio de la termodinámica, es decir, el calor deberá fluir hacia abajo en la escala de temperatura, como se encuentra indicado en el sistema de coordenadas de la Fig. l-1. A la Ec. l-1 se le llama la ley de conducción de calor de Fourier en honor al físico matemático francés Joseph Fourier, quien realizó importantes contribuciones en el tratamiento analítico de la transferencia de calor por conducción. Es importante observar que la Ec. l-l es la igualdad que define la conductividad térmica y que **en** un sistema de unidades típico en el que el flujo de calor es expresado en watts, *k* tiene las unidades de watts por metro por grado Celsius.

Ahora nos planteamos el problema de determinar la ecuación básica que gobierna la transferencia de calor en un sólido, utilizando la Ec. l-l como punto de partida.

Considérese el sistema unidimensional que aparece en la Fig. 1-2. Si el sistema se encuentra en un estado estacionario, es decir, si la temperatura no cambia con el tiempo, entonces el problema es simple y sólo necesitamos integrar la Ec. l-l y sustituir los valores adecuados para resolverla para la cantidad deseada. No obstante, si la temperatura del sólido está cambiando con el tiempo, o si hay fuentes de calor o sumideros dentro del sólido, la situación es más compleja. Consideramos el caso general en el que la temperatura puede estar cambiando con el tiempo y dentro del cuerpo pueden haber fuentes de calor. Para el elemento de espesor *dx* se puede realizar el siguiente balance de energía:

Energía conducida en la cara izquierda + calor generado dentro del elemento
= cambio en la energía interna + energía conducida fuera de la cara derecha

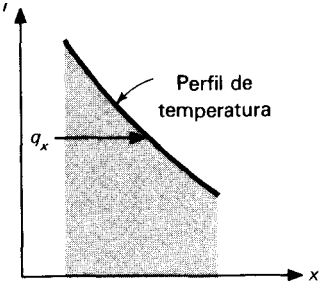


Fig. 1-1 Esquema que muestra la dirección del flujo de calor.

Estas cantidades de energía están dadas de la siguiente manera:

$$\text{Energía en la cara izquierda} = q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Energía generada dentro del elemento} = \dot{q}A\,dx$$

$$\text{Cambio en la energía interna} = \rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}dx$$

$$\text{Energía hacia fuera de la cara derecha} = q_{x+dx} = -kA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+dx}$$

$$= -A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]$$

donde $\dot{q}$ = energía generada por unidad de volumen
c = calor específico del material
ρ = densidad

La combinación de los elementos expresados antes nos da

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q}A\,dx = \rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}dx - A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]$$

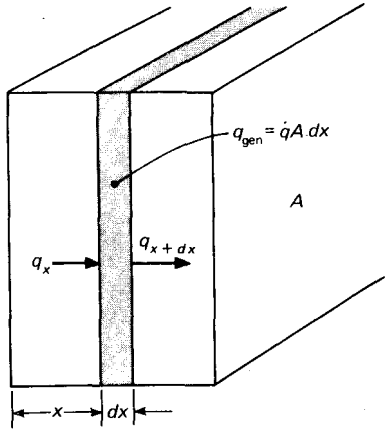


Fig. 1-2 Volumen elemental para el análisis de la conducción de calor unidimensional.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1-2}$$

Esta es la ecuación de conducción de calor unidimensional. Para tratar más de un flujo de calor unidimensional, sólo necesitamos considerar el calor conducido hacia adentro y hacia afuera de un volumen unitario en las tres direcciones coordenadas, como se muestra en la Fig. 1-3*a*. El balance de energía da

$$q_x + q_y + q_z + q_{\text{gen}} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{d\tau}$$

y las cantidades de energía están expresadas por

$$q_x = -k\,dy\,dz\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dy\,dz$$

$$q_y = -k\,dx\,dz\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_{y+dy} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy\right]dx\,dz$$

$$q_z = -k\,dx\,dy\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$q_{z+dz} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz\right]dx\,dy$$

$$q_{\text{gen}} = \dot{q}\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{dE}{d\tau} = \rho c\,dx\,dy\,dz\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

de manera que la ecuación general de conducción de calor tridimensional es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1-3}$$

Para la conductividad térmica constante la Ec. 1-3 se escribe

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1-3a}$$

donde la cantidad $\alpha = k/\rho c$ se llama difusividad térmica del material. Cuanto mayor sera el valor de α, tanto más rápida será la difusión de calor a través del material. Esto puede observarse examinando las cantidades que conforman α. Un valor elevado de α puede ser el resultado de un alto valor de conductividad térmica, que indicará una ele-

vada rapidez de transferencia de energía o de un valor bajo de la capacidad calorífica ρc. Un valor bajo de la capacidad calorífica significará que se absorberá dentro del material una cantidad menor a la de la energía en movimiento y será utilizada para aumentar la temperatura del material; por tanto, habrá más energía disponible para transferencias ulteriores.

En las derivaciones anteriores, la expresión para la derivada en x + dx se ha escrito en la forma de una expansión en serie de Taylor empleando para el desarrollo sólo los dos primeros términos de la serie.

La Ec. 1-3*a* se puede transformar ya sea, en coordenadas cilíndricas o bien, en coordenadas esféricas por medio de técnicas de cálculo estándar. Los resultados son los siguientes:

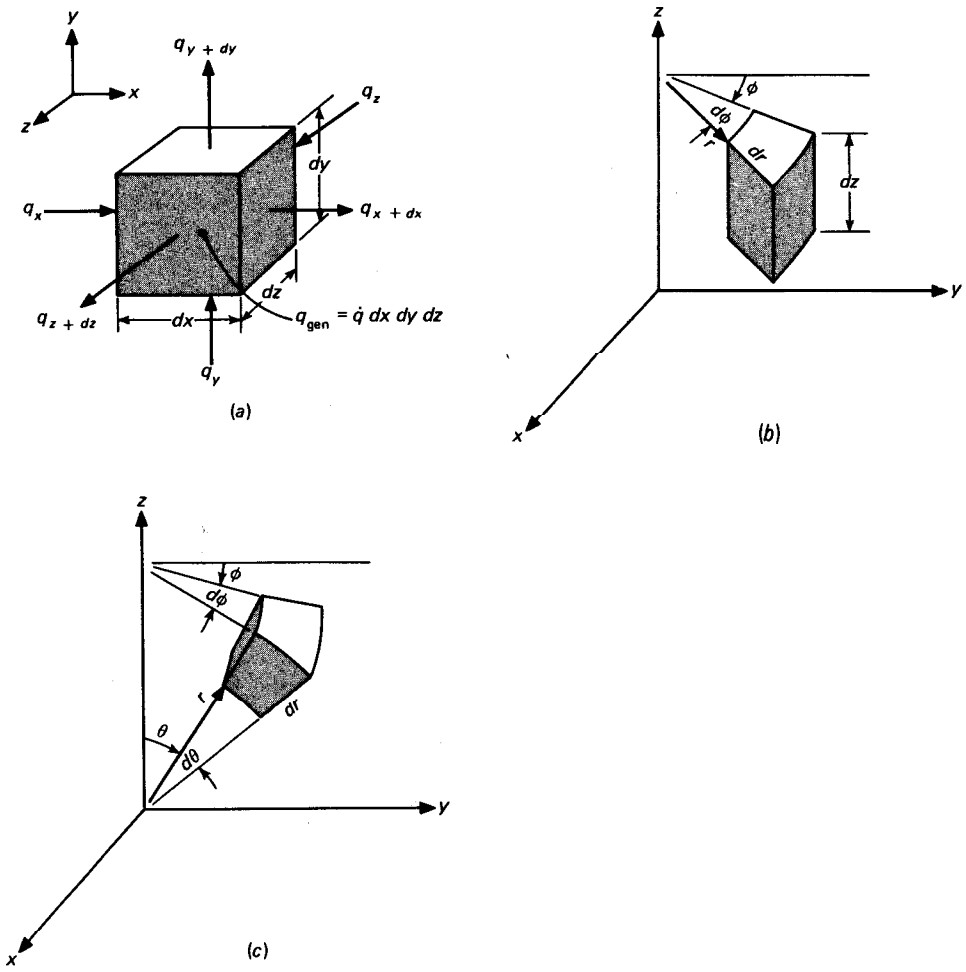


Fig. I-3 Volumen elemental para análisis de conducción de calor tridimensional: (*a*) coordenadas cartesianas; (*b*) coordenadas cilíndricas; (*c*) coordenadas esféricas.

coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1-3b}$$

coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1-3c}$$

Los sistemas coordenados para utilizarse con las Ecs. 1-3*b* y 1-3*c* se encuentran indicados en las Figs. 1-3*b* y c, respectivamente.

Muchos de los problemas prácticos sólo implican casos especiales de las ecuaciones generales ya mencionadas. Como una guía para los desarrollos que aparecerán en los capítulos siguientes, es útil mostrar la forma reducida de las ecuaciones generales para algunos de los casos de interés práctico.

flujo de calor unidimensional en estado estacionario (sin generación de calor):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \tag{1-4}$$

Obsérvese que esta ecuación es la misma que la Ec. l-l cuando q = constante.

flujo de calor unidimensional en estado estacionario en coordenadas cilíndricas (sin generación de calor):

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \tag{1-5}$$

flujo de calor unidimensional en estado estacionario con fuentes de calor:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{1-6}$$

conducción bidimensional en estado estacionario sin fuentes de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1-7}$$

1-2 Conductividad térmica

La Ec. l-l es la igualdad que define la conductividad térmica. Basándose en esta definición, se pueden realizar mediciones experimentales para determinar la conductividad térmica de diferentes materiales. Para gases a temperaturas moderadamente

bajas, se pueden usar tratamientos analíticos en la teoría cinética de los gases para predecir de manera exacta los valores observados experimentalmente. En algunos casos, hay teorías útiles para la predicción de la conductividad térmica en sólidos y líquidos, pero en general, todavía hay muchas preguntas abiertas y conceptos que necesitan ser clasificados.

El mecanismo de la conductividad térmica en un gas es simple. Identificamos la energía cinética de una molécula con su temperatura; así, en una región de alta temperatura, las moléculas tienen velocidades más altas que en una región de temperatura baja. Las moléculas se encuentran en continuo movimiento aleatorio, chocando unas contra otras e intercambiando energía y momento. Las moléculas tienen este movimiento aleatorio exista o no un gradiente de temperatura en el gas. Si una molécula se mueve de una región de alta temperatura a una de baja temperatura, transporta energía cinética a la parte del sistema de baja temperatura y transfiere esta energía a través de colisiones con moléculas de temperatura más baja.

La Tabla 1-1 contiene una lista de los valores de conductividad térmica para diversos materiales para indicar las órdenes de magnitud relativos que se han de esperar en la práctica. En el Apéndice A se proporciona una tabla informativa más completa. En general, la conductividad térmica depende mucho de la temperatura.

Observamos que la conductividad térmica tiene las unidades de watts por metro por grado Celsius cuando el flujo de calor está expresado en watts. Obsérvese que se incluye una ***rapidez*** de calor, y que el valor numérico de la conductividad térmica indica qué tan rápido fluirá en un material dado. ¿Cómo se toma en consideración la rapidez de transferencia de energía en el modelo molecular que acabamos de discutir? Es claro que cuanto más rápido se muevan las moléculas, más rápidamente transportarán energía. Por consiguiente, la conductividad térmica de un gas deberá depender de la temperatura. Un tratamiento analítico simplificado muestra que la conductividad térmica de un gas varía con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. (Se puede recordar que la velocidad del sonido en un gas varía con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta; esta velocidad es aproximadamente la velocidad media de las moléculas.) En la Fig. 1-4 se muestra la conductividad térmica de algunos gases típicos. Para la mayor parte de los gases a presiones moderadas, la conductividad térmica es una función de la sola temperatura. Esto quiere decir que los datos de gases para 1 atm (atmósfera), como están dados en el Apéndice A, pueden utilizarse para un amplio intervalo de presiones. Cuando la presión del gas se torna del orden de su presión crítica o, con mayor generalidad, cuando se encuentra un comportamiento no ideal del gas, se deberán consultar otras fuentes para los datos sobre conductividad térmica.

El mecanismo físico de la conducción de energía térmica en líquidos es cualitativamente el mismo que en los gases; sin embargo, la situación es mucho más compleja ya que las moléculas se encuentran más cerca unas de otras y los campos de fuerza molecular ejercen una fuerte influencia sobre el intercambio de energía en el proceso de colisión. En la Fig. 1-5 se muestra la conductividad térmica de algunos líquidos típicos.

La energía térmica puede ser conducida en los sólidos de dos modos: vibración de red y transporte por medio de electrones libres. En los buenos conductores eléctricos un gran número de electrones libres se mueven en la estructura de la red del material. De la misma manera que estos electrones pueden transportar carga eléctrica, también pueden llevar energía térmica de una región de alta temperatura a una de baja tempe-

Tabla I-I Conductividad térmica de diversos materiales en 0 °C

Material	Conductividad térmica k W/m °C	Btu/h·pie· °F
Metales:		
Plata (pura)	420	237
Cobre (puro)	385	223
Aluminio (puro)	202	117
Níquel (puro)	93	54
Hierro (puro)	73	42
Acero al carbón, 1% C	43	25
Plomo (puro)	35	20.3
Acero cromo-níquel (18% Cr, 8% Ni)	16.3	9.4
Sólidos no metálicos:		
Cuarzo, paralelo al eje	41.6	24
Magnesita	4.15	2.4
Mármol	2.08-2.94	1.2-1.7
Arena	1.83	1.06
Vidrio de ventana	0.78	0.45
Arce o roble	0.17	0.096
Aserrín	0.059	0.034
Fibra de vidrio	0.038	0.022
Líquidos:		
Mercurio	8.21	4.74
Agua	0.556	0.327
Amoníaco	0.540	0.312
Aceite lubricante, SAE 50	0.147	0.085
Freón 12, CCl_2F_2	0.073	0.042
Gases:		
Hidrógeno	0.175	0.101
Helio	0.141	0.081
Aire	0.024	0.0139
Vapor de agua (saturado)	0.0206	0.0119
Bióxido de carbono	0.0146	0.00844

ratura, como ocurre en los gases. De hecho, con frecuencia nos referimos a estos electrones como gas de electrones. La energía también se puede transmitir como energía vibracional en la estructura de red del material. No obstante, en general, este último modo de transferencia de energía no es tan grande como el transporte por electrones y por esta razón los buenos conductores eléctricos son casi siempre buenos conductores de calor, a saber cobre, aluminio y plata, y los aislantes eléctricos son casi siempre buenos aislantes del calor. En la Fig. 1-6 se muestra la conductividad térmica de algunos solidos típicos. En el Apéndice A se dan más datos.

La conductividad térmica de algunos materiales aislantes también se proporciona en el Apéndice A. Algunos de los valores típicos son 0.038 W/m·°C para la fibra de vidrio y 0.78 W/m·°C para el vidrio de ventana. A altas temperaturas, la transferencia de energía a través de materiales aislantes puede involucrar varios modos: conduc-

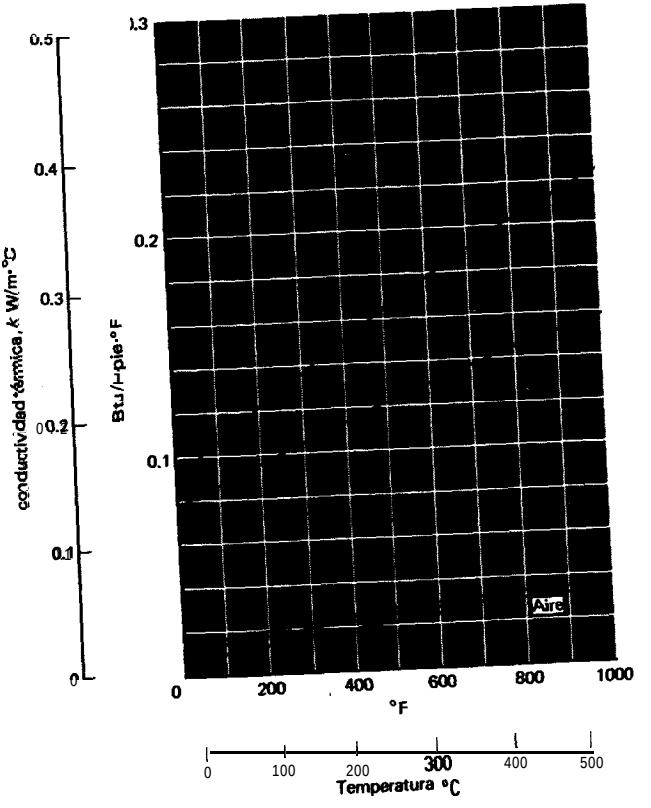


Fig. 1-4 Conductividad térmica de algunos gases típicos [1 W/m·°C = 0.5779 Btu/h. pie °F.

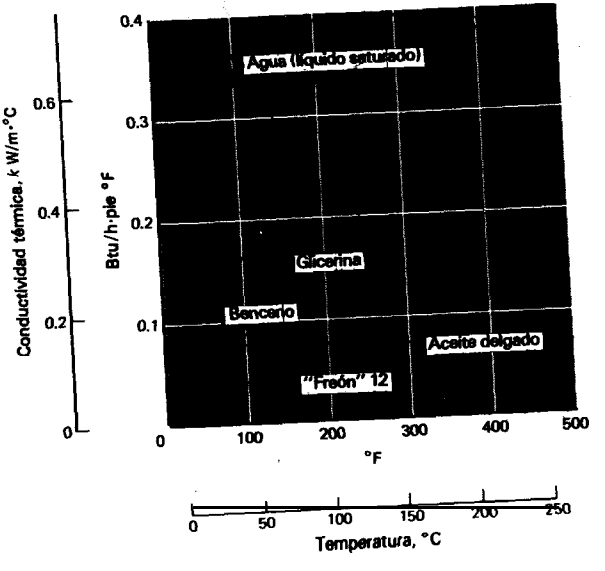


Fig. 1-5 Conductividad térmica de algunos líquidos típicos.

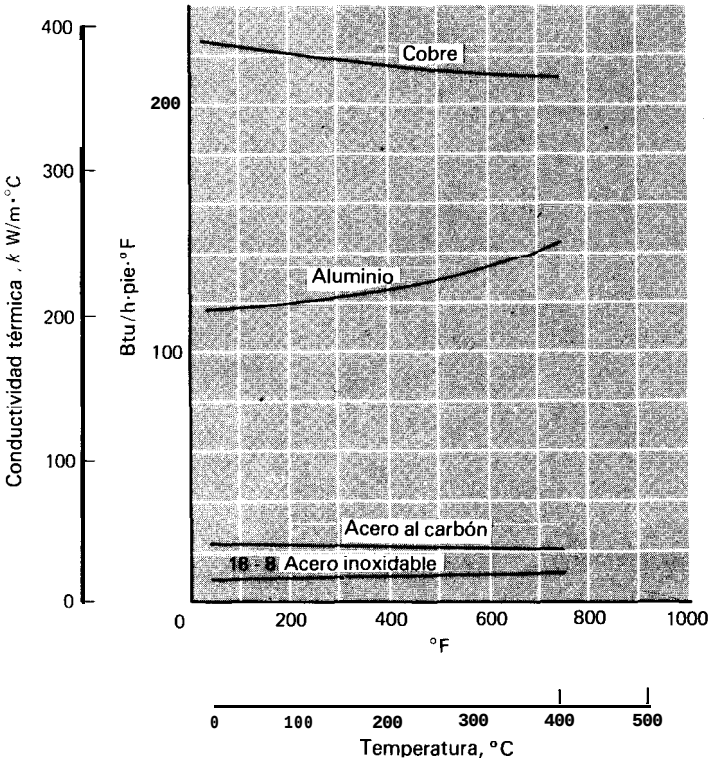


Fig. 1-6 Conductividad térmica en algunos sólidos típicos.

ción a través de material sólido fibroso o poroso; conducción a través del aire atrapado en los espacios huecos; y radiación a temperaturas suficientemente altas.

Un problema técnico importante es el almacenamiento y transporte de líquidos criogénicos como el hidrógeno durante periodos prolongados de tiempo. Estas aplicaciones han conducido al desarrollo de *superaislantes* para su uso en temperaturas muy bajas (tan bajas como cerca de − 250 °C). El más eficiente de estos superaislantes consiste en múltiples capas de materiales muy reflejantes separados por separadores aislantes. Se hace vacío en el sistema completo para minimizar la conductividad por aire, y es posible obtener conductividades térmicas tan bajas como 0.3 mW/m·°C. En la Fig. 1-7 se proporciona un útil compendio de las conductividades térmicas de materiales aislantes a temperaturas criogénicas. Se proporciona información adicional sobre aislamiento por multicapas en las Refs. 3 y 2.

1-3 Transferencia de calor por convección

Sabemos muy bien que una placa de metal caliente se enfría con mayor rapidez cuando se le coloca frente a un ventilador, que cuando se le expone a un aire en reposo. De-

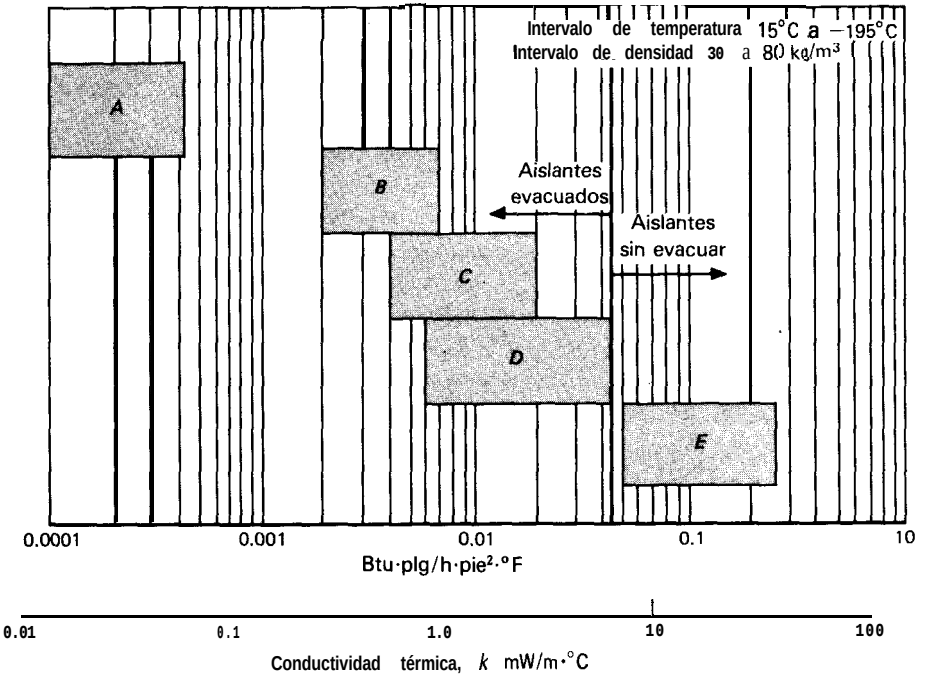


Fig. 1-7 Conductividad térmica aparente de un material aislante criogénico típico: (*a*) aislantes multicapas; (*b*) polvos opacados; (*c*) fibras de vidrio; (*d*) polvos; (*e*) espumas, polvos y fibras de acuerdo con la Ref. 1. [1 Btu. plg/h·pie²·°F = 144 mW/m·°C.

cimos que el calor se disipó por convección y llamamos al proceso transferencia de calor por convección. El término convección proporciona al lector una noción intuitiva sobre el proceso de transferencia de calor; no obstante, esta noción intuitiva deberá ser ampliada para que nos permita llegar a un tratamiento analítico adecuado del problema. Por ejemplo, sabemos que la velocidad a la que sopla el aire sobre la placa caliente obviamente influye en la rapidez de transferencia de calor. ¿Pero influye el enfriamiento de una manera lineal; es decir, si se duplica la velocidad, se duplicará la rapidez de transferencia de calor? Deberíamos sospechar que la rapidez de transferencia de calor podría ser diferente si enfriamos la placa con agua en vez de aire, pero, una vez más, ¿qué tanta diferencia habría? Estas preguntas se pueden contestar con la ayuda de algunos análisis bastante básicos que presentamos en capítulos posteriores. Por el momento, bosquejamos el mecanismo físico de la transferencia de calor por convección y mostramos su relación con el proceso de conducción...

Considérese la placa caliente que se muestra en la Fig. 1-8. La temperatura de la placa es T_w, y la temperatura de fluido es T_∞. La velocidad de flujo aparecer& como se muestra, siendo reducida a cero en la placa como resultado de la acción de viscosidad. Ya que la velocidad de la capa de fluido sobre la pared será cero, el calor deberá transferirse en aquel punto sólo por conducción. De este modo podríamos calcular la transferencia de calor, utilizando la Ec. l-l con la conductividad térmica y el

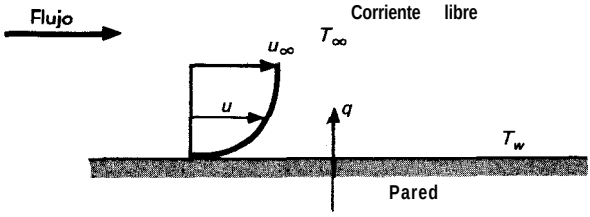


Fig. I-8 Transferencia de calor por convección en una placa.

gradiente de temperatura del fluido sobre la pared. ¿Por qué, entonces, si en esta capa el calor fluye por conducción, hablamos de transferencia de calor por *convección y* necesitamos considerar la velocidad del fluido? La respuesta es que el gradiente de temperatura depende de la rapidez a la que el fluido conduce el calor; una velocidad alta produce un gradiente de temperatura más grande, y así sucesivamente. Por tanto, el gradiente de temperatura sobre la pared depende del campo de flujo, y en nuestro último análisis debemos desarrollar una expresión que relacione las dos cantidades. Sin embargo, debe recordarse que el mecanismo físico de la transferencia de calor sobre la pared es un proceso de conducción.

Para expresar el efecto total de la convección, utilizamos la ley de enfriamiento de Newton:

$$q = hA(T_w - T_\infty) \tag{1-8}$$

Aquí la rapidez de transferencia de calor está relacionada con la diferencia de temperatura total entre la pared y el fluido, y el área de la superficie A. A la cantidad h se le llama el coeficiente de transferencia de calor por convección, y la Ec. 1-8 es la ecuación que lo define. Para algunos sistemas se puede realizar un cálculo analítico de h. Para situaciones complejas se deberá determinar experimentalmente. En algunas ocasiones se llama *conductancia de película* al coeficiente de transferencia de calor debido a su relación con el proceso de conducción en la delgada capa estacionaria de fluido sobre la superficie de la pared. En la Ec. 1-8 observamos que las unidades de h son watts por metro cuadrado por grado Celsius cuando el flujo de calor se expresa en watts. Este es el conjunto de unidades más utilizado.

Tomando en cuenta el estudio precedente, podemos anticipar que la transferencia de calor por convección, además de su dependencia de las propiedades térmicas del fluido (conductividad térmica, calor específico, densidad), tendrá cierta dependencia de la viscosidad del fluido. Esto era de esperarse porque la viscosidad influye el perfil de velocidad y, de manera correspondiente, la rapidez de transferencia de energía en la región cercana a la pared.

Si se expusiera una placa caliente al aire ambiente de una habitación sin una fuente de movimiento externa, se experimentaría un movimiento del aire como resultado de los gradientes de densidad cerca de la placa. A esto le llamamos convección *natural* o *libre,* en oposición a la convección *forzada*, que ocurre en el caso en que el ventilador sopla aire sobre la placa. Los fenómenos de ebullición y condensación también se

Tabla I-2 Valores aproximados de los coeficientes de transferencia de calor por convección

Modo	h W/m² °C	h Btu/h · pie² · °F
Convección libre, *AT = 30* °C		
Placa vertical 0.9 m [1 pie] de altura en el aire	4.5	**0.79**
Cilindro horizontal, 5 cm de diámetro. en el aire	6.5	1.14
Cilindro horizontal, 2 cm de diámetro. en agua	890	157,
Convección forzada		
Flujo de aire a 2 m/s sobre placa cuadrada de 0.2 m	**12**	2.1
Flujo de aire a 35 m/s sobre placa cuadrada a 0.75 m	75	13.2
Aire a 2 atm soplando en tubo de 2.5 cm de diámetro a 10 m/s	65	ll.4
Agua a 0.5 kg/s fluyendo en tubo de 2.5 cm de diámetro	3500	616
Flujo de aire *a través* de un cilindro de 5 cm de diámetro con velocidad de 50 m/s	180	32
Agua hirviendo		
En una piscina o recipiente	2500-35 000	440-6200
Fluyendo en un tubó	5000-100000	880-17600
Condensación de vapor de agua, 1 atm		
Superficies verticales	4000– **11300**	700-2000
Tubos horizontales al exterior	**9500-25 000**	1700–4400

agrupan bajo el tema general de transferencia de calor por convección. En la Tabla 1-2 se encuentran indicados los intervalos aproximados de los coeficientes de transferencia de calor por convección.

I-4 Transferencia de calor por radiación

En contraste con los mecanismos de conducción y convección, en donde está involucrada la transferencia de energía a través de un medio material, el calor también se puede transferir a regiones donde existe el vacío perfecto. En este caso, el mecanismo es la radiación electromagnética. Limitaremos nuestro estudio a la radiación electromagnética que es propagada como resultado de una diferencia de temperaturas; a esto se le llama radiación térmica.

Consideraciones termodinámicas muestran* que un radiador ideal, o cuerpo negro, emitirá energía a una rapidez proporcional a la cuarta potencia de la tempera-

* Véase, por **ejemplo.** J. P. Holman, "Termodinámica". 3a. Ed.. Pág. 350, McGraw-Hill Book Company, New York. 1980.

tura absoluta del cuerpo. Cuando dos cuerpos intercambian calor por radiación, el intercambio de calor neto es entonces proporcional a las diferencias en T^4. Así.

$$q = \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \tag{1-9}$$

donde σ es la constante de proporcionalidad y se le llama constante de Stefan-Boltzmann con el valor de $5.669 \times 10^{-8}\ W/m^2 \cdot K^4$. A la Ec. 1-9 se le llama la ley de radiación térmica de Stefan-Boltzmann, y se aplica sólo a los cuerpos negros. Es importante observar que esta ecuación únicamente es válida para la radiación térmica; otros tipos de radiación electromagnética no pueden ser tratados de una manera tan simple.

Hemos mencionado que un cuerpo negro irradia energía de acuerdo con la ley T^4. A tales cuerpos les llamamos negros porque las superficies negras, tales como un pedazo de metal cubierto con carbón negro, se aproximan a este tipo de comportamiento. Otros tipos de superficies, como una brillante superficie pintada o una placa de metal pulida, no irradian tanta energía como un cuerpo negro; sin embargo, la radiación total emitida por estos cuerpos, por lo general, sigue la proporcionalidad de T^4. Para tomar en cuenta la naturaleza "gris" de estas superficies introducimos otro factor en la Ec. 1-9, llamado la emisividad ϵ, que relaciona la radiación de la superficie "gris" con la de una superficie negra ideal. Además, debemos tomar en cuenta el hecho de que no todas las radiaciones que dejan una superficie alcanzarán la otra superficie, ya que la radiación electromagnética viaja en línea recta y algunas se perderán en los alrededores. Por consiguiente, para tomar en cuenta ambas situaciones, introducimos dos nuevos factores en la Ec. 1-9

$$q = F_\epsilon F_G \sigma A (T_1^4 \quad T_2^4) \tag{1-10}$$

donde F_ϵ es la función de emisividad y F_G es la función geométrica de "factor de vista". La determinación de la forma de estas funciones para configuraciones específicas es el tema de un capítulo subsecuente. Sin embargo, en este momento es importante alertar al lector, sobre el hecho que estas funciones generalmente no son independientes unas de otras como se indica en la Ec. l-10.

Los fenómenos de transferencia de calor por radiación pueden ser excesivamente complejos, y los cálculos son raras veces tan simples como lo sugiere la Ec. l-10. Por el momento, deseamos enfatizar la diferencia en el mecanismo físico entre sistemas de transferencia de calor por radiación y de conducción y convección. En el Cap. 8 examinaremos en detalle la radiación.

1-5 Dimensiones y unidades

En esta sección esbozamos los sistemas de unidades que se usan en todo el libro. Debemos cuidarnos de no confundir el significado de los términos *unidades* y dimensiones. Una dimensión es una variable física utilizada para especificar el comportamiento o naturaleza de un sistema particular. Por ejemplo, la longitud de una barra es una dimensión de la misma. De manera similar, la temperatura de un gas puede ser considerada una de las dimensiones termodinámicas del gas. Cuando decimos que la barra

tiene tantos metros de largo, o que el gas tiene una temperatura de tantos grados Celsius, hemos dado las unidades con las que escogimos medir la dimensión. En nuestro desarrollo de la transferencia de calor usamos las dimensiones

L = longitud
M = masa
F = fuerza
τ = tiempo
T = temperatura

Todas las cantidades físicas utilizadas en la transferencia de calor pueden expresarse en términos de estas dimensiones fundamentales. Las unidades que se usan para ciertas dimensiones están seleccionadas por medio de definiciones un poco arbitrarias que casi siempre se relacionan con un fenómeno o ley física. Por ejemplo, la segunda ley de movimiento de Newton puede ser escrita

Fuerza ~ rapidez de cambio de momento

$$F = k \frac{d(mv)}{d\tau}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Si la masa es constante,

$$F = k\, m\, a \tag{1-11}$$

donde la aceleración es $a = dv/d\tau$. La Ec. l-ll generalmente se escribe

$$F = \frac{1}{g_c} ma \tag{1-12}$$

con $1/g_c = k$. La Ec. 1-12 se utiliza para definir nuestro sistema de unidades para la masa, fuerza, longitud y tiempo. Algunos sistemas típicos de unidades son

1. 1 lb_f acelerará 32.16 $pies/s^2$ a 1 lb_m
2. 1 lb_f acelerará 1 pie/s^2 a 1 $slug_m$.
3. 1 dyn_f acelerará 1 cm/s^2 a 1 g_m.
4. 1 N_f acelerará 1 m/s^2 a 1 kg_m.
5. 1 kg_f acelerará 9.806 m/s^2 a 1 kg_m.

Como la Ec. 1-12 debe ser homogénea en dimensiones, tendremos un valor diferente de la constante g_c para cada uno de los sistemas de unidades en los puntos anteriores de 1 a 5. Estos valores son:

1. $g_c = 32.16\ lb_m \cdot pie/lb_f \cdot s^2$
2. $g_c = 1\ slug \cdot pie/lb_f \cdot s^2$
3. $g_c = 1\ g \cdot cm/dyn \cdot s^2$
4. $g_c = 1\ kg \cdot m/N \cdot s^2$
5. $g_c = 9.806\ kg_m \cdot m/kg_f \cdot s^2$

No importa qué sistema de unidades se utilice, siempre y cuando sea consistente con las definiciones antes mencionadas.

El trabajo tiene las dimensiones de un producto de duración de fuerza por una distancia. La energía tiene las mismas dimensiones. Las unidades de trabajo y energía se pueden escoger de cualquiera de los sistemas utilizados antes. Por consiguiente las unidades de trabajo y energía para cada uno de los sistemas anteriores son:

1. $lb_f \cdot pie$
2. $lb_f \cdot pie$
3. $dyn \cdot cm$ = 1 erg
4. $N \cdot m$ = 1 J(joule)
5. $kg_f \cdot m$ = 9.806 J

Además, podemos utilizar unidades de energía que estén basadas en fenómenos térmicos:

1 Btu elevará 1 lb_m de agua 1 °F en 68 °F.
1 cal elevará 1 g de agua 1 °C en 20 °C.
1 kcal elevará 1 kg de agua 1 °C en 20 °C.

Estos factores de conversión para las diversas unidades de trabajo y energía son

1 Btu = 778.16 $lb_f \cdot pie$
1 Btu = 1055 J
1 kcal = 4182 J
1 $lb_f \cdot pie$ = 1.356 J
1 Btu = 252 cal

El peso de un cuerpo está definido como la fuerza ejercida en él, como resultado de la aceleración de la gravedad. Así

$$W = \frac{g}{g_c} m \tag{1-13}$$

donde *W* es el peso y g es la aceleración de la gravedad. Obsérvese que el peso de un cuerpo tiene las dimensiones de una fuerza. Ahora vemos por qué se idearon los sistemas 1 y 5 mencionados con anterioridad; 1 lb_m pesará 1 lb_f a nivel del mar, y 1 kg_m pesará 1 kg_f.

Las conversiones de temperatura se realizan con las fórmulas de costumbre

$$°F = \tfrac{9}{5}°C + 32$$
$$°R = °F + 459.69$$
$$K = °C + 273.16$$
$$°R = \tfrac{9}{5} K$$

Por desgracia, *todos* los sistemas de unidades antes mencionados son utilizados en diversos **lugares del mundo. Mientras que el sistema pie-libra fuerza, libra masa, se-**

gundo, grado, fahrenheit, Btu todavía sigue siendo ampliamente usado en los EUA., aquí existe un ímpetu cada vez más grande por instituir las unidades del SI (Systeme International d'Unités) como estándar mundial. En este sistema, las unidades fundamentales son metro, newton, kilogramo, masa, segundos y grados Celsius; una unidad de energía "térmica" no es utilizada; es decir, el joule (newton-metro) se convierte en la unidad de energía utilizada por todos. El watt (joules por segundo) es la unidad de potencia en este sistema. En el SI, las unidades estándar para la conductividad térmica serían

$$k \text{ en } \mathrm{W/m \cdot °C}$$

y el coeficiente de transferencia de calor por convección estará expresado como

$$h \text{ en } \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$$

Debido al rápido cambio de las unidades SI las utilizaremos en este texto como estándar, dando también entre paréntesis pasos intermedios y respuestas a problemas en el sistema Btu-libra masa. Un trabajador en transferencia de calor debe alcanzar cierta sensibilidad en ambos sistemas en el orden de las magnitudes. En el sistema SI el concepto g_c no se utiliza normalmente, y el newton está definido como

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad \textbf{(1-14)}$$

Aun así, debemos tener en cuenta la relación física entre fuerza y masa como se expresa en la segunda ley de movimiento de Newton.

El sistema SI también especifica los múltiplos estándar que han de usarse para conservar espacio cuando están expresados valores numéricos. Estos múltiplos se encuentran resumidos en la Tabla l-3. Los símbolos estándar para cantidades que se encuentran normalmente en la transferencia de calor están resumidos en la Tabla 1-4. Los factores de conversión se encuentran en el Apéndice A.

Tabla 1-3 Factores de multiplicación para unidades SI

Multiplicador	*Prefijo*	*Abreviación*
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-18}	ato	a

Tabla I-4 Cantidades SI utilizadas en transferencia de calor

Cantidad	*Abreviación de la unidad*
Fuerza	N (newton)
Masa	kg (kilogramo masa)
Tiempo	s (segundo)
Longitud	m (metro)
Temperatura	°C o K
Energía	J (joule)
Potencia	W (watt)
Conductividad térmica	W/m·°C
Coeficiente de transferencia de calor	W/m²·°C
Calor específico	J/kg·°C
Flujo de calor	W/m²

Ejemplo I-I

Una cara de una placa de cobre de 3 cm de espesor se mantiene a 400 °C y la otra cara a 100 "C. ¿Cuánto calor se transfiere a través de la placa?

Solución

De acuerdo con el Apéndice A la conductividad térmica para el cobre es 370 W/m·°C a '250 °C. De acuerdo con la ley de Fourier:

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dx}$$

por integración da

$$\frac{q}{A} = -k\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-(370)(100 - 400)}{3 \times 10^{-2}} = 3.7 \text{ MW/m}^2 \quad [1.172 \times 10^6 \text{ Btu/h·pie}^2]$$

Ejemplo I-2

Se sopla aire a 20 °C sobre una placa caliente de 50 X 75 cm que se mantiene a 250 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 25 W/m²·°C. Calcule la transferencia de calor.

Solución

De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton

$$\begin{aligned} q &= hA(T_w - T_\infty) \\ &= (25)(0.50)(0.75)(250 - 20) \\ &= 2.156 \text{ kW } [7356 \text{ Btu/h}] \end{aligned}$$

Ejemplo I-3

Suponiendo que la placa del Ej. I-2 está hecha con acero al carbón (1 %) de 2 cm de espesor y que se pierden 300 W de la superficie de la placa por radiación, calcule la temperatura interior de la placa.

Solución

El calor conducido a través de la placa debe ser igual a la suma de las pérdidas de calor por convección y radiación:

$$q_{cond} = q_{conv} + q_{rad}$$

$$-kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = 2.156 + 0.3 = 2.456 \text{ kW}$$

$$\Delta T = \frac{(-2456)(0.02)}{(0.5)(0.75)(43)} = -3.05 \text{ °C} \quad [-5.49 \text{ °F}]$$

donde el valor de k está tomado de la Tabla l-l. Por consiguiente, la temperatura interna de la placa es

$$T_i = 250 + 3.05 = 253.05 \text{ °C}$$

Ejemplo l-4

Se hace pasar una corriente eléctrica a través de un alambre de l mm de diámetro y 10 cm de largo. Se sumerge el alambre en agua líquida a presión atmosférica, y se incrementa la corriente hasta que el agua hierve. Para esta situación $h = 5000 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$, y la temperatura del agua será 100 °C. ¿Cuánta energía eléctrica se necesitará enviar al alambre para mantener su superficie a 114 °C?

Solución

La pérdida total por convección está expresada por la Ec. 1-8:

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

Para este problema, el área de la superficie del alambre es

$$A = \pi dL = \pi(1 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-2}) = 3.142 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Por tanto, la transferencia de calor es

$$q = (5000 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C})(3.142 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(114 - 100) = 21.99 \text{ W} \quad [75.03 \text{ Btu/h}]$$

y esto es igual a la potencia eléctrica que debe suministrarse.

Ejemplo l-5

Dos placas negras infinitas a 800 y 300 °C intercambia" calor por radiación. Calcule la transferencia de calor por unidad de área.

Solución

Para este problema se puede emplear la Ec. 1-9; por tanto, encontramos de inmediato

$$q/A = \sigma(T_1^4 \quad T_2^4)$$

$$= (5.669 \times 10^{-8})(1073^4 - 573^4)$$

$$= 69.03 \text{ kW/m}^2 \; 121{,}884 \text{ Btu/h}\cdot\text{pie}^2]$$

1-6 Resumen

Podemos resumir nuestros comentarios introductorios de manera muy simple. La transferencia de calor puede llevarse a cabo por medio de uno o más de los tres modos: conducción, convección y radiación. Se ha observado que el mecanismo físico de la convección está relacionado con la conducción de calor a través de una capa delgada de fluido adyacente a la superficie de transferencia de calor. Tanto en la conducción como en la convección se puede aplicar la ley de Fourier, aunque en el problema de convección se tienen que poner en juego la mecánica de fluidos a fin de establecer el gradiente de temperatura.

La transferencia de calor por radiación involucra un mecanismo físico diferente; el de propagación de la energía electromagnética. Para estudiar este tipo de transferencia de energía introducimos el concepto de un radiador ideal o cuerpo negro, el cual irradia energía a una rapidez proporcional a su.temperatura absoluta a la cuarta potencia.

Es fácil prever casos en los que estén presentes los tres tipos de transferencia de calor, como en la Fig. 1-9. En este caso, el calor conducido a través de la placa es extraído de la superficie por medio de una combinación de convección y radiación. Un balance de energía dará

$$-kA\left.\frac{dT}{dy}\right|_{\text{pared}} = hA(T_w - T_\infty) + F_\epsilon F_G \sigma A(T_w^4 - T_s^4)$$

donde T_s **= temperatura de los alrededores**
T_w **= temperatura de la superficie**
T_∞ **= temperatura del fluido**

Para aplicar la ciencia de la transferencia de calor a situaciones prácticas, se necesitará un conocimiento profundo de los tres tipos de transferencia de calor.

Problemas

1-1 Defina la conductividad térmica.

1-2 Defina el coeficiente de transferencia de calor por convección.

1-3 Discuta el mecanismo de la conductividad térmica en gases y sólidos.

1-4 Discuta el mecanismo de la convección de calor.

1-5 Si se conducen 3 kW a través de una sección de material aislante de 1.0 m^2 en sección transversal y 2.5 cm de grueso y se puede tomar la conductividad térmica como 0.2 $W/m\cdot{}^oC$, calcule la diferencia de temperatura a través del material.

1-6 Utilizando las definiciones básicas dadas en la Sec. 1-5 sobre las unidades y dimensiones, llegue a las expresiones para (a) convertir joules a unidades térmicas inglesas, (b) convertir dinas-centímetros a joules, (c) convertir unidades térmicas inglesas a calorías.

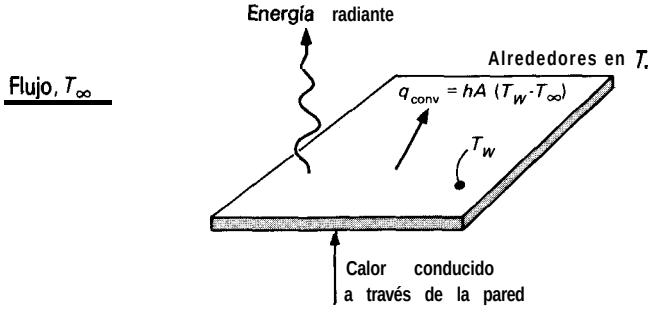


Fig. 1-9 Combinación de transferencia de calor por conducción, convección y radiación.

1-7 Se produce una diferencia de temperatura de 85 °C a través de una capa de fibra de vidrio de 13 cm de grueso. La conductividad térmica de la fibra de vidrio es de 0.035 W/m·°C. Calcule la transferencia de calor a través del material por hora, por unidad de área.

1-8 Se expone una pared plana a una temperatura ambiente de 38 "C. La pared está cubierta con una capa de aislante de 2.5 cm de grueso cuya cottductividad térmica es de 1.4 W/m·°C, y la temperatura de la pared en el interior del aislante es de 315 °C. La pared pierde calor en el ambiente por convección. Calcule el valor del coeficiente de la transferencia de calor por convección que debe ser mantenido en la superficie exterior del aislante para asegurar que la temperatura de la superficie exterior no excede 41 "C.

1-9 Dos superficies perfectamente negras están construidas de tal manera que toda la energía irradiada que deja una de las superficies a 800 °C llega hasta la otra superficie. La temperatura de esta otra superficie se mantiene a 250 °C. Calcule la transferencia de calor entre las superficies por hora y por unidad de área de la superficie mantenida a 800 "C.

1-10 Dos planos paralelos muy grandes que tienen condiciones de superficie que se aproximan bastante a las de un cuerpo negro son mantenidas a 1100 a 425 °C, respectivamente. Calcule la transferencia de calor por radiación entre los planos por unidades de tiempo y área de la superficie.

1-11 Una placa de acero de $\frac{1}{4}$ plg que tiene una conductividad térmica de Btu/h·pie·°F es expuesta a un flujo de calor radiante de 1500 Btu/h·pie² en un espacio vacío donde la transferencia de calor por convección es despreciable. Suponiendo que la temperatura de la superficie del acero expuesta a la energía irradiada es mantenida a 100 °F, ¿Cuál será la otra temperatura de la superficie si toda la energía que llega a la placa es transferida por conducción a través de ella?

1-12 Comenzando por la ecuación de conducción de calor tridimensional en coordenadas cartesianas (Ec. 1-3*a*), obtenga la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cilíndricas (Ec. 1-3*b*).

1-13 Considérese una pared calentada por convección por un lado, y enfriada por convección por el otro. Demuestre que la rapidez de transferencia de calor a través de la pared es

$$q = \frac{T_1 - T_2}{1/h_1A + \Delta x/kA + 1/h_2A}$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas de los fluidos a cada lado de la pared y h_1 y h_2 son los coeficientes de transferencia de calor correspondientes.

1-14 Un cono truncado de 30 cm de alto está hecho de aluminio. El diámetro de la parte superior es 7.5 cm y el diámetro de la base es 12.5 cm. La superficie inferior se mantiene a 93 °C y la superficie superior a 540 °C. La otra superficie está aislada. Suponiendo un flujo de calor unidimensional, ¿cuál es la rapidez de transferencia de calor en watts?

1-15 Las temperaturas en las caras de una pared plana de 15 cm de espesor son de 370 y 93 °C. La pared está construida de un vidrio especial que tiene las siguientes propiedades: k = 0.78 W/m·°C, ρ = 2700 kg/m³, c_p = 0.84 kJ/kg·°C. ¿Cuál es la transferencia de calor a través de la pared en condiciones de estado estacionario?

1-16 Una señora informa a un ingeniero que con frecuencia se siente más fresca durante el verano cuando se para frente a un refrigerador abierto. El ingeniero le contesta que sólo se está "imaginando cosas" ya que no existe un ventilador en el refrigerador que empuje el aire frío hacia ella. Se desencadena una animada discusión. ¿Qué partido tomaría usted y por qué?

1-17 Una señora informa a su esposo quien es ingeniero que "el agua caliente se congela con mayor rapidez que el agua fría". El considera que este argumento no tiene sentido. Ella contesta que ha tomado el tiempo del proceso de congelamiento de los cubos de hielo en el refrigerador de la casa y que de hecho ha encontrado que el agua caliente se congela más rápido. Como amigo, se le pide a usted que determine quién tiene razón. {Existe alguna explicación lógica para la observación de la señora?

l-18 En Texas, un salón de clase con aire acondicionado se mantiene a 72 °F en el verano. Los estudiantes asisten a clase en pantalones cortos, sandalias y camisas delgadas y se encuentran muy cómodos. En el mismo salón de clase durante el invierno, los mismos estudiantes, utilizan pantalones de lana, camisas de manga larga y suéteres y siguen sintiéndose igualmente cómodos y el salón es mantenido a 75 °F de temperatura. Suponiendo que la humedad no es el factor, explique esta aparente anomalía en la "temperatura de confort".

1-19 Un material superaislante que tiene una conductividad térmica de 2 x 10^{-4} W/m·°C se usa para aislar un tanque de nitrógeno líquido que es mantenido a − 320 °F; se requieren 85.8 Btu para vaporizar cada libra de masa de nitrógeno a esta temperatura. Suponiendo que el tanque es una esfera que tiene un diámetro interior (DI) de 2 pies, estímese la cantidad de nitrógeno vaporizado por día con un aislante de 1 .O plg de grueso y a una temperatura ambiente de 70 °F. Supóngase que la temperatura exterior del aislante es de 70 °F.

l-20 Calcúlese el intercambio de calor por radiación en un día, entre dos planos negros que tienen un área igual a la de la superficie de una esfera de 2 pies de diámetro, cuando los planos se mantienen a 320 y 70 °F. En relación con el Prob. 1-19, ¿qué indica este cálculo?

1-21 Suponiendo que en el Prob. 1-19 la transferencia de calor hacia la esfera ocurre por convección libre con un coeficiente de transferencia de calor de 2.7 W/m²·°C, calcule la diferencia de temperatura entre la superficie exterior de la esfera y el medio entorno.

1-22 Ordene los siguientes materiales de acuerdo con (a) la respuesta transiente y (b) la conducción de estado estacionario. Tomando el material de mayor orden, 'ordene los demás materiales en porcentajes del máximo: aluminio, cobre, plata, hierro, plomo, acero cromado (18% Cr, 8% Ni), magnesio. ¿Qué conclusión saca de este orden?

l-23 En el Artico un conducto de 50 cm de diámetro lleva petróleo caliente a una temperatura de 30 °C y está expuesto a una temperatura exterior de ·20 °C. El conducto está rodeado de un aislante en polvo de 5 cm de grueso y tiene una conductividad térmica de 7 mW/m·°C. El coeficiente de transferencia de calor por convección en el exterior del conducto es de 12 W/m²•°C. Estímese la pérdida de calor del conducto por metro de longitud.

1-24 Un flujo de calor por radiación solar de 700 W/m^2 es absorbido por una placa de metal que se encuentra perfectamente aislada en su parte posterior. El coeficiente de transferencia de calor por convección en la placa es de ll $W/m^2 \cdot °C$, y la temperatura del aire ambiente es de 30 °C. Calcúlese la temperatura de la placa en condiciones de equilibrio.

1-25 Se coloca una capa de 5 cm de asbesto de baja densidad entre dos placas a 100 y 200 °C. Calcúlese la transferencia de calor a través de la capa.

1-26 Escriba la ecuación simplificada para la conducción de calor para (a) flujo de calor unidimensional de estado estacionario en coordenadas cilíndricas en la dirección acimutal (ϕ) y (b) flujo de calor unidimensional de estado estacionario en coordenadas esféricas en la dirección (ϕ).

1-27 Dos placas negras grandes están separadas por un vacío. En el exterior de una de ellas hay un ambiente de convección de T = 80 °C y h = 100 $W/m^2 \cdot °C$, mientras que el exterior de la otra placa está expuesto a 20 °C y h = 15 $W/m^2 \cdot °C$. Hágase un balance de energía en el sistema y determine la temperatura de las placas. Para este problema $F_G = F_\epsilon = 1.0$.

1-28 Uno de los lados de una pared es mantenido a 100 °C, mientras el otro lado es expuesto a un medio de convección que tiene T = 10 °C y h = 10 $W/m^2 \cdot °C$. La pared tiene k = 1.6 $W/m \cdot °C$ y 40 cm de grueso. Calcule la rapidez de transferencia de calor a través de la pared.

1-29 Dos placas negras infinitas a 500 y 100 °C intercambian calor por radiación. Calcule la rapidez de transferencia de calor por unidad de área. Si se coloca otra placa perfectamente negra entre las placas a 500 y 100 °C, ¿en cuánto se reduce el calor transferido? ¿Cuál es la temperatura de la placa que se colocó en el centro?

Referencias

1 Glaser, P. E., 1. A. Black, and P. Doherty: Multilayer Insulation, *Mech. Eng.*, August 1965, p. 23.
2 Barron, R.: "Cryogenic Systems," McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
3 Dewitt, W. D., N. C. Gibbon, and R. L. Reid,: Multifoil Type Thermal Insulation, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 4, no. 5, suppl. pp. 263-271, 1968.

2
Conducción en Estado Estacionario -una Dimensión

2-l Introducción

Ahora deseamos examinar las aplicaciones de la ley de Fourier sobre conducción de calor, en cálculos de flujo de calor en algunos sistemas unidimensionales sencillos. Varias formas físicas diferentes pueden entrar en la categoría de sistemas unidimensionales: los sistemas cilíndricos y esféricos son unidimensionales cuando la temperatura en el cuerpo es sólo una función de la distancia radial y es independiente del ángulo acimutal o de la distancia axil. En algunos problemas bidimensionales el efecto de una segunda coordenada espacial puede ser tan pequeño que justifique su desprecio, y el problema de flujo de calor multidimensional puede aproximarse por medio de un análisis unidimensional. En estos casos se simplifican las ecuaciones diferenciales, y como resultado de esta simplificación se nos conduce a resoluciones mucho más sencillas.

2-2 La pared plana

Considérese primero la pared plana en donde se puede llevar a cabo una aplicación directa de la ley de Fourier (Ec. l-l). Integrando se obtiene

$$q = -\frac{kA}{\Delta x}(T_2 - T_1) \tag{2-1}$$

cuando la conductividad térmica se considera constante. El espesor de la pared es Ax, **y T_1 y T_2 son las temperaturas de la cara de la pared. Si la conductividad térmica varía con la temperatura de acuerdo con alguna relación lineal $k = k_0(1 + \beta T)$, la ecuación resultante para el flujo de calor es**

$$q = -\frac{k_0 A}{\Delta x}\left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}(T_2^2 - T_1^2)\right] \tag{2-2}$$

Si se encuentra presente más de un material, como ocurre en la pared multicapas que se muestra en la Fig. 2- 1, el análisis procederá de la siguiente manera: se muestran los gradientes de temperatura en los tres materiales, y el flujo de calor puede escribirse como

$$q = -k_A A \frac{T_2 - T_1}{\Delta x_A} = -k_B A \frac{T_3 - T_2}{\Delta x_B} = -k_C A \frac{T_4 - T_3}{\Delta x_C}$$

Obsérvese que el flujo de calor debe ser el mismo a través de todas las secciones.

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones, el flujo de calor se escribe

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\Delta x_A/k_A A + \Delta x_B/k_B A + \Delta x_C/k_C A} \tag{2-3}$$

En este punto retrocederemos un poco en nuestro desarrollo para introducir un punto de vista conceptual diferente para la ley de Fourier. La rapidez de transferencia de calor puede considerarse como un flujo y a la combinación de conductividad térmica, espesor del material y área, **como** una resistencia a este flujo. La temperatura es la función de potencial o motriz para el flujo de calor, y la ecuación de Fourier puede escribirse como

$$\text{Flujo de calor} = \frac{\text{diferencia de potencial térmico}}{\text{resistencia térmica}} \tag{2-4}$$

una relación igual a la ley de Ohm en la teoría de circuitos eléctricos. En la Ec. 2-l la resistencia térmica es $\Delta x/kA$, y en la Ec. 2-3 es la suma de los tres términos en el denominador. Esperaríamos esta situación en la Ec. 2-3 ya que las tres paredes en contacto actúan como tres resistencias térmicas en serie. En la Fig. 2-1*b* se muestra el circuito eléctrico equivalente.

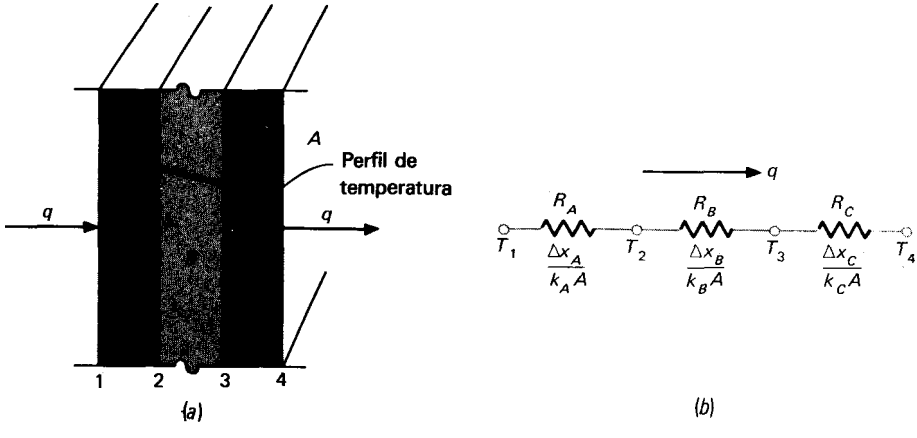


Fig. 2-l Transferencia de calor unidimensional a través de una pared compuesta y análogo eléctrico.

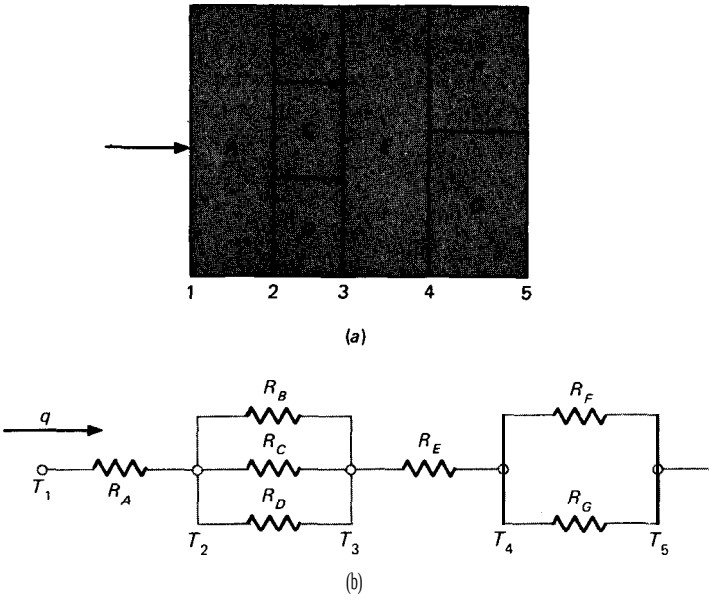


Fig. 2-2 Transferencia de calor unidimensional en serie o en paralelo a -través de una pared compuesta y análogo eléctrico.

La analogía eléctrica puede usarse para resolver problemas más complejos que involucran las resistencias térmicas en serie y en paralelo. En la Fig. 2-2 se muestra un problema típico y su circuito eléctrico análogo. La ecuación de flujo de calor unidimensional para este tipo de problemas puede escribirse como

$$q = \frac{\Delta T_{total}}{\Sigma R_t} \tag{2-5}$$

en donde las R_t son las resistencias térmicas de los diferentes materiales.

Es deseable mencionar que en algunos sistemas como los de la Fig. 2-2 puede ocurrir un flujo de calor bidimensional si la conductividad-térmica de los materiales *B*, C y *D* difiere de manera apreciable. En estos casos, para efectuar la resolución se deberán emplear otras técnicas.

2-3 Aislamiento y valores *R*

En el Cap. 1 dijimos que en el Apéndice A se daba la conductividad térmica de algunos de los materiales aislantes. En la clasificación del rendimiento de los aislantes, es una práctica común en la industria de la construcción utilizar un término llamado valor *R*, que se define como

$$R = \frac{\Delta T}{q/A} \tag{2-6}$$

Obsérvese que éste difiere del concepto de resistencia térmica tratado anteriormente, en que aquí se utiliza un flujo de calor *por unidad de área.*

En este punto es útil clasificar los materiales aislantes en términos de su aplicación y los intervalos de temperatura permitida. La Tabla 2-1 nos proporciona esta información y podrá utilizarse como guía para la selección de materiales aislantes.

2-4 Sistemas radiales-cilindros

Considérese un cilindro largo con un radio interno r_i, un radio externo r_o y una longitud L, tal como el que se muestra en la Fig. 2-3. Exponemos este cilindro a una dife-

Tabla 2-1 Tipos de aislantes y aplicaciones

Tipo	Intervalo de Temperatura, °C	Conductividad térmica mW/m·°C	Densidad, kg/m³	Aplicación
1 Superaislante linde evacuado	−240–1100	0.0015-0.72	Variable	Muchas
2 Espuma de poliuretano	− 180-150	16-20	25-48	Tubería caliente y fría
3 Espuma de poliuretano	-170-110	16-20	32	Tanques
4 Bloques de vidrio celular	-200-200	29-108	110-150	Tanques y tubería
5 Hojas de fibra de vidrio para envolver	-80-290	22-78	10-50	Tubería y accesorios
6 Hojas de fibras de vidrio	-170-230	25-86	10-50	Tanques y equipo
7 Fibra de vidrio premoldeada	-50-230	32-55	10-50	Tubería
8 Hojas elastoméricas	.-40-100	3639	70-100	Tanques
9 Panales de fibra de vidrio	60-370	30-55	10-50	Tubería y accesorios
10 Elastómero premoldeado	-40-100	36-39	70-100	Tubería y accesorios
ll Fibra de vidrio con revestimiento de barrera de vapor	-5-70	29-45	10–32	Líneas de refrigeración
12 Fibra de vidrio sin chaqueta de barrera de vapor	a 250	29-45	24-48	Tuberías calientes
13 Tablero de fibra de vidrio	20-450	33-52	25-100	Calderas, tanques, cambiadores de calor
14 Bloques y tableros de vidrio celular	20-500	29-108	110-150	Tubería caliente
15 Bloques y tableros de espuma de poliuretano	100-150	16-20	24-65	Tubería
16 Fibra mineral premoldeada	a 650	35-91	125-160	Tubería caliente
17 Hojas de fibra mineral	a 750	37-81	125	Tubería caliente
18 Bloques de lana mineral	450– 1000	52-130	175-290	Tubería caliente
19 Bloques, tableros de silicato de calcio	230– 1000	32-85	100– 160	Tubería caliente, calderas, revestimientos de chimeneas
'20 Bloques de fibra mineral	a 1100	52-130	210	Calderas y tanques

rencia de temperaturas $T_i - T_o$ y preguntamos cuál será el flujo de calor. Se puede suponer que el calor fluye en una dirección radial, de manera que r es la única coordenada espacial necesaria para especificar el sistema. Una vez más se utiliza la ley de Fourier introduciendo la relación de área adecuada. El área para el flujo de calor en el sistema cilíndrico es

$$A_r = 2\pi rL$$

así la ley de Fourier se escribe

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr}$$

0

$$q_r = -2\pi krL \frac{dT}{dr} \tag{2-7}$$

con condiciones de frontera

$$T = T_i \qquad \text{enr} = r_i$$
$$T = T_o \qquad enr = r_o$$

La solución a la Ec. 2-7 es

$$q = \frac{2\pi kL(T_i - T_o)}{\ln (r_o/r_i)} \tag{2-8}$$

y en este caso la resistencia térmica es

$$R_t = \frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL}$$

El concepto de resistencia térmica puede usarse para paredes cilíndricas multicapas tal como se usó para paredes planas. Para el sistema de tres capas que se muestra en la Fig. 2-4 la solución es

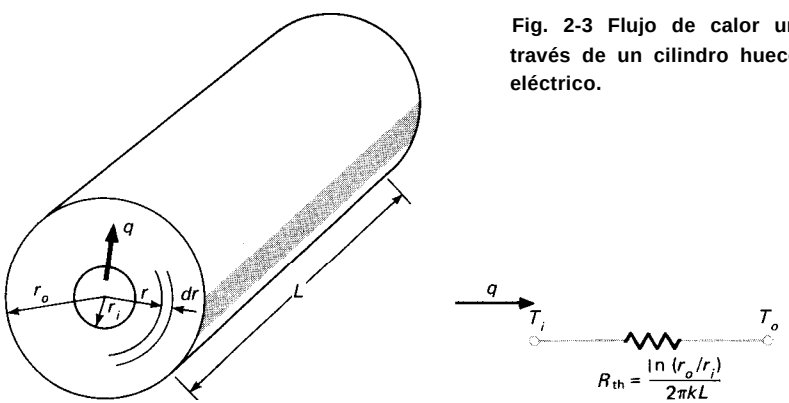


Fig. 2-3 Flujo de calor unidimensional a través de un cilindro hueco y su análogo eléctrico.

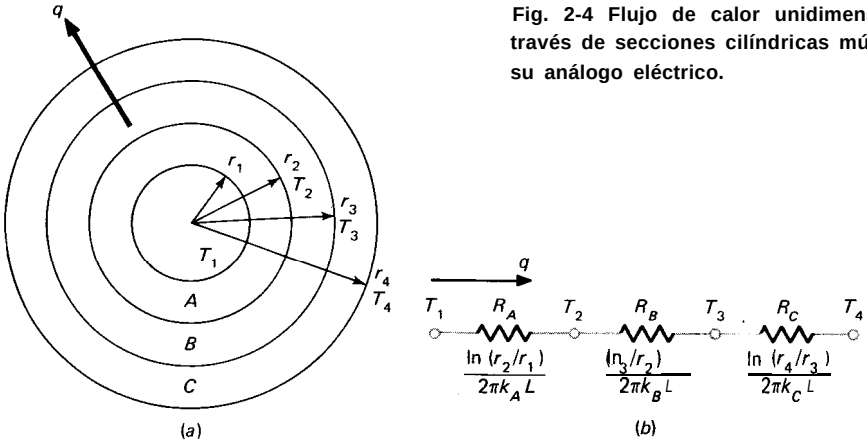


Fig. 2-4 Flujo de calor unidimensional a través de secciones cilíndricas múltiples y su análogo eléctrico.

$$q = \frac{2\pi L(T_1 \quad T,)}{\ln (r_2/r_1)/k_A + \ln (r_3/r_2)/k_B + \ln (r_4/r_3)/k_C} \tag{2-9}$$

En la Fig. 2-46 se muestra el circuito térmico.

Los sistemas esféricos también pueden tratarse como unidimensionales, cuando la temperatura es únicamente una función del radio. Entonces el flujo de calor es

$$q = \frac{4\pi k(T_i - T_o)}{1/r_i - 1/r_o} \tag{2-10}$$

Se deja como ejercicio la derivación de la Ec. 2-10.

Ejemplo 2-l

Una pared exterior de una casa puede aproximarse por medio de una capa de 4 plg de ladrillo común [k = 0.7 W/m·°C] seguida de una capa de yeso [k = 0.48 W/m·°C]. ¿Qué espesor de aislante de lana mineral de baja densidad [k = 0.065 W/m·°C] deberá añadirse para reducir la pérdida de calor (o ganarlo) a través de la pared en un 80%?

Solución

La pérdida de calor total se expresa por

$$q = \frac{\mathbf{A}\mathbf{T}}{\Sigma R_t}$$

Como en el aislante de lana mineral la pérdida de calor sólo será el 20% (80% de reducción), de la que había antes del uso del aislante

$$\frac{q \text{ con aislante}}{q \text{ sin aislante}} = 0.2 = \frac{\Sigma R_t \text{ sin aislante}}{\Sigma R_t \text{ con aislante}}$$

Tenemos para el ladrillo y el yeso, por unidad de área,

$$R_b = \frac{\Delta x}{k} \quad \frac{(4X0.0254)}{0.7} = 0.145 \ \text{m}^2\ ^\circ\text{C/W}$$

$$R_p = \frac{\Delta x}{k} = \frac{(1.5)(0.0254)}{0.48} = 0.079 \ \text{m}^2\ ^\circ\text{C/W}$$

de manera que la resistencia térmica sin aislante es

$$R = 0.145 + 0.079 = 0.224 \ \text{m}^2\ ^\circ\text{C/W}$$

$$\text{Así: } R \text{ con aislante} = \frac{0.224}{0.2} = 1.122 \ \text{m}^{2.\circ}\text{C/W}$$

y esto representa la suma de nuestros valores previos y la resistencia de la lana mineral

$$1.122 = 0.224 + R_{rw}$$

$$R_{rw} = 0.898 = \frac{\Delta x}{k} = \frac{\Delta x}{0.065}$$

de modo que: $\Delta x_{rw} = 0.0584$ m = 2.30 plg

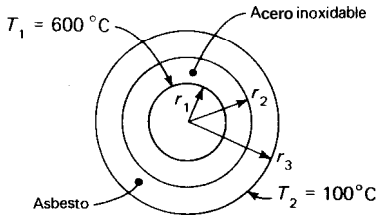
Ejemplo 2-2

Un tubo de acero inoxidable de pared gruesa [18% Cr, 8% Ni, k = 19 $\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$] con 2 cm de diámetro interno y 4 cm de diámetro externo, está cubierto con una capa aislante de asbesto de 3 cm [k = 0.2 $\text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$]. Si la temperatura de la pared interna del tubo se mantiene a 600 °C y el exterior del aislante de 100 °C, calcule la pérdida de calor por metro de longitud.

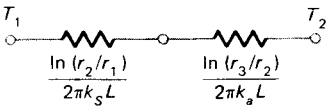
Solución

La figura a continuación muestra el sistema térmico para este problema. El flujo de calor se expresa por:

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\ln (r_2/r_1)/k_s + \ln (r_3/r_2)/k_a} = \frac{2\pi(600 - 100)}{(\ln 2)/19 + (\ln \frac{5}{2})/0.2} = 680 \ \text{W/m}$$



Ejemplo 2-2



Condiciones de frontera de convección

En el Cap. 1 vimos que la transferencia de calor puede calcularse a partir de

$$q_{\text{conv}} = hA(T_w - T_\infty)$$

también podemos formular una analogía eléctrica para el proceso de convección re-escribiendo la ecuación como

$$4_{\text{conv}} = \frac{T_w - T_\infty}{1/hA} \tag{2-11}$$

en donde ahora el término $1/hA$ se convierte en la resistencia de convección.

2-5 El coeficiente de transferencia de calor total

Considérese que la pared plana que se mostró en la Fig. 2-5 se encuentra expuesta a un fluido caliente A de un lado y un fluido B más frío en el otro. La transferencia de calor se expresa por

$$q = h_1A(T_A - T_1) = \frac{kA}{\Delta x}(T_1 - T_2) = h_2A(T_2 - T_B)$$

El proceso de transferencia de calor puede expresarse por la red de resistencias de la Fig. 2-56, y la transferencia de calor total se calcula como la razón de la diferencia de temperatura total a la suma de las resistencias térmicas

$$q = \frac{T_A - T_B}{1/h_1A + \Delta x/kA + 1/h_2A} \tag{2-12}$$

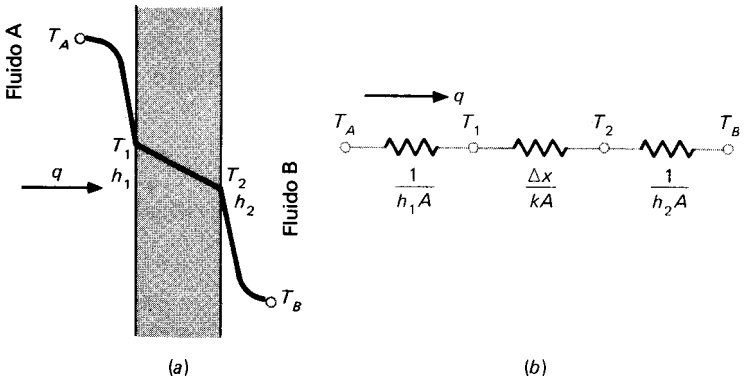


Fig. 2-5 Transferencia de calor total a través de una pared plana.

Obsérvese que se usa el valor $1/hA$ para representar la resistencia de convección. La transferencia de calor total por conducción y convección combinadas, con frecuencia se expresa en términos de un coeficiente de transferencia de calor total U, definido por la relación

$$q = UA\,\Delta T_{\text{total}} \tag{2-13}$$

en donde A es cierta área adecuada para el flujo de calor. De acuerdo con la Ec. 2-12, el coeficiente de transferencia total sería

$$U = \frac{1}{1/h_1 + \text{Axlk} + 1/h_2}$$

Para un cilindro hueco expuesto a un medio de convección en sus superficies interior y exterior, la analogía de resistencia eléctrica aparecería tal como en la Fig. 2-6, en donde, una vez más, T_A y T_B son las temperaturas de los dos fluidos.
Obsérvese que en este caso, el área para convección no es la misma para ambos fluidos; estas áreas dependen del diámetro interno del tubo y del espesor de la pared. En este caso la transferencia de calor total se expresaría por

$$q = \frac{T_A - T_B}{\dfrac{1}{h_i A_i} + \dfrac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{1}{h_o A_o}} \tag{2-14}$$

de acuerdo con la red térmica que se muestra en la Fig. 2-6. Los términos A_i y A_o representan las áreas de superficie interna y externa del tubo interior. El coeficiente de transferencia de calor total puede basarse en el área interior o exterior del tubo. En, consecuencia,

$$U_i = \frac{1}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{A_i \ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{A_i}{A_o}\dfrac{1}{h_o}} \tag{2-15}$$

$$U_o = \frac{1}{\dfrac{A_o}{A_i}\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{A_o \ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{1}{h_o}} \tag{2-16}$$

Los cálculos para los coeficientes de transferencia de calor por convección para ser usados en el coeficiente de transferencia de calor total, se realizan de acuerdo con los métodos descritos en capítulos posteriores. En la Tabla 10-l se dan algunos valores típicos del coeficiente de transferencia de calor total.

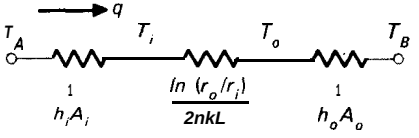


Fig. 2-6 Analogía de resistencia para un cilindro hueco con fronteras de convección.

2-6 Espesor crítico del aislante

Consideremos una capa de aislante que podría instalarse alrededor de una tubería circular, como se muestra en la Fig. 2-7. La temperatura interior del aislante se fija en T_i, y la superficie exterior está expuesta a un medio de convección en T_∞. A causa de la red térmica, la transferencia de calor es

$$q = \frac{2\pi L(T_i - T_\infty)}{\dfrac{\ln (r_o/r_i)}{k} \dfrac{1}{r_o h}} \tag{2-17}$$

Ahora transformemos esta expresión para determinar el radio externo del aislante r_o que hará máxima la transferencia de calor. La condición de máximo es

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = \frac{-2\pi L(T_i - T_\infty)\left(\dfrac{1}{kr_o} - \dfrac{1}{hr_o^2}\right)}{\left[\dfrac{\ln (r_o/r_i)}{k} + \dfrac{1}{r_o h}\right]^2}$$

que da como resultado

$$r_o = \frac{k}{h} \tag{2-18}$$

La Ec. 2-18 expresa el concepto de radio crítico de aislamiento. Si el radio externo es menor al valor expresado por esta ecuación, entonces la transferencia de calor se incrementará adicionando más aislante. Para radios externos mayores al valor crítico, un incremento en el espesor del aislante provocará una reducción en la transferencia de calor. El concepto central es que para valores de h suficientemente pequeños, la pérdida de calor por convección puede en realidad incrementarse con la adición de aislante debido al incremento en área de superficie.

Ejemplo 2-3

Calcule el radio crítico de aislamiento para asbesto [k = 0.17 W/m·°C] que rodea a una tubería y que está expuesto al aire de un cuarto a 20 °C con h = 5.0 W/m²·°C. Calcule la pérdida de calor de una tubería de 5.0 cm de diámetro a 200 °C, cuando se encuentra cubierta con el radio crítico de aislamiento y sin el aislante.

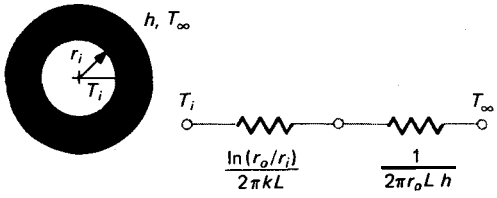


Fig. 2-7 Espesor crítico del aislante.

Solución

De la Ec. 2-18 calculamos r_o como

$$r_o = \frac{k}{h} = \frac{0.17}{3.0} = 0.0567 \text{ m} = 5.67 \text{ cm}$$

El radio interno del aislante es $5.0/2 = 2.5$ cm, de manera que la transferencia de calor se calcula de la Ec. 2-17 como

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(200 - 20)}{\dfrac{\ln(5.67/2.5)}{0.17} + \dfrac{1}{(0.0567)(3.0)}} = 105.7 \text{ W/m}$$

Sin aislante, la convección de la superficie externa de la tubería es

$$\frac{q}{L} = h(2\pi r)(T_i - T_o) = (3.0)(2\pi)(0.025)(200 - 20) = 84.8 \text{ W/m}$$

Por tanto, la adición de 3.17 cm (5.67 - 2.5) de aislante realmente *incrementa* la transferencia de calor en un 25%.

2-7 Sistemas con fuentes de calor

Algunas aplicaciones interesantes de los principios de la transferencia de calor se encuentran relacionadas con sistemas en los que el calor puede generarse en su interior. Los reactores nucleares son un ejemplo: los conductores eléctricos y sistemas de reacción química son otros. En este momento nos limitaremos a los sistemas unidimensionales, 0 más específicamente, a sistemas en los que la temperatura es una función de sólo una coordenada espacial.

Pared plana con fuentes de calor

Considérese la pared plana con fuentes de calor distribuidas en forma uniforme, que se muestra en la Fig. 2-8. El espesor de la pared en la dirección x es $2L$, y se supone que las dimensiones en las otras direcciones son lo bastante grandes como para que el flujo de calor pueda considerarse unidimensional. El calor generado por unidad de volumen es $\dot{q}$, y suponemos que la conductividad térmica no varía con la temperatura. Estas condiciones pueden producirse en una situación práctica haciendo pasar una corriente a través de un material conductor eléctrico. A partir del Cap. 1, la ecuación diferencial que gobierna el flujo de calor es

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{2-19}$$

Para las condiciones de frontera especificamos las temperaturas en ambas caras de la pared, es decir,

$$T = T_w \qquad \text{en } x = \pm L \tag{2-20}$$

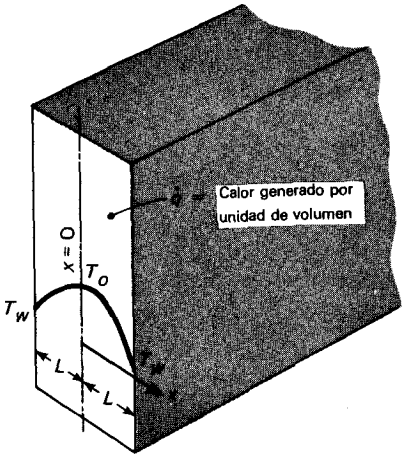


Fig. 2-8 Dibujo que ilustra el problema de conducción unidimensional con generación de calor.

La solución general a la Ec. 2-19 es

$$T = -\frac{q}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \tag{2-21}$$

Como la temperatura debe ser la misma en ambas caras de la pared, C_1 debe ser cero. La temperatura en la mitad del plano se indica por T_o y a partir de la Ec. 2-21 tenemos

$$T_0 = C_2$$

La distribución de la temperatura es por consiguiente

$$T - T_0 = -\frac{q}{2k}x^2 \tag{2-22a}$$

$$\frac{T - T_0}{T_w - T_0} = \frac{x^2}{0L} \tag{2-22 b}$$

una distribución parabólica. A través de un balance de energía puede obtenerse una expresión para la temperatura T_o en la mitad del plano. En condiciones de estado estacionario el calor total generado deberá ser igual a la pérdida de calor en las caras. Así

$$2\left(-kA\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L}\right) = \dot{q}A\,2L$$

en donde A es el área de la sección transversal de la placa. El gradiente de temperatura en la pared se obtiene diferenciando la Ec. 2-226:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L} = (T_w - T_0)\left(\frac{2x}{L^2}\right)\Big]_{x=L} = (T_w - T_0)\frac{2}{L}$$

Entonces $$-k(T_w - T_0)\frac{2}{L} = \dot{q}L$$

y $$T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_w \tag{2-23}$$

La ecuación para la distribución de la temperatura también podría escribirse en la forma

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \frac{x^2}{L^2} \tag{2-22c}$$

2-8 Cilindro con fuentes de calor

Considérese un cilindro de radio R con fuentes de calor distribuidas uniformemente y con conductividad térmica constante. Si el cilindro es lo bastante largo como para que la temperatura pueda considerarse una función únicamente del radio, la ecuación diferencial adecuada puede obtenerse despreciando los términos axil, acimutal y temporal en la Ec. 1-3*b*.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{2-24}$$

Las condiciones de frontera son

$$T = T_w \qquad \text{en } r = R$$

y el calor generado es igual al calor perdido en la superficie:

$$\dot{q}\pi R^2 L = -k2\pi RL\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}$$

Como la función de temperatura debe ser continua en el centro del cilindro, podríamos especificar que

$$\frac{dT}{dr} = 0 \qquad enr = 0$$

Sin embargo, no será necesario utilizar esta condición ya que será satisfecha automáticamente cuando las dos condiciones de frontera sean satisfechas.

Reescribimos la Ec. 2-24

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{a1^{m}}{dr} = \frac{-\dot{q}r}{k}$$

y observamos que

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

Entonces la integración produce

$$r\frac{dT}{dr} = \frac{-\dot{q}r^2}{2k} + C_1$$

Y

$$T = \frac{-\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_1$$

De la segunda condición de frontera expresada arriba,

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = \frac{-\dot{q}R}{2k} = \frac{-\dot{q}R}{2kR} + \frac{C_1}{2kR}$$

Así

$$C_1 = 0$$

De la primera condición de frontera,

$$T = T_w = \frac{-\dot{q}R^2}{4k} + C_2 \qquad \text{a tr} = R$$

de modo que

$$C_2 = T_w + \frac{\dot{q}R^2}{4k}$$

La solución final para la distribución de temperatura es entonces

$$T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k}(R^2 - r^2) \tag{2-25a}$$

o, en forma adimensional,

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{2-25b}$$

donde T_o es la temperatura en $r = 0$ y se expresa por

$$T_0 = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_w \tag{2-26}$$

Se deja como ejercicio demostrar que el gradiente de temperatura en $r = 0$ es cero.

Para un cilindro hueco con fuentes de calor distribuidas uniformemente, las condiciones de frontera adecuadas serían

$$T = T_i \text{ en } r = r_i \text{ (superficie interna)}$$
$$T = T_0 \text{ en } r = r_0 \text{ (superficie externa)}$$

La solución general sigue siendo

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

La aplicación de las nuevas condiciones de frontera da

$$T - T_0 = \frac{\dot{q}}{4k}(r_o^2 - r^2) + C, \ln\frac{r}{r_o} \qquad (2\text{-}27)$$

en donde la constante C_1 se expresa por

$$C_1 = \frac{T_i - T_0 + \dot{q}(r_i^2 - r_o^2)/4k}{\ln(r_i/r_o)} \qquad (2\text{-}28)$$

Ejemplo 2-4

Se hace pasar una corriente de 200 A a través de un alambre de acero inoxidable [k = 19 W/m·°C] de 3 mm de diámetro. La resistencia del acero se puede tomar como de 70 $\mu\Omega$·cm, y la longitud del alambre es de 1 m. El cable está sumergido en un líquido a 110 °C y opera con un coeficiente de transferencia de calor por convección de 4 W/m²·°C. Calcule la temperatura del centro del alambre.

Solución

Toda la temperatura generada en el alambre deberá disiparse por convección hacia el líquido:

$$P = I^2R = q = hA(T_w - T_\infty) \qquad (a)$$

La resistencia del alambre se calcula a partir de

$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{(70 \times 10^{-6})(100)}{\pi(0.15)^2} = 0.099\ \Omega$$

en donde ρ es la resistividad del alambre. El área de superficie del alambre es πdL; por tanto de la Ec. (a):

$$(200)^2(0.099) = 4000\pi(3 \times 10^{-3})(1)(T_w - 110) = 3960 \text{ W}$$

Y

$$T_w = 215°\text{C} \ [419°\text{F}]$$

El calor generado por unidad de volumen q se calcula a partir de

$$P = \dot{q}V = \dot{q}\pi r^2 L$$

de modo que

$$q = \frac{3960}{\pi(1.5 \times 10^{-3})^2(1)} = 560.2 \text{ MW/m}^3 \ [5.41 \times 10^7 \text{ Btu/h·pie}^3]$$

Finalmente, la temperatura del centro del alambre se calcula de la Ec. 2-26:

$$T_0 = \frac{\dot{q}r_o^2}{4k} + T_w = \frac{(5.602 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-3})^2}{(4)(19)} + 215 = 231.6 \ °\text{C} \quad [449 \ °\text{F}]$$

2-9 Sistemas de conducción-convección

Con frecuencia el calor conducido a través de un cuerpo se debe eliminar (o transferirse) por medio de algún proceso de convección. Por ejemplo, el calor que se pierde

por conducción a través de la pared de un horno, deberá disiparse hacia el ambiente por medio de convección. En aplicaciones de cambiadores de calor se podría utilizar un arreglo de aletas para eliminar calor de un líquido caliente. La transferencia de calor hacia el tubo con aletas se realiza a través del material y finalmente se disipa en el ambiente por convección. Es evidente, que desde un punto de vista práctico es muy importante un análisis combinado de conducción-convección.

Diferimos al Cap. 10 parte de nuestro análisis de los sistemas de conducción-convección en cambiadores de calor. Por el momento nos gustaría examinar algunos problemas sencillos sobre superficies extendidas. Considérese una aleta unidimensional expuesta a un líquido circundante a una temperatura T_∞ tal como se ve en la Fig. 2-9. La temperatura de la base de la aleta es T_o. Abordamos el problema realizando un balance de energía en un elemento de la aleta cuyo espesor es dx como lo muestra la figura. Así

Energía que entra por la cara izquierda = energía que sale de la cara derecha + energía perdida por convección

Recuérdese que la ecuación de definición para el coeficiente de transferencia de calor por convección es

$$q = hA(T_w - T_\infty) \tag{2-29}$$

en donde el área en esta ecuación es el área de la superficie para convección. Ya sea A el área de sección transversal de la aleta y P el perímetro. Entonces las cantidades de energía son

Energía que entra a la cara izquierda $= q_x = -kA\dfrac{dT}{dx}$

Energía que sale de la cara derecha $= q_{x+dx} = -kA\dfrac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} = -kA\left(\dfrac{dT}{dx} + \dfrac{d^2T}{dx^2}dx\right)$

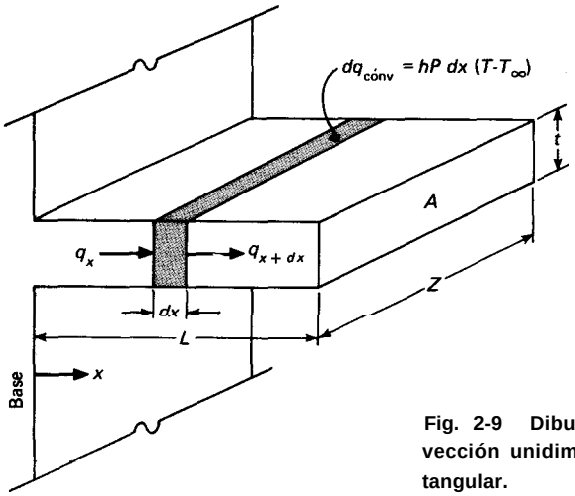


Fig. 2-9 Dibujo que ejemplifica conducción y convección unidimensionales a través de una aleta rectangular.

Energía perdida por convección = $hP\ dx(T - T_\infty)$

Aquí se observa que el área de la superficie diferencial por convección es el producto del perímetro de la aleta por la longitud diferencial dx. Cuando combinamos las cantidades, el balance de energía produce

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \qquad (2\text{-}30a)$$

Sea $\theta = T - T_\infty$. Así la Ec. 2-30a se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\theta = 0 \qquad (2\text{-}30b)$$

Una condición de frontera es

$$\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty \qquad x = 0$$

La otra condición de frontera depende de la situación física. Se pueden considerar varios casos:

CASO 1 La aleta es muy larga y la temperatura en el extremo de la aleta es esencialmente la del líquido que la rodea.

CASO 2 La aleta tiene una longitud finita y pierde calor por convección por su extremo.

CASO 3 El extremo de la aleta se encuentra aislado de manera que $dT/dx = 0$.

Si hacemos $m^2 = hP/kA$, la solución general para la Ec. 2-30b puede escribirse

$$\theta = C_1e^{-mx} + C_2e^{mx} \qquad (2\text{-}31)$$

Para el Caso 1 las condiciones de frontera son

$$\theta = \theta_0 \qquad \text{en } x = 0$$
$$\theta = 0 \qquad \text{en } x = \infty$$

y la solución será

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \qquad (2\text{-}32)$$

Para el Caso 3 las condiciones de frontera son

$$\theta = \theta_0 \qquad \text{en } x = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \qquad \text{en } x = L$$

Así

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$
$$0 = m(-C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL})$$

Resolviendo para las constantes C_1 y C_2, obtenemos

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} \tag{2-33a}$$

$$= \frac{\cosh [m(L - x)]}{\cosh mL} \tag{2-33b}$$

Las funciones hiperbólicas se definen como

$$\text{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La solución para el Caso 2 es algebraicamente más complicada, y se la dejamos al lector como ejercicio.

Utilizando las ecuaciones para las distribuciones de la temperatura, se podrá calcular con bastante facilidad el calor perdido por la aleta ya que

$$q = -kA \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

Para integrar el calor perdido por convección se podría utilizar un método alternativo:

$$q = \int_0^L hP(T - T_\infty)\, dx = \int_0^L hP\theta\, dx$$

Sin embargo, en la mayor parte de los casos es más fácil aplicar la primera ecuación. Para el Caso 1.

$$q = -kA(-m\theta_0 e^{-m(0)}) = \sqrt{hPkA}\, \theta_0 \tag{2-34}$$

Para el Caso 3,

$$q = -kA\theta_0 m \left(\frac{1}{1 + e^{-2mL}} - \frac{1}{1 + e^{+2mL}}\right)$$

$$= \sqrt{hPkA}\, \theta_0 \tanh mL \tag{2-35}$$

En el desarrollo precedente supusimos que los gradientes de temperatura importantes sólo ocurren en la dirección x. Esta suposición quedará satisfecha si la aleta es lo bastante delgada. Para la mayor parte de las aletas que presentan un interés práctico, el error que se introduce con esta suposición es menor al 1%. La exactitud global de los cálculos en aletas de interés práctico está casi siempre limitada por ambigüedades en los valores del coeficiente de convección h. Vale la pena observar que el coeficiente de convección pocas veces es uniforme en toda la superficie, como se supuso anteriormente. Si se observa un comportamiento muy irregular deben emplearse técnicas numéricas de diferencia finita para resolver el problema. En el Cap. 3 se presentan estas técnicas.

2-10 Aletas

En el desarrollo precedente derivamos relaciones para la transferencia de calor en una barra o aleta con área de sección transversal uniforme, que sobresale de una pared plana. En aplicaciones prácticas, el área de la sección transversal de las aletas puede variar y tal vez se encuentre unida a superficies circulares. En cualquiera de los casos, en la derivación deberá considerarse el área como una variable, y tanto la resolución de la ecuación diferencial básica como las técnicas matemáticas serán más tediosas. Sólo presentaremos los resultados de las situaciones más complejas. Para información sobre los métodos matemáticos utilizados en la obtención de la solución remitimos al lector a la Ref. 1.

A fin de mostrar la eficacia de una aleta en la transferencia de una cantidad de calor dada, se define un nuevo parámetro llamado eficiencia de aleta

$$\text{Eficiencia de aleta} = \frac{\text{calor real transferido}}{\text{calor que sería transferido si toda el área de la aleta se encontrara a temperatura de base}} = \eta_f$$

Para el Caso 3 antes mencionado, la eficiencia de la aleta será

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hPkA}\,\theta_0 \tanh mL}{hPL\theta_0} = \frac{\tanh mL}{mL} \tag{2-36}$$

Se supuso que las aletas del estudio precedente, eran lo bastante profundas como para que el flujo de calor pudiera considerarse unidimensional. La expresión para mL puede escribirse

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}L = \sqrt{\frac{h(2z + 2t)}{kzt}}L$$

en donde z es la profundidad de la aleta y t el espesor. Ahora bien, si la aleta tiene una profundidad suficiente, el término 2x será grande comparado con $2t$. Por consiguiente,

$$mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}}L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}L$$

Multiplicando numerador y denominador por $L^{1/2}$ da

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kLt}} L^{3/2}$$

Lt es el área de perfil de la aleta, la cual definimos como

$$A_m = Lt$$

de modo que

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kA_m}} L^{3/2} \tag{2-37}$$

En consecuencia, podemos usar la expresión en la Ec. 2-37 para calcular la eficiencia de una aleta con punta aislada tal como se da en la Ec. Z-36.

Harper y Brown [2] han mostrado que la solución del Caso 2 antes mencionado puede expresarse de la misma manera que la Ec. 2-36, cuando la longitud de la aleta se extiende por la mitad del espesor de la aleta. Se utiliza entonces una longitud corregida L_c en todas las ecuaciones que se utilicen para el caso de una aleta con punta aislada. Así

$$L_c = L + \frac{t}{2} \tag{2-38}$$

El error que resulta de esta aproximación será menor del 8% cuando

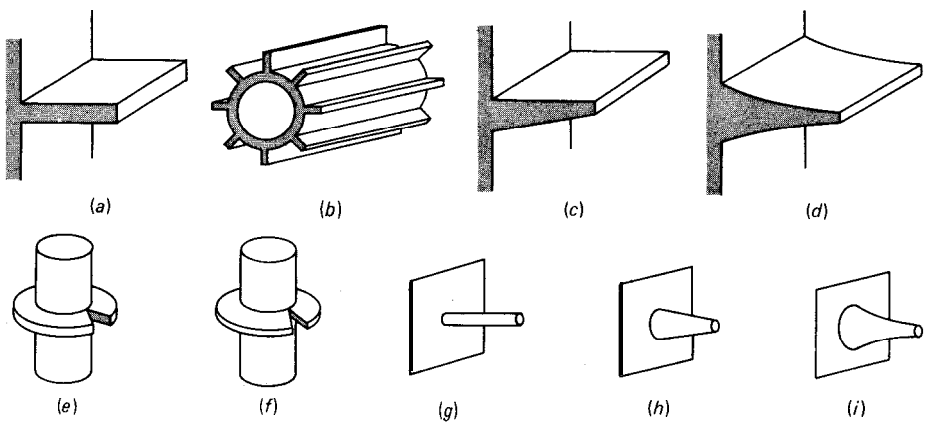


Fig. 2-10 Diversos tipos de superficies como aletas, según Kern y Kraus [8]. (a) Aleta longitudinal con perfil rectangular; (b) tubo cilíndrico equipado con aletas de perfil rectangular; (c) aleta longitudinal con perfil trapezoidal; (d) aleta longitudinal con perfil parabólico; (e) tubo cilíndrico equipado con aleta radial de perfil rectangular; (f) tubo cilíndrico equipado con aleta radial de perfil cónico truncado; (g) espina cilíndrica; (h) espina cónica truncada; (i) espina hiperbólica.

$$\left(\frac{ht}{2k}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \tag{2-39}$$

En la Fig. 2-10 se muestran ejemplos de otros tipos de aletas, de acuerdo con la Ref. 8. La Fig. 2-11 presenta una comparación de la eficiencia entre una aleta triangular y una rectangular que corresponden al Caso 2. La Fig. 2-12 muestra la eficiencia de las aletas circunferenciales con área de sección transversal rectangular. Obsérvese que en las Figs. 2-11 y 2-12 se han usado longitudes L_c y áreas de perfil A_m de la aleta corregidas. Podemos observar que como $r_{2c}/r_1 \rightarrow 1$ .O, la eficiencia de la aleta circunferencial se vuelve idéntica a la de una aleta recta con perfil rectangular.

Es interesante observar que la eficiencia de la aleta alcanza su valor máximo en el caso trivial de $L = 0$, o sin aleta. Por tanto, no deberíamos esperar poder hacer máximo el rendimiento de la aleta en relación con su longitud. No obstante, es posible hacer máxima la eficiencia en relación con la cantidad de material de la aleta (masa, volumen o costo), y este proceso de maximización tiene una importancia económica significativa. No hemos tratado el tema sobre la transferencia de calor por radiación

$$L_c \simeq \begin{cases} L + \dfrac{t}{2} & \text{aleta rectangular} \\ L & \text{aleta triangular} \end{cases}$$

$$A_m = \begin{cases} tL_c & \text{aleta rectangular} \\ \dfrac{t}{2}L & \text{aleta triangular} \end{cases}$$

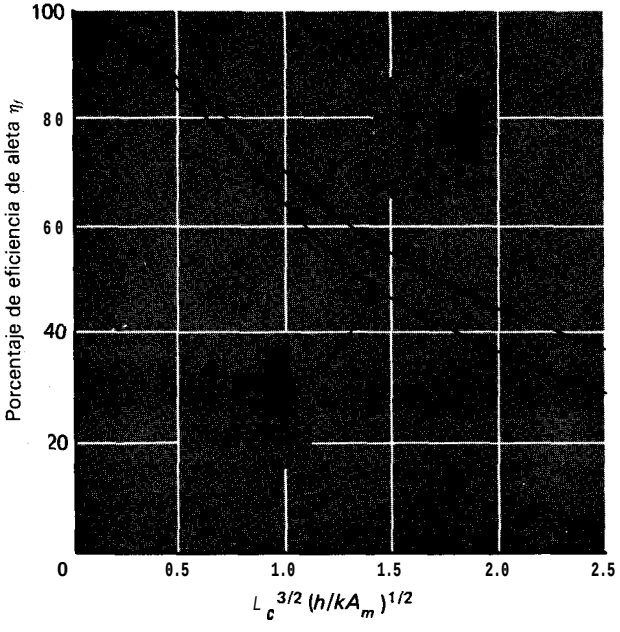


Fig. 2-11 Eficiencia de aletas rectangulares y triangulares.

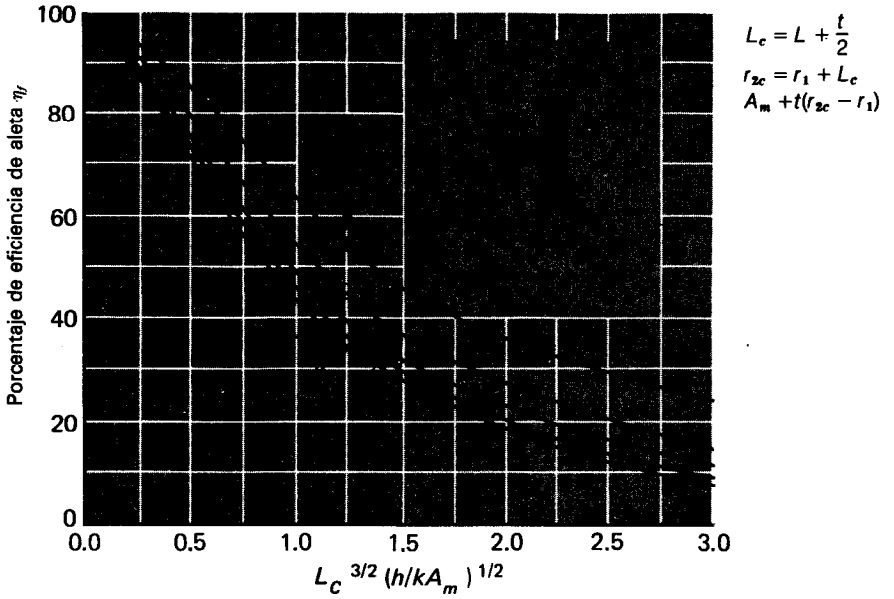


Fig. 2-12 Eficiencia de aletas circunferenciales con perfil rectangular, según la Ref. 3.

de una aleta. La transferencia por radiación es de gran importancia en un número de aplicaciones, y para obtener información sobre este tema el lector interesado deberá consultar a Siegel y Howell [9].

En algunos casos, un método válido para la evaluación del rendimiento de las aletas, es comparar la transferencia de calor con la aleta, con la que obtendría sin ella. La razón de estas cantidades es

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\eta_f A_f h\, \theta_0}{h A_b\, \theta_0}$$

en donde A_f es el área de la superficie total de la aleta y A_b es el área de base. Para la aleta con punta aislada descrita por la Ec. Z-36,

$$A_f = PL$$
$$A_b = A$$

y la razón de calor, sería

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kP}}$$

Aquí haremos notar que la instalación de aletas sobre una superficie de transferencia de calor, no incrementará necesariamente la rapidez de transferencia de calor. Si el valor de h, el coeficiente de convección, es grande, como ocurre con líquidos de alta

velocidad o la ebullición, la aleta puede producir una reducción en la transferencia de calor debido a que la resistencia de conducción representa entonces, un impedimento mayor para el flujo de calor que la resistencia de convección. Para ejemplificar este punto, considérese una aleta cilíndrica de acero inoxidable que tiene $k = 16$ W/m·°C, $L = 10$ cm, $d = 1$ cm y la cual se expone a una situación de convección por agua hirviendo en donde $h = 5000$ W/m²·°C. De la Ec. 2-35 podemos calcular

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kP}}$$

$$= \frac{\tanh \left\{ \left[\frac{5000\pi(1 \times 10^{-2})(4)}{16\pi(1 \times 10^{-2})^2} \right]^{1/2} (10 \times 10^{-2}) \right\}}{\left[\frac{5000\pi(1 \times 10^{-2})^2}{(4)(16)\pi(1 \times 10^{-2})} \right]^{1/2}}$$

$$= 1.13$$

Así, este cilindro bastante grande produce un incremento en la transferencia de calor de sólo 13%.

En el Prob. 2-25 se da otro método más para la evaluación del rendimiento de las aletas. Kern y Kraus [8] proporcionan un estudio muy completo sobre la transferencia de calor en superficies extendidas. En la Fig. 2-13 se muestran algunas fotografías de las diversas formas de aletas que se usan en aplicaciones de enfriamiento en electrónica.

Ejemplo 2-5

Compare las distribuciones de la temperatura en una barra con aletas que tiene 2 cm de diámetro y 10 cm de longitud y que se encuentra expuesta a un medio de convección con $h = 25$ W/m²·°C, para tres materiales de las aletas: cobre [$k = 385$ W/m·°C], acero inoxidable [k = 17/m·°C] y vidrio [k = 0.8 W/m·°C]. Compare también los flujos de calor relativos y la eficiencia de las aletas.

Solución

Tenemos

$$\frac{hP}{kA} = \frac{(25)\pi(0.02)}{k\pi(0.01)^2} = \frac{5000}{k}$$

Por tanto. los términos de interés son

Material	$\frac{hP}{kA}$	m	mL
Cobre	**12.99**	**3.604**	**0.3604**
Acero inoxidable	**294.1**	**17.15**	**1.715**
Vidrio	**6250**	**79.06**	**7.906**

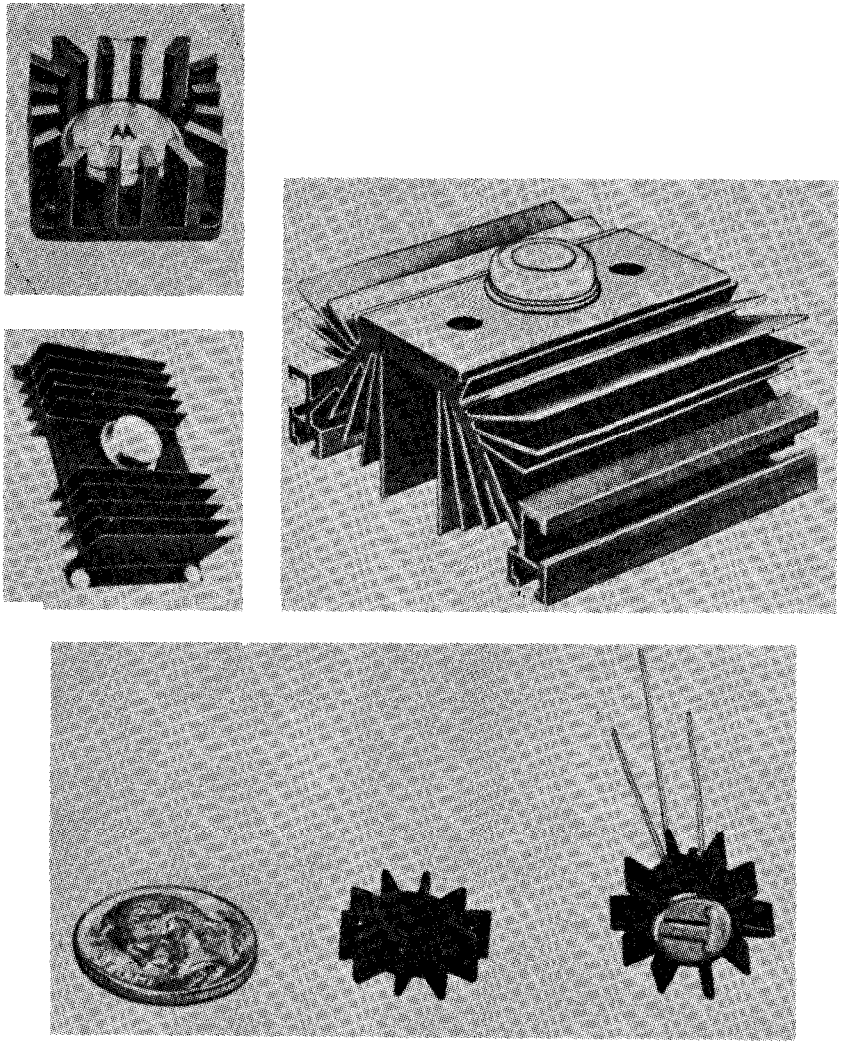


Fig. 2-13 Algunos arreglos que se utilizan en aplicaciones de enfriamiento electrónico. (Cortesía de Wakefield Engineering Inc., Wakefield, Mass.)

Estos valores pueden insertarse en la Ec. 2-33*a* para calcular la temperatura en diferentes lugares x a lo largo de la barra: en la figura a continuación se muestran los resultados. Observamos que el vidrio se comporta como una barra "muy larga" y su comportamiento puede calcularse a partir de la Ec. 2-32. Las eficiencias de las aletas se calculan a partir de la Ec. 2-36 utilizando la aproximación de longitud corregida de la Ec. 2-38. Tenemos

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 10 + \frac{2}{2} = 11 \text{ cm} \quad [4.33 \text{ plg}]$$

Los parámetros de interés para el flujo de calor y las comparaciones de eficiencia se tabulan ahora como

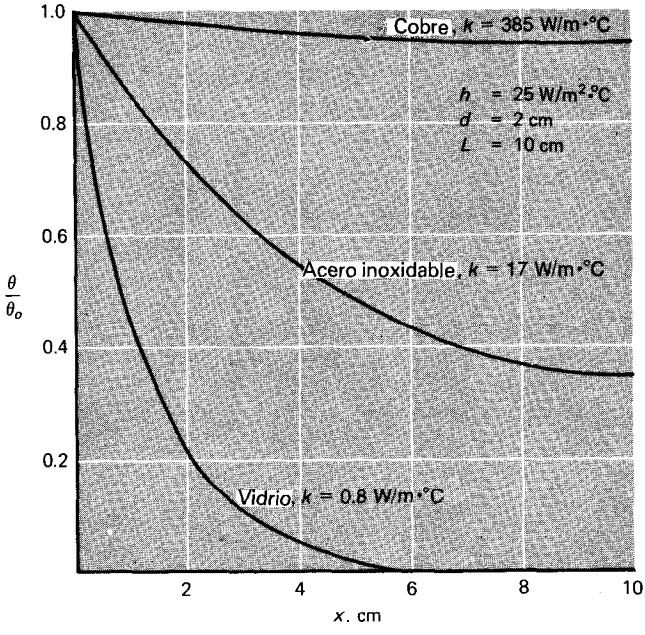


Figura Ejemplo 2-5

Material	$hPkA$	mL_c
Cobre	0.190	**0.3964**
Acero inoxidable	0.0084	1.8865
Vidrio	3.9×10^{-4}	8.697

Para comparar los flujos de calor podemos calcular los valores a partir de la Ec. 2-35 para una unidad de valor de θ_0, o bien notar que la eficiencia de la aleta produce una comparación relativa de flujo de calor, debido a que la transferencia de calor máxima es la misma en los tres casos; es decir, estamos tratando con el mismo valor de *h*, tamaño y forma de aleta. Por tanto, calculamos los valores de η_f a partir de la Ec. 2-36 y de los valores de mL_c antes mencionados.

Material	η_f	*q relativa a cobre, %*
Cobre	0.951	100
Acero inoxidable	0.506	53.6
Vidrio	0.115	12.1

Los perfiles de la temperatura en la figura pueden ser un poco engañosos. El vidrio tiene el gradiente de temperatura más acentuado en la base. pero su valor de *k* muy inferior produce una rapidez dr transferencia dr calor menor.

Ejemplo 2-6

Una aleta de aluminio [k = 200 W/m·°C] de 3.0 mm de espesor y 7.5 mm de longitud sobresale de una pared, como se muestra en la Fig. 2-9. La base se mantiene a 300 °C y la temperatura ambiente es 50 °C, con $h = 10\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$. Calcule la pérdida de calor de la aleta por unidad de profundidad de material.

Solución

Podemos usar el método aproximado de resolución proporcionando a la aleta una longitud ficticia $t/2$ y calculando en seguida la transferencia de calor de una aleta con punta aislada como se da en la Ec. 2-35 Tenemos

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 7.5 + 0.15 = 7.65 \text{ cm} \quad [3.01 \text{ plg}]$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \left[\frac{h(2z + 2t)}{htz}\right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

cuando la profundidad de la aleta $z \gg t$. De este modo

$$m = \left[\frac{(2)(10)}{(200)(3 \times 10^{-3})}\right]^{1/2} = 5.774$$

De la Ec. 2-35, para una aleta con punta aislada

$$m = (\tanh mL_c)\sqrt{hPkA}\ \theta_0 = mkA\,\theta_0 \tanh mL_c$$

Para una profundidad de 1 m

$$A = (1)(3 \times 10^{-3}) = 3 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 \quad [4.65\ \text{plg}^2]$$

y

$$q = (5.774)(200)(3 \times 10^{-3})(300 - 50)\tanh[(5.774)(0.0765)]$$
$$= 359\ \text{W/m}\ [373.5\ \text{Btu/h·pie}^2]$$

Ejemplo 2-7

Se colocan aletas de aluminio de 1.5 cm de ancho y 10 mm de espesor sobre un tubo de 2.5 cm de diámetro para disipar el calor. La temperatura de la superficie del tubo es de 170 °C, y la del ambiente de 25 °C. Calcule el calor perdido por aleta para $h = 130\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$. Suponga que $k = 200\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}$ para el aluminio.

Solución

Para este ejemplo podemos calcular la transferencia de calor utilizando las curvas de eficiencia de la aleta de la Fig. 2-12. Los parámetros necesarios son

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 1.5 + 0.05 = 1.55 \text{ cm}$$

$$r_1 = \frac{2.5}{2} = 1.25 \text{ cm}$$

$$r_{2c} = r_1 + L_c = 1.25 + 1.55 = 2.80 \text{ cm}$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{2.80}{1.25} = 2.24$$

$$A_m = t(r_{2c} - r_1) = (0.001)(2.8 - 1.25)(10^{-2}) = 1.55 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$L_c^{3/2}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{1/2} = (0.0155)^{3/2}\left[\frac{130}{(200)(1.55 \times 10^{-5})}\right]^{1/2} = 0.396$$

De la Fig. 2-12, $\eta = 82\%$. El calor que sería transferido si toda la aleta estuviera a la temperatura de base es (con ambos lados de la aleta intercambiando calor)

$$\begin{aligned} q_{máx} &= 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)h(T_0 - T_\infty) \\ &= 2\pi(2.8^2 - 1.25^2)(10^{-4})(130)(170 \quad 25) \\ &= 74.35 \text{ W} \quad [253.7 \text{ Btu/h}] \end{aligned}$$

La transferencia real de calor es entonces el producto del flujo de calor y la eficiencia de la aleta

$$q_{real} = (0.82)(74.35) = 60.97 \text{ W} \quad [208 \text{ Btu/h}]$$

2-11 Resistencia térmica de contacto

Imagine dos barras sólidas en contacto como se indica en la Fig. 2-14, con sus lados aislados de manera que el calor sólo fluye en la dirección axil. Los materiales pueden tener conductividad térmica diferente, pero si los lados se encuentran aislados, el flujo de calor debe ser el mismo a través de los dos materiales bajo condiciones de estado estacionario. La experiencia demuestra que el perfil de temperatura real a través de los

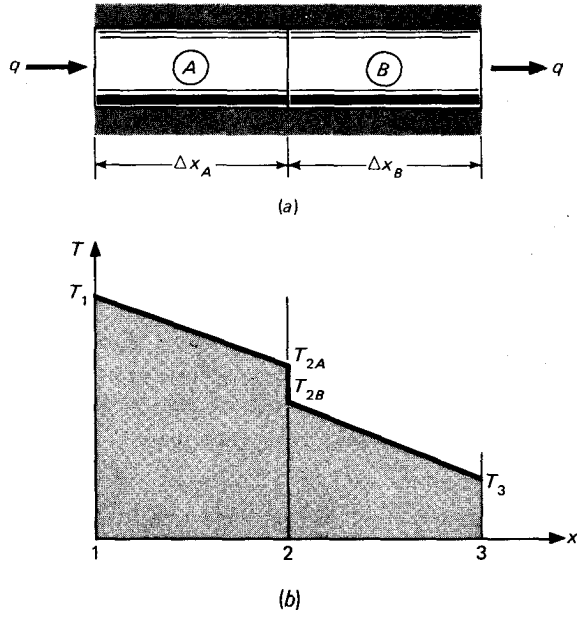


Fig. 2-14 Ilustraciones del efecto de la resistencia térmica de contacto: (*a*) situación física; (*b*) perfil de temperatura.

dos materiales varía aproximadamente como se muestra en la Fig. 2-14*b*. Se dice que la caída de temperatura en el plano 2, el plano de contacto entre los dos materiales, es el resultado de una ***resistencia térmica de contacto.*** Realizando un balance de energía sobre los dos materiales obtenemos

$$q = k_A A \frac{T_1 - T_{2A}}{\Delta x_A} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{1/h_c A} = k_B A \frac{T_{2B} - T_3}{\Delta x_B}$$

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\Delta x_A/k_A A + 1/h_c A + \Delta x_B/k_B A} \tag{2-40}$$

en donde a la cantidad $1/h_c A$ se le llama resistencia térmica de contacto y a h_c se le llama coeficiente de contacto. Este factor puede ser muy importante en numerosas aplicaciones, debido a la cantidad de situaciones de transferencia de calor que involucran la unión mecánica de dos materiales.

El mecanismo físico de la resistencia de contacto se puede entender mejor examinando con mayor detalle una unión, tal como se muestra en la Fig. 2-15. Para llevar a cabo el estudio se ha exagerado la rugosidad real de la superficie. Ninguna superficie real es completamente lisa, y se cree que la rugosidad real de una superficie desempeña un papel fundamental en la determinación de la resistencia de contacto. Existen dos contribuciones importantes a la transferencia de calor en la unión:

1 La conducción de sólido a sólido en los puntos de contacto.
2 La conducción a través de gases atrapados en los espacios vacíos creados por el contacto.

Se cree que el segundo factor representa la mayor resistencia al flujo de calor, ya que la conductividad térmica del gas es bastante pequeña en comparación con la de los sólidos.

Designando con A_c el área de contacto y con A_v el área vacía, podemos escribir para el flujo de calor a través de la unión

$$q = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{L_g/2k_A A_c + L_g/2k_B A_c} + k_f A_v \frac{T_{2A} - T_{2B}}{L_g} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{1/h_c A}$$

en donde L_g es el espesor del espacio vacío y k_f la conductividad térmica del fluido que ocupa el espacio hueco. El área de sección transversal ***total*** de las barras es ***A.*** Resolviendo para h_c, el coeficiente de contacto, obtenemos

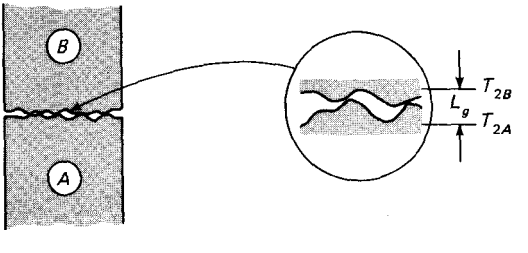


Fig. 2-15 Modelo de unión rugosa para el análisis de resistencia térmica de contacto.

$$h_c = \frac{1}{L_g}\left(\frac{A_c}{A}\frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} + \frac{A_v}{A}k_f\right) \tag{2-41}$$

En la mayor parte de los casos, el fluido que llena los espacios vacíos es aire y k_f es pequeña comparada con k_A y k_B. Si el área de contacto es pequeña, la mayor resistencia térmica resulta de los espacios vacíos. El principal problema en esta teoría simple está en que la determinación de los valores efectivos de A_c, A_v y L_g para las superficies en contacto es extremadamente difícil.

Del modelo precedente, podemos sacar como conclusiones tentativas:

1 La resistencia de contacto debería aumentar con una reducción en la presión del gas ambiente, cuando la presión disminuye por debajo del valor en el que la trayectoria libre media es grande, comparada con una dimensión característica del espacio vacío, ya que en esta condición la conductancia del gas atrapado disminuirá .

2 La resistencia de contacto debería reducirse con un incremento en la presión de la unión, ya que esto da por resultado una deformación de los puntos importantes de las superficies en contacto, creando así un área de contacto mayor entre los sólidos.

En las Refs. 4, 6 y 7 se presenta un estudio muy completo sobre los problemas de resistencia de contacto. Por desgracia, no existe una teoría satisfactoria que pueda predecir la resistencia térmica de contacto para cualquier tipo de material de ingeniería, ni los estudios experimentales han proporcionado correlaciones empíricas totalmente confiables. Esto es comprensible debido a la gran cantidad de condiciones complejas de superficie que se pueden encontrar en la práctica.

También puede ser importante la transferencia de calor por radiación a través de la unión cuando se tienen altas temperaturas. Esta transferencia de energía puede calcularse por medio de los métodos que se presentan en el Cap. 8.

Para propósitos de diseño y en ausencia de información más específica, se pueden utilizar los valores de conductancia de contacto que se dan en la Tabla 2-2. La resistencia térmica de contacto se puede reducir notablemente, tal vez del orden de 75%, utilizando una "grasa térmica" como la Dow 340.

Ejemplo 2-8

Dos barras de acero 304 de 3.0 cm de diámetro y 10 cm de largo tienen superficies esmeriladas y se encuentran expuestas al aire con una rugosidad de superficie de cerca de 1 pm. Si se unen las superficies con una presión de 50 atm y se expone la combinación de las dos barras a una diferencia de temperatura promedio de 100 °C, calcule el flujo de calor axil y la caída de temperatura a través de la superficie de contacto.

Solución

El flujo de calor total está sujeto a tres resistencias térmicas, una resistencia de conducción por cada barra y la resistencia de contacto. Para las barras

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(0.1)(4)}{(16.3)\pi(3 \times 10^{-2})^2} = 8.67\ ^\circ\text{C/W}$$

Tabla 2-2 Conductancia de contacto en superficies típicas

	Rugosidad		Temperatura	Presión	1/h,	
Tipo de superficie	μplg	μm	°C	atm	h pie² °F/Btu	m² °C/W x 10⁴
Acero inoxidable 416 esmerilado, aire	100	2.54	90-200	3-25	0.0015	2.64
Acero inoxidable 304 esmerilado, aire	45	1.14	20	40-70	0.003	5.28
Acero inoxidable 416, esmerilado con 0.001 plg de calza de latón	100	2.54	30-200	7	0.002	3.52
Aluminio esmerilado, aire	100	2.54	150	12-25	0.0005	0.88
	10	0.25	150	12-25	0.0001	0.18
Con calza de latón de 0.001 plg, aire	100	2.54	150	12-200	0.0007	1.23
Cobre, esmerilado, aire	50	1.27	20	12-200	0.00004	0.07
Acordonado, aire	150	3.81	20	10-50	0.0001	0.18
Vacío	10	0.25	30	7-70	0.0005	0.88

De la Tabla 2-2 tenemos que la resistencia por contacto es

$$R_c = \frac{t}{h_c A} = \frac{(5.28 \times 10^{-4})(4)}{\pi(3 \times 10^{-2})^2} = 0.747\ ^\circ\text{C/W}$$

La resistencia térmica total es en consecuencia

$$\Sigma R_t = (2)(8.679) + 0.747 = 18.105$$

y el flujo de calor total es

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R_t} = \frac{100}{18.105} = 5.52\ \text{W} \quad [18.83\ \text{Btu/h}]$$

La caída de temperatura a través del contacto se encuentra tomando la razón de la resistencia de contacto a la resistencia térmica total:

$$\Delta T_c = \frac{R_c}{\Sigma R_t}\Delta T = \frac{(0.747)(100)}{18.105} = 4.13\ ^\circ\text{C} \quad [39.43\ ^\circ\text{F}]$$

Preguntas de repaso

1. ¿Qué se entiende por el término *unidimensional* cuando se aplica a problemas de conducción?
2. ¿Qué se entiende por resistencia térmica?
3. ¿Por qué es importante la suposición de flujo de calor unidimensional en el análisis de aletas?
4. Defina la eficiencia de aleta.
5. ¿Por qué es importante la solución de la punta aislada para los problemas de aletas?

6. ¿Qué se entiende por resistencia térmica de contacto? ¿De qué parámetros depende esta resistencia?

Problemas

2-1 Se va a construir una pared de 2 cm de espesor con un material que tiene una conductividad térmica promedio de 1.3 W/m·°C. Se aislará la pared con un material que tiene una conductividad térmica de 0.35 W/m·°C, de manera que la pérdida de calor por metro cuadrado no excederá 1830 W. Suponiendo que las temperaturas de las superficies interior y exterior de la pared aislada son de 1300 y 30 °C, calcule el espesor de aislante requerido.

2-2 Un cierto material tiene 2.5 cm de espesor y un área de sección transversal de 0.1 m^2, uno de sus lados se mantiene a 38 °C y el otro a 94 °C. La temperatura en el plano central del material es de 60 °C, y el flujo de calor a través de él es 1 kW. Obtenga una expresión para la conductividad térmica del material en función de la temperatura.

2-3 Una pared compuesta está formada por una lámina de cobre de 2.5 cm, una capa de asbesto de 3.2 mm y una capa de fibra de vidrio de 5 cm. La pared se encuentra sujeta a una diferencia de temperatura total de 560 °C. Calcule el flujo de calor por unidad de área a través de la estructura compuesta.

2-4 Determine la transferencia de calor por unidad de área a través de la pared compuesta que se esquematiza. Suponga un flujo de calor unidimensional.

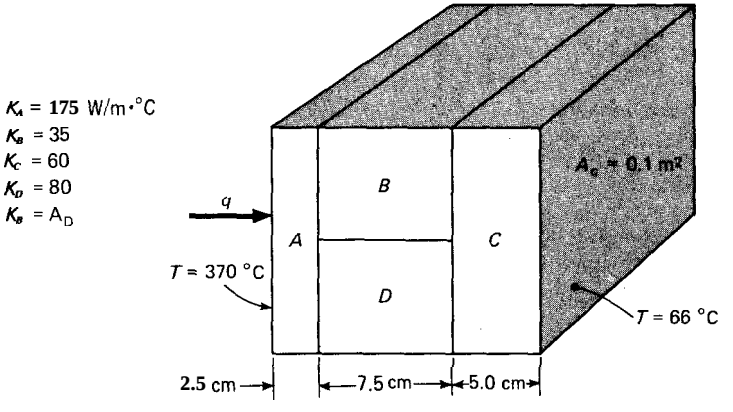


Figura Problema 2-4

2-5 Un lado de un bloque de cobre de 5 cm de espesor se mantiene a 260 °C. El otro lado está cubierto con una capa de fibra de vidrio de 2.5 cm de espesor. Se mantiene el exterior de la fibra de vidrio a 38 °C, y el flujo de calor total a través de la combinación de cobre y fibra de vidrio es de 44 kW. ¿Cuál es el área de la placa?

2-6 Una tubería de acero con un diámetro externo de 5 cm se encuentra cubierta por aislante de asbesto de 6.4 mm [k = 0.096 Btu/h·pie·°F] seguido de una capa aislante de fibra de vidrio [k = 0.028 Btu/h·pie·°F]. La temperatura de la pared de la tubería es de 315 °C, y la temperatura exterior del aislante es de 38 °C. Calcule la temperatura interfacial entre el asbesto y la fibra de vidrio.

2-7 Deduzca una expresión para la resistencia térmica a través de una esfera vacía con radio interno r_i y radio externo r_o y que tiene una conductividad térmica k.

2-8 Derive una expresión para la distribución de temperatura en una pared plana que tiene fuentes de calor distribuidas uniformemente y una cara mantenida a una temperatura T_1, mientras la otra cara se mantiene a T_2. El espesor de la pared puede tomarse como $2L$.

2-9 Deduzca una expresión para la distribución de temperatura en una pared plana en la que las fuentes de calor distribuidas varían de acuerdo a la relación lineal

$$\dot{q} = \dot{q}_w[1 + \beta(T - T_w)]$$

donde $\dot{q}_w$ es una constante e igual al calor generado por unidad de volumen, a la temperatura de pared T_w. Se mantienen ambas caras de la placa.a una temperatura T_w y su espesor es $2L$.

2-10 Un alambre de acero inoxidable de 3.2 mm de diámetro y 30 cm de largo está sometido a voltaje de 10 V. La temperatura de superficie exterior se mantiene a 93 °C. Calcule la temperatura en el centro del alambre. Tome la resistencia del alambre como 70 $\mu\Omega\cdot$cm y la conductividad térmica como 22.5 W/m$^2\cdot$°C.

Z-11 El alambre calefactor del Ej. 2-4 se sumerge en un fluido que se mantiene a 93 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 5.7 kW/m$^2\cdot$°C. Calcule la temperatura del centro del alambre.

2-12 Una pared plana de 7.5 cm de espesor genera calor en su interior a la rapidez de 0.35 MW/m^3. Un lado de la pared está aislado y el otro se expone a un ambiente a 93 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la pared y el ambiente es de 570 W/m$^2\cdot$°C. La conductividad térmica de la pared es de 21 W/m$\cdot$°C. Calcule la temperatura máxima en la pared.

2-13 Considere una pared de blindaje de un reactor nuclear. La pared recibe un flujo de rayos gamma tal que se genera calor en ella de acuerdo a la relación

$$\dot{q} = \dot{q}_0 e^{-ax}$$

donde $\dot{q}_0$ es la generación de calor en la pared interna de la pared expuesta al flujo y a es una constante. Utilizando esta relación para la generación de calor, derive una expresión para la distribución de temperatura en una pared de espesor L, en donde las temperaturas interior y exterior se mantienen a T_i y T_0, respectivamente. Obtenga también una expresión para la temperatura máxima en la pared.

2-14 Repita el Prob. 2-13 suponiendo que la superficie externa es adiabática, mientras que la temperatura de la superficie interna se mantiene a T_i.

2-15 Demuestre que la distribución de la temperatura para el Caso 2 de la Sec. 2-9 es

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh\, m(L - x) + (h/mk)\, \operatorname{senh}\, m(L - x)}{\cosh\, mL + (h/mk)\, \operatorname{senh}\, mL}$$

Subsecuentemente demuestre que la transferencia de calor es

$$q = \sqrt{hPkA}\,(T_0 - T_\infty)\,\frac{\operatorname{senh}\, mL + (h/mk)\cosh\, mL}{\cosh\, mL + (h/mk)\, \operatorname{senh}\, mL}$$

2-16 Una **barra** delgada de longitud L tiene ambos extremos conectados a dos paredes que se mantienen a las temperaturas T_1 y T_2, respectivamente. La barra pierde calor por convección al ambiente en T_∞. Derive una expresión (a) para la distribución de la temperatura en la barra y (6) para el calor total perdido por la barra.

2-17 Una barra de longitud L tiene un extremo que se mantiene a la temperatura T_0 y *se* encuentra expuesta a una temperatura ambiente T_∞. Se coloca en la barra un elemento calefactor eléctrico de manera que se genera calor en forma uniforme a todo lo largo de la barra, a una rapidez $\dot{q}$. Derive una expresión para: (a) la distribución de temperatura en la barra y (b) el calor total transferido hacia el ambiente. Obtenga una expresión para el valor $\dot{q}$ que hará que la transferencia de calor sea nula en el extremo de la barra que se mantiene a temperatura T_0.

2-18 Una barra de aluminio de 2.5 cm de diámetro y 15 cm de largo sobresale de una pared, la cual se mantiene a 260 °C. La barra está expuesta a un ambiente de 16 °C. El coeficiente de transferencia de calor es de 15 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el calor perdido por la barra.

2-19 Derive la Ec. 2-34 integrando la pérdida de calor por convección de la barra en el Caso 1 de la Sec. 2-9.

2-20 Derive la Ec. 2-35 integrando la pérdida de calor por convección para el Caso 3 en la Sec. 2-9.

2-21 Uno de los extremos de una barra de cobre de 30 cm de longitud se encuentra firmemente conectada a una pared que se mantiene a 200 °C. El otro extremo se encuentra conectado firmemente a una pared mantenida a 93 °C. Se sopla aire sobre la barra de manera que se mantiene un coeficiente de transferencia de calor de 17 $W/m^2 \cdot °C$. El diámetro de la barra es 12.5 mm y la temperatura del aire es 38 °C. ¿Cuál es el calor neto perdido hacia el aire, en watts?

2-22 Una barra larga y delgada de cobre de 6.4 mm de diámetro se expone a un medio ambiente a 20 °C. La temperatura de la base de la barra es 150 °C. El coeficiente de transferencia de calor entre la barra y el ambiente es 24 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el calor que disipa.

2-23 Una barra de cobre muy larga [k = 372 $W/m \cdot °C$] tiene 2.5 cm de diámetro; uno de sus extremos se mantiene a 93 °C. Se expone a un fluido cuya temperatura es 38 °C. El coeficiente de transferencia de calor es 3.5 $W/m^2 \cdot °C$. ¿Cuánto calor pierde la barra?

2-24 Una aleta de aluminio de 1.6 mm de espesor se coloca sobre un tubo circular con un diámetro externo de 2.5 cm. La aleta tiene 6.4 mm de largo. La pared del tubo se mantiene a 150 °C, la temperatura ambiente es 15 °C y el coeficiente de transferencia de calor es de 23 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el calor perdido por la aleta.

2-25 La eficiencia total de una superficie con aletas puede definirse como la razón entre la transferencia de calor total del área combinada de superficie y aletas, y el calor que sería transferido si esta área total se mantuviera a la temperatura de base T_0. Demuestre que esta eficiencia puede calcularse a partir de

$$\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A}(1 - \eta_f)$$

donde η_t = eficiencia total
A_f = área de superficie de todas las aletas
A = área total de transferencia, incluyendo aletas y tubos expuestos u otras superficies
η_f = eficiencia de aletas

2-26 Una aleta triangular de acero inoxidable (18% Cr, 8% Ni) se encuentra adherida a una pared plana, la cual se mantiene a 460 °C. El espesor de la aleta es 6.4 mm y su longitud es 2.5

cm. El ambiente se encuentra a 93 °C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 28 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el calor perdido por la aleta.

2-27 Un tubo de 2.5 cm de diámetro tiene aletas circunferenciales con perfil rectangular, colocadas a lo largo de su longitud con intervalos de 9.5 mm. Las aletas son de aluminio, tienen 0.8 mm de espesor y 12.5 mm de largo. La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 200 °C, y la temperatura ambiente es de 93 °C. El coeficiente de transferencia de calor es 110 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule la pérdida de calor del tubo por metro de longitud.

2-28 Una aleta circunferencia1 con sección transversal rectangular rodea un tubo de 2.5 cm de diámetro. Su longitud es 6.4 mm y su espesor es 3.2 mm. La aleta está hecha de acero. Si sobre la aleta sopla aire de manera que opere un coeficiente de transferencia de calor de 28 $W/m^2 \cdot °C$ y las temperaturas de la base y del aire son 260 y 93 °C, respectivamente, calcule la transferencia de calor a partir de la aleta.

2-29 Una aleta rectangular recta de 2.5 cm de espesor y 15 cm de largo, está hecha de acero y se le coloca en el exterior de una pared que se mantiene a 200 "C. La temperatura ambiente es de 15 °C y el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 17 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el calor perdido por la aleta por unidad de profundidad.

2-30 Una aleta de aluminio de 1.6 mm de espesor rodea a un tubo de 2.5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 12.5 mm. La temperatura de la pared del tubo es de 200 °C y la del ambiente es de 20 °C. El coeficiente de transferencia de calor es de 60 $W/m^2 \cdot °C$. ¿Cuánto calor pierde la aleta?

2-31 Realice de nuevo el Prob. 2-9 suponiendo que ambas caras de la placa se encuentran expuestas a un medio de convección a una temperatura T_∞, con un coeficiente de transferencia de calor h. T_w es ahora una cierta temperatura de referencia, no necesariamente igual a la temperatura de superficie.

2-32 Se utiliza una corriente eléctrica para calentar un tubo a través del cual fluye un fluido de enfriamiento adecuado. El exterior del tubo está cubierto con aislante para minimizar la pérdida de calor hacia el ambiente. A la superficie exterior del tubo se le han adherido termopares para medir la temperatura. Suponiendo una generación de calor uniforme en el tubo, derive una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en el interior del tubo, en términos de las variables medidas: voltaje E, corriente I, temperatura exterior del tubo T_o, radios interior y exterior r_i y r_o, longitud de tubo L y temperatura del fluido T_f.

2-33 Obtenga una expresión para el espesor óptimo de una aleta rectangular recta para un área de perfil dada. Utilice la solución simplificada para puntas aisladas.

2-34 Derive una ecuación diferencial (no la resuelva) para la distribución de la temperatura en una aleta triangular recta. Por conveniencia utilice los ejes coordenados como se muestra, y suponga un flujo de calor unidimensional.

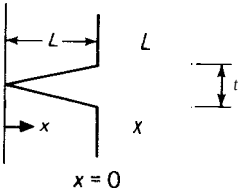


Figura Problema 2-34

2-35 La pared exterior de un edificio está compuesta de una capa de 10 cm de ladrillo común y una capa de 25 cm de fibra de vidrio [k = 0.05 $W/m\cdot{}^{o}C$]. Calcule el flujo de calor a través de la pared para una diferencia de la temperatura de 45 ^{o}C.

2-36 En una barra cuadrada de cobre de 2.5 cm se genera calor a la velocidad de 35.3 MW/m^2. La barra se encuentra expuesta a un medio de convección a 20 ^{o}C, y el coeficiente de transferencia de calor es 4000 $W/m^2\cdot{}^{o}C$. Calcule la temperatura de la superficie de la barra.

2-37 Una pared plana de $2L$ de espesor tiene una generación de calor interno que varía de acuerdo con $\dot{q} = \dot{q}_0 \cos ax$, en donde $\dot{q}_0$ es el calor generado por unidad de volumen en el centro de la pared $(x = 0)$ ya es una constante. Si se mantienen ambos lados de la pared a una temperatura constante T_w, derive una expresión para la pérdida de calor total de la pared por unidad de área de la superficie.

2-38 Uno de los lados de un bloque de cobre de 4 cm de espesor se mantiene a 200 ^{o}C. El otro lado se encuentra cubierto con una capa de fibra de vidrio de 2.5 cm de espesor. El exterior de la fibra de vidrio se mantiene a 90 ^{o}C y el flujo de calor total a través de la placa compuesta es 200 W. ¿Cuál es el área de la placa?

2-89 Una barra larga de acero inoxidable [k = 16 $W/m\cdot{}^{o}C$] tiene una sección transversal cuadrada de 12.5 por 12.5 mm. Uno de sus extremos se mantiene a 250 ^{o}C. El coeficiente de transferencia de calor es de 40 $W/m^2\cdot{}^{o}C$ y la temperatura ambiente de 90 ^{o}C. Calcule el calor perdido por la barra.

2-40 Dos barras de acero inoxidable [$k \simeq 17$ $W/m\cdot{}^{o}C$] de 1 plg de diámetro se ponen en contacto por sus extremos, de manera que sólo 0.1 % del área de la sección transversal se encuentra en contacto en la unión. Las barras tienen 7.5 cm de largo y están sujetas a una diferencia de temperatura axil de 300 ^{o}C. Se estima que la profundidad de rugosidad de cada barra $(L_g/2)$ es 1.3 μm. El fluido que las rodea es aire cuya conductividad térmica para este problema se puede tomar como 0.035 $W/m\cdot{}^{o}C$. Estime el valor de la resistencia de contacto y el flujo de calor axil. ¿Cuál será el flujo de calor para una barra continua de acero inoxidable de 15 cm?

2-41 Cuando se incrementa la "presión de unión" de dos superficies en contacto, los puntos importantes de las superficies se deforman, de manera que se incrementa el área de contacto A_c y disminuye la profundidad de rugosidad L_g. Trate este efecto según el enfoque dado en la Sec. 2-11. (Trabajos experimentales demuestran que la conductancia de unión varía con la presión en forma casi directa.)

2-42 Una aleta recta de perfil rectangular está hecha de duraluminio (94% Al, 3% Cu), con un espesor de 2.4 mm. La alera tiene 19 mm de largo y se encuentra sometida a *un* ambiente de convección con h = 85 $W/m^2\cdot{}^{o}C$. Si la temperatura de base es 90 ^{o}C y el ambiente se encuentra a 25 ^{o}C, calcule la transferencia de calor por unidad de longitud de aleta.

2-43 Cierto material semiconductor tiene una conductividad térmica de 0.0124 $W/cm\cdot{}^{o}C$. Una barra rectangular de este material tiene una longitud de 3 cm y un área de sección transversal de 1 cm^2. Uno de sus extremos se mantiene a 300 ^{o}C y el otro a 100 ^{o}C, y la barra conduce una corriente de 50 A. Suponiendo que la superficie longitudinal está aislada, calcule la temperatura en el punto medio de la barra. Considere la resistividad como 1.5 X 10^{-3} $\Omega\cdot cm$.

2-44 Se construye una pared plana con un material que tiene una conductividad térmica que varía como el cuadrado de la temperatura de acuerdo con la relación $k = k_0(1 + \beta T^2)$. Derive una expresión para la transferencia de calor en esta pared.

2-45 La distribución de la temperatura en cierta pared plana es

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = C_1 + C_2x^2 + C_3x^3$$

en donde T_1 y T_2 son las temperaturas en cada lado de la pared. Si la conductividad térmica de la pared es constante y su espesor es L, derive una expresión para la generación de calor por unidad de volumen, como una función de x, la distancia desde la pared en la que $T = T_1$ Sea q_0 la rapidez de generación de calor en $x = 0$.

2-46 Cierto motor de combustión interna enfriado por aire tiene un cilindro de hierro fundido [$k = 35$ Btu/h·pie·°F]. Las aletas en el cilindro tienen una longitud de $\frac{5}{8}$ y un espesor de $\frac{1}{8}$ plg. El coeficiente de convección es 12 Btu/h·pie^2·°F. El diámetro del cilindro es de 4 plg. Calcule la pérdida de calor por aleta para una temperatura de base de 450 °F y una temperatura ambiente de 100 °F.

2-47 Derive una expresión para la distribución de la temperatura en una esfera de radio r con generación de calor uniforme $\dot{q}$ y temperatura de superficie constante T_w.

2-48 Una barra de acero inoxidable [k + 22 W/m·°C] de 1.6 mm de diámetro sobresale de una pared que se mantiene a 49 “C. La barra tiene 12.5 mm de longitud y el coeficiente de convección es 570 W/m^2·°C. La temperatura ambiente es de 25 °C. Calcule la temperatura de la punta de la barra. Repita el cálculo para h = 200 y 1200 W/m^2·°C.

2-49 En el interior de una tubería de acero de 2.5 cm de diámetro interno fluye agua. El espesor de pared es 2 mm y el coeficiente de convección en el interior es de 500 W/m^2·°C, y 12 W/m^2·°C en el exterior. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total. ¿Cuál es el factor principal que determina U?

2-50 La tubería del Prob. 2-49 se cubre con una capa de asbesto [$k = 0.18$ W/m·°C], mientras continúa en un ambiente de convección con $h = 12$ W/m^2·°C. Calcule el radio crítico de aislamiento. {Aumentará o disminuirá la transferencia de calor si se agrega un espesor de aislante de (a) 0.5 mm, (b) 10 mm?

2-51 Dos placas de aluminio de 5 mm de espesor con una rugosidad de 100 μplg, se unen con una presión de contacto de 20 atm. La diferencia de la temperatura total a través de las placas es de 80 °C. Calcule la caída de la temperatura a través de la unión de contacto.

2-52 Las aletas se instalan sobre tubos con frecuencia por un proceso de moldeo a presión. Considere una aleta circunferencia1 de aluminio que tiene un espesor de 1 .O mm para instalarse en un tubo de aluminio de 2.5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 1.25 cm y la conducción de contacto puede tomarse de la Tabla 2-2 para una superficie esmerilada de 100 μplg. El ambiente de convección está a 20 °C y con h = 125 W/m^2·°C. Calcule la tranferencia de calor para cada aleta, para una temperatura de pared del tubo de 200 °C ¿Qué porcentaje de reducción en transferencia de calor ocasiona la conductancia de contacto?

2-53 La pared de una casa puede aproximarse como dos capas de panel de fibra aislante de 1.2 cm, una capa de 8.0 cm de asbesto de baja densidad y una capa de 10 cm de ladrillo común. Suponiendo coeficientes de transferencia de calor por convección de 15 W/m^2·°C en ambos lados de la pared, calcule el coeficiente de transferencia de calor total para este arreglo.

2-54 Un alambre de 1.0 mm de diámetro se mantiene a una temperatura de 400 °C y se expone a un ambiente de convección a 40 °C con $h = 150$ W/m^2·°C. Calcule la conductividad térmica que haría que un espesor de aislamiento de 0.2 mm produzca el “radio crítico”. {Cuánto de este aislamiento debe agregarse para reducir en 75% la transferencia de calor que produciría el alambre desnudo?

2-55 Una barra de vidrio de 2 cm de diámetro y 6 cm de largo [k = 0.8 $W/m \cdot {}^oC$] tiene una temperatura de base de 100 ^oC y se expone a un ambiente de convección de aire a 20 ^oC. La temperatura en la punta de la barra se mide y es 35 "C. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección? ¿Cuánto calor pierde la barra?

2-56 Cierto material tiene un espesor de 30 cm y una conductividad térmica de 0.04 $W/m \cdot {}^oC$. En un instante particular en el tiempo, la distribución de la temperatura con x, la distancia a partir de la cara izquierda, es $T = 150x^2 - 30x$, con x en metros. Calcule las velocidades de flujo de calor en x = 0 y x = 30 cm. ¿Se está calentando o enfriando este sólido?

2-57 Una pared se construye de 2.0 cm de cobre, 3.0 m de hoja de asbesto [k = 0.166 $W/m \cdot {}^oC$] y 6.0 cm de fibra de vidrio. Calcule el flujo de calor por unidad de área para una diferencia de temperatura total de.500 ^oC.

2-58 Una tubería de acero de 2.0 plg cédula 40 (véase el Apéndice A) tiene k = 27 $Btu/h \cdot pie \cdot {}^oF$. El fluido en su interior tiene h = 30 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot {}^oF$ y la superficie externa de la tubería está cubierta con 0.5 plg de aislamiento de fibra de vidrio con k = 0.023 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot {}^oF$. El coeficiente de convección en la superficie externa del aislante es de 2.0 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot {}^oF$ La temperatura del fluido en el interior es de 320 ^oF y la temperatura ambiente de 70 ^oF. Calcule la pérdida de calor por pie de longitud.

2-59 Cierta pared de un edificio consiste en 6.0 plg de concreto [k = 1.2 $W/m \cdot {}^oC$], 2.0 plg de aislamiento de fibra de vidrio y $\frac{3}{8}$ plg de panel de yeso [k = 0.05 $W/m \cdot {}^oC$]. Los coeficientes de convección interno y externo son de 2.0 y 7.0 $Btu/h\ pie^2 \cdot {}^oF$, respectivamente. La temperatura del aire exterior es de 20 ^oF y la temperatura interior es de 72 "F. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total, el valor de R y la pérdida de calor por unidad de área.

2-60 Derive una relación para el radio crítico de aislamiento para una esfera.

2-61 Una pared se construye con una sección de acero inoxidable [k = 16 $W/m \cdot {}^oC$] de 4.0 mm de espesor, con capas de plástico idénticas en ambos lados del acero. El coeficiente de transferencia de calor total, considerando convección en ambos lados del plástico, es de 200 $W/m^2 \cdot {}^oC$. Si la diferencia de la temperatura total a través del arreglo es de 100 ^oC, calcule la diferencia de la temperatura a través del acero inoxidable.

2-62 Una esfera de acero inoxidable [k = 16 $W/m \cdot {}^oC$] con un diámetro de 8 cm se expone a un ambiente de convección a 20 ^oC, h = 15 $W/m^2 \cdot {}^oC$. El calor se genera uniformemente en la esfera, a la velocidad de 1.0 kW/m^3. Calcule la temperatura de estado estacionario para el centro de la esfera.

2-63 Un tanque cilíndrico de 80 cm de diámetro y 2.0 m de alto contiene agua a 80 "C. El tanque está lleno al 90% y se debe agregar aislante para que la temperatura del agua nd descienda a más de 2 $^oC/h$. Utilizando la información proporcionada en este capítulo, especifique un material aislante y calcule el espesor necesario para la velocidad de enfriamiento enunciada

2-64 Una aleta rectangular recta tiene una longitud de 2.0 cm y un espesor de 1.5 mm. La conductividad térmica es 55 $W/m \cdot {}^oC$ y se expone a un ambiente de convección a 20 ^oC y h = 500 $W/m^2 \cdot {}^oC$. Calcule la pérdida de calor máxima posible para una temperatura de base de 200 ^oC. ¿Cuál es la pérdida de calor real?

2-65 Calcule el valor de R para los aislantes siguientes: (a) espuma de poliuretano, (b) de fibra de vidrio, (c) bloques de lana mineral, (d) bloques de silicato de calcio.

2-66 Una tubería para vapor caliente tiene una temperatura de superficie interna de 300 ^oC, un diámetro interno de 8 cm y un espesor de pared de 5.5 mm. Está cubierto con una capa aislante de 9 cm que tiene k = 50 $W/m \cdot {}^oC$, seguida de una capa de aislante de 4 cm con k =

0.35 $W/m \cdot °C$. La temperatura exterior al aislante es 30 °C. Calcule la pérdida de calor por metro de longitud. Suponga k = 47 $W/m \cdot °C$ para la tubería.

2-67 Un cable eléctrico de aleación de aluminio tiene k = 190 $W/m \cdot °C$, 30 mm de diámetro y lleva una corriente eléctrica de 230 A. La resistividad del cable es 2.9 $\mu\Omega \cdot cm$ y su temperatura de superficie exterior es 180 °C. Calcule la temperatura máxima en el cable cuando la temperatura del aire ambiente es 15 °C.

2-68 Una aleta de aluminio se encuentra adherida a un transistor que genera calor a una velocidad de 300 mW. La aleta tiene un área de superficie total de 9.0 cm^2 y está expuesta al aire a 27 °C. La conductancia de contacto entre el transistor y la aleta es 0.9 X 10" $m^2 \cdot °C/W$ y el área de contacto es 0.5 cm^2. Evalúe la temperatura del transistor suponiendo que la aleta tiene una temperatura uniforme.

2-69 Calcule el coeficiente de transferencia de calor total del Prob. 2-4.

2-70 Calcule el coeficiente de calor total del Prob. 2-5.

2-71 Un depósito para hielo hecho de espuma de poliestireno [k = 0.033 $W/m \cdot °C$] tiene como dimensiones interiores 25 X 40 X 100 cm. El espesor de las paredes es de 5.0 cm. El exterior del deposito se encuentra expuesto al aire a 25 °C con h = 10 $W/m^2 \cdot °C$. Si el depósito se encuentra totalmente lleno de hielo, calcule el tiempo que se necesitará para que se derrita completamente. Enuncie sus suposiciones. El calor de fusión para el agua es 330 kJ/kg.

Referencias

1 Schneider, P. J.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, lnc., Reading, Mass., 1955.

2 Harper, W. B., and D. R. Brown: Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-cooled Engines, *NACA Rep.* 158, 1922.

3 Gardner, K. A.: Efficiency of Extended Surfaces, *Trans. ASME*, vol. 67, Pp. 621-631, 1945.

4 Moore, C. J.: Heat Transfer across Surfaces in Contact: Studies of Transients in One-dimensional Composite Systems, *Sourthern Methodist Univ., Thermal/Fluid Sci. Ctr. Res. Rep.* 67-2, Dallas, Tex., March 1967.

5 Ybarrondo, L. J., and J. E. Sunderland: Heat Transfer from Extended Surfaces, *Bull. Mech. Eng. Educ.*, vol. 5, pp. 229-234, 1966.

6 Moore, C. J., Jr., H. A. Blum, and H. Atkins: Subject Classification Bibliography for Thermal Contact Resistance Studies, *ASME Pap.* 68-WA/HT-18, December 1968.

7 Clausing, A. M.: Heat Transfer at the Interface of Dissimilar Metals: The Influence of Thermal Strain, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 9, p. 791, 1966.

6 Kern, D. Q., and A. D. Kraus: "Extended Surface Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

9 Siegel, R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

3
Conducción en Estado Estacionario — Dimensiones Múltiples

3-I Introducción

En el Cap. 2 se calculó la transferencia de calor en estado estacionario en sistemas en que los gradientes de temperatura y área podían expresarse en términos de una coordenada espacial. Ahora deseamos analizar el caso más general del flujo de calor bidimensional. Para el estado estacionario, se aplica la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{3-1}$$

suponiendo una conductividad térmica constante. La solución a esta ecuación puede obtenerse por técnicas analíticas, numéricas o gráficas.

El objetivo de cualquier análisis de transferencia de calor es casi siempre predecir el flujo de calor, o la temperatura que resulte de un cierto flujo de calor. La solución a la Ec. 3-1 dará la temperatura de un cuerpo bidimensional, en función de las dos coordenadas espaciales independientes x y y. Entonces el flujo de calor en las direcciones x y y puede calcularse de las ecuaciones de Fourier

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3-2}$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3-3}$$

Estas cantidades de flujo de calor están dirigidas ya sea en la dirección x o bien en la dirección y. El flujo de calor total en cualquier punto en el material es el resultante de las q_x y q_y en ese punto. Así, el vector de flujo total está dirigido de manera que sea perpendicular a las líneas de temperatura constante en el material, como se muestra en la Fig. 3-1. De este modo, si la distribución de temperatura en el material se conoce, podemos establecer el flujo de calor con facilidad.

3-2 Análisis matemático de la conducción de calor bidimensional

Primero consideramos un enfoque analítico de un problema bidimensional y en seguida indicamos los métodos numérico y gráfico que pueden usarse para provecho en muchos otros problemas. Aquí es conveniente mencionar que no siempre es posible obtener soluciones analíticas; de hecho, en muchas ocasiones son muy engorrosas y difíciles de manejar. En estos casos con frecuencia es más ventajoso utilizar técnicas numéricas. Para un tratamiento más extenso de los métodos analíticos utilizados en problemas de conducción, referimos al lector a los libros de Carslaw y Jaeger [1], Schneider [2], Arpaci [13] y Ozisik [12].

Considérese la placa rectangular que se muestra en la Fig. 3-2. Los tres lados de la placa son mantenidos a la temperatura constante T_1 y al lado superior se le ha impuesto una distribución de temperatura. Esta distribución podría ser simplemente una temperatura constante o algo más complejo, como una distribución de onda sinusoidal. Consideraremos ambos casos.

Para resolver la Ec. 3-1, se utiliza el metodo de separación de variables. El punto esencial de este método es que se supone que la solución a la ecuación diferencial toma una forma de producto

$$T = XY \qquad \text{donde} \qquad \begin{matrix} x = X(x) \\ Y = Y(y) \end{matrix} \tag{3-4}$$

Las condiciones de frontera se aplican entonces para determinar la forma de las funciones X y Y. La suposición básica, como está expresada por la Ec. 3-4, puede ser justificada sólo si es posible encontrar una solución a esta forma que satisfaga las condiclones de frontera.

Primero considérense las condiciones de frontera con una distribución sinusoidal de temperaturas aplicada al borde superior de la placa. Entonces:

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{en } y = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = W \\ T &= T_m \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 && \text{en } y = H \end{aligned} \tag{3-5}$$

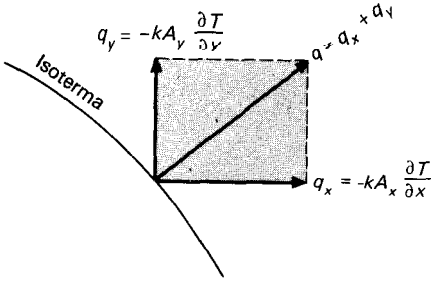


Fig. 3-l Esquema que muestra el flujo de calor en dos dimensiones.

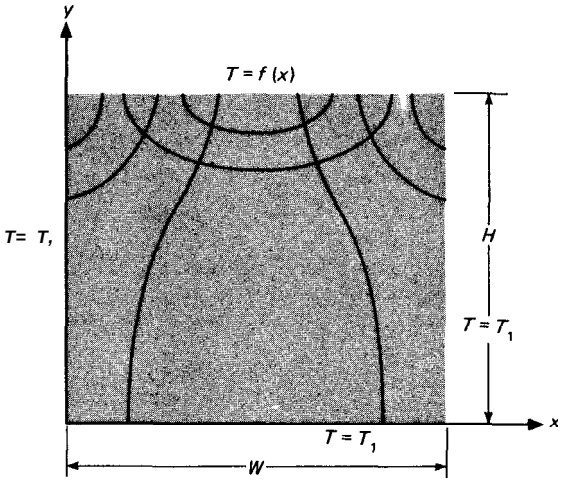


Fig. 3-2 Líneas isotérmicas y de flujo de calor en una placa rectangular.

donde T_m es la amplitud de la función sinusoidal. Sustituyendo la Ec. 3-4 dentro de la Ec. 3-1 da:

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{3-6}$$

Obsérvese que cada lado de la Ec. 3-6 es independiente del otro ya que x y y son variables independientes. Esto requiere que cada lado sea igual a alguna constante. Entonces podemos obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de esta constante,

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{3-7}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{3-8}$$

en donde λ^2 es llamada la constante de separación. Su valor debe ser determinado a partir de las condiciones de frontera. Nótese que la forma de la solución a las Ecs. 3-7 y 3-8, dependerá del signo de λ^2; también resultaría una forma diferente si λ^2 fuera cero. La única manera en que se puede determinar una forma correcta es a través de la aplicación de las condiciones de frontera del problema. Por tal razón primero escribiremos todas las soluciones posibles y en seguida veremos cuál conviene al problema en consideración.

Para $\lambda^2 = 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_1 + C_2 x \\ Y &= C_3 + C_4 y \\ T &= (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y) \end{aligned} \tag{3-9}$$

Esta función no se puede adaptar a la condición de frontera de la función sinusoidal; por tal razón la solución $\lambda^2 = 0$ puede excluirse.

Para $\lambda^2 < 0$:

$$X = C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x}$$
$$Y = C_7 \cos \lambda y + C_8 \text{ sen } \lambda y \qquad (3\text{-}10)$$
$$T = (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos Ay + C_8 \text{ sen Ay})$$

Una vez más, la condición de frontera de la función sinusoidal no puede ser satisfecha; por tanto, también se excluye esta solución.

Para $\lambda^2 > 0$:

$$X = C_9 \cos \lambda x + C_{10} \text{ sen } Xx$$
$$Y = C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y} \qquad (3\text{-}11)$$
$$T = (C_9 \cos Xx + C_{10} \text{ sen } \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y})$$

Ahora es posible satisfacer la condición de frontera de la función sinusoidal; así trataremos de satisfacer las demás condiciones. Es más fácil manejar el álgebra cuando se realiza la siguiente sustitución

$$\theta = T - T_1$$

La ecuación diferencial y la solución guardan entonces la misma forma en la nueva variable θ, y sólo necesitamos transformar las condiciones de frontera. Así

$$\begin{aligned} &e = o && \text{en } y = 0 \\ &e = o && \text{en } x = 0 \\ &e = o && \text{en } x = W \\ &\theta = T_m \text{ sen } \frac{\pi x}{W} && \text{en } y = H \end{aligned} \qquad (3\text{-}12)$$

Aplicando estas condiciones, tenemos

$$0 = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \text{ sen } \lambda x)(C_{11} + C_{12}) \qquad (a)$$
$$0 = C_9(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \qquad (b)$$
$$0 = (C, \cos \text{AW} + C_{10} \text{ sen } \lambda W)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \qquad (c)$$
$$T_m \text{ sen } \frac{\pi x}{W} = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \text{ sen } \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda H} + C_{12} e^{\lambda H}) \qquad (d)$$

Consecuentemente,

$$C_{11} = -C_{12}$$
$$C_9 = 0$$

Y de (c),

$$0 = C_{10} C_{12} \text{ sen } \lambda W (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

Esto requiere que

$$\text{sen } \lambda W = 0 \tag{3-13}$$

Recuérdese que λ era una constante de separación indeterminada. La Ec. 3-13 se podrá satisfacer con varios valores, y éstos pueden escribirse

$$\lambda = \frac{n\pi}{W} \tag{3-14}$$

donde n es un entero. La solución a la ecuación diferencial podrá entonces escribirse como una suma de las soluciones para cada valor de n. Esto es una suma infinita de manera que la solución final es la serie infinita

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{W} \text{ senh } \frac{n\pi y}{W} \tag{3-15}$$

donde las constantes han sido combinadas y los términos exponenciales convertidos a la función hiperbólica. Ahora, la condición de frontera final puede aplicarse:

$$T_m \text{ sen } \frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{W} \text{ senh } \frac{n\pi H}{W}$$

lo que requiere que $C_n = 0$ para $n > 1$. Por tanto, la solución final es

$$T = T_m \frac{\text{senh } (\pi y/W)}{\text{senh } (\pi H/W)} \text{ sen } \left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \tag{3-16}$$

El campo de temperatura para este problema se muestra en la Fig. 3-2. Obsérvese que las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas.

Ahora consideramos el conjunto de condiciones de frontera:

$$T = T, \quad \text{en } y = 0$$
$$T = T, \quad \text{en } x = O$$
$$T = T_1 \quad \text{en } x = W$$
$$T = T_2 \quad \text{en } y = H$$

Utilizando las tres primeras condiciones de frontera, obtenemos la solución en la forma de la Ec. 3-15.

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{W} \text{ senh } \frac{n\pi y}{W} \tag{3-17}$$

La aplicación de la cuarta condición de frontera da

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{W} \text{ senh } \frac{n\pi H}{W} \tag{3-18}$$

Esta es una serie sinusoidal de Fourier y los valores de C_n pueden ser determinados expandiendo la diferencia de temperatura constante $T_2 - T_1$ en una serie de Fourier sobre un intervalo $0 < x < W$. Esta serie es

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{W} \tag{3-19}$$

Al comparar la Ec. 3-18 con la Ec. 3-19, encontramos que:

$$C_n = \frac{2}{\pi}(T_2 - T_1)\frac{1}{\operatorname{senh}(n\pi H/W)}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}$$

y la solución final se expresa como

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{W}\frac{\operatorname{senh}(n\pi y/W)}{\operatorname{senh}(n\pi H/W)} \tag{3-20}$$

Un estudio extenso de las técnicas analíticas utilizadas en la transferencia de calor por conducción requiere de un conocimiento de base en la teoría de funciones ortogonales. Las series de Fourier son un ejemplo de las funciones ortogonales, como lo son las funciones de Bessel y otras funciones especiales aplicables a diferentes geometrías y condiciones de frontera. Para mayor información sobre el tema, el lector interesado puede consultar uno o varios de los textos sobre transferencia de calor por conducción mencionados en las referencias.

3-3 Análisis gráfico

Considérese el sistema bidimensional que se muestra en la Fig. 3-3. La superficie interior es mantenida a una temperatura T_1, y la superficie exterior es mantenida a T_2. Deseamos calcular la transferencia de calor. Las líneas isotérmicas y de flujo de calor han sido bosquejadas como ayuda en este cálculo. Las líneas isotérmicas y de flujo de calor forman grupos de figuras curvilíneas como las que se ven en la Fig. 3-3*b*. El flujo de calor a través de la sección curvilínea está dado por la ley de Fourier, suponiendo un espesor unitario de material:

$$q = -k\,\Delta x(1)\frac{\Delta T}{\Delta y} \tag{3-21}$$

Este *flujo* de calor será el mismo a través de cada sección dentro de esta franja de flujo de calor, y el flujo de calor total será la suma de los flujos de calor de todas las franjas. Si se traza el esquema de manera que Ax = Ay, el flujo de calor es proporcional a AT a través del elemento, y como este flujo de calor es constante, el *AT* a través de cada elemento deberá ser el mismo dentro de la misma franja de flujo de calor. Así, el AT a través de un elemento está dado por

$$\mathrm{AT} = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\mathrm{N}}$$

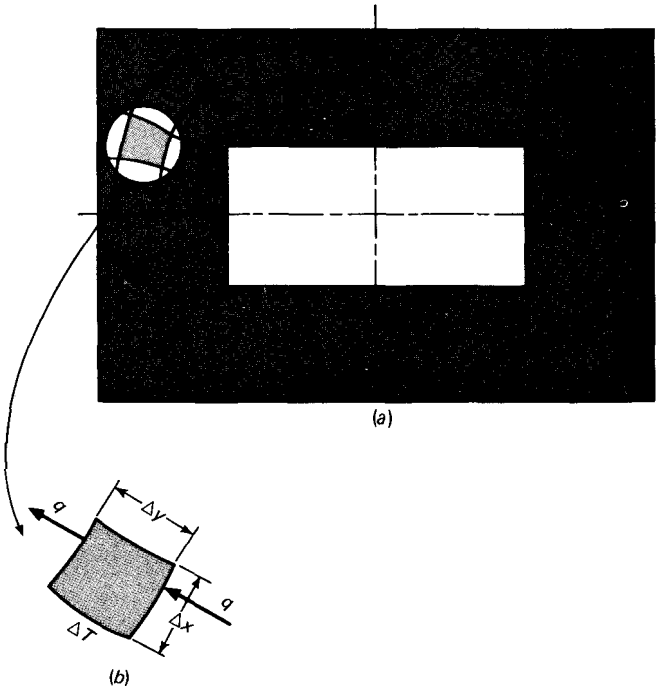


Fig. 3-3 Esquema que muestra un elemento utilizado para el análisis de cuadrados curvilíneos de flujo de calor bidimensional.

donde N es el número de incrementos de temperatura entre la superficie interior y exterior. Además, el flujo de calor a través de cada franja es el mismo ya que es independiente de las dimensiones Ax y Ay cuando éstas están constuidas iguales. En consecuencia escribimos para el total de la transferencia de calor

$$q = \frac{M}{N} k\, \Delta T_{\text{tope}} \quad = \frac{M}{N} k(T_2 - T_1) \tag{3-22}$$

donde M es el número de franjas de flujo de calor. Por tanto, para calcular la transferencia de calor sólo necesitamos construir estas gráficas de cuadrados curvilíneos y contar el número de incrementos de temperatura y franjas de flujo de calor. Deberá cuidarse al construir el espacio de tal manera que $\Delta x \approx$ Ay y las líneas sean perpendiculares.

La exactitud de este método, depende completamente de la habilidad de la persona que dibuje los cuadrados curvilíneos. Sin embargo, aun un esquema burdo con frecuencia puede ayudar a proporcionar estimaciones buenas de las temperaturas que ocurrirán en un cuerpo: y estas estimaciones podrán entonces refinarse por medio de las técnicas numéricas discutidas en la Sec. 3-5. Para bosquejar los cuadrados curvilíneos se puede utilizar una analogía eléctrica, como se discutió en la Sec. 3-8.

3-4 El factor de forma de conducción

En un sistema bidimensional donde sólo se encuentran involucrados-dos límites de temperatura, podríamos definir un factor de forma S tal que:

$$q = kS\ \mathrm{AT}_{,,,} \tag{3-23}$$

Los valores de S han sido obtenidos para diversas geometrías y se encuentran resumidos en la Tabla 3-1 Hahne y Grigull [23] han elaborado un resumen muy completo de factores de forma para una amplia variedad de geometrías. Obsérvese que el coseno hiperbólico inverso puede ser calculado a partir de

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Para una pared tridimensional, como la de un horno, se utilizan diversos factores de forma para calcular el flujo de calor a través de las secciones de los bordes y vértices. Cuando todas las dimensiones interiores son mayores que un quinto del espesor de la pared,

$$S_{\text{pared}} = \frac{A}{L} \qquad S_{\text{vista}} = 0.540 \qquad S_{\text{vértice}} = 0.15L$$

donde A = **área de la pared**
L = **espesor de la pared**
D = **longitud del vértice**

Estas dimensiones se encuentran ilustradas en la Fig. 3-4. Obsérvese que el factor de forma por unidad de profundidad está dado por la razón M/N cuando se utiliza el método de cuadrados curvilíneos para los cálculos. El uso del factor de forma para hacer cálculos se ilustra en los Ejs. 3-l y 3-2.

Ejemplo 3-1

Un tubo horizontal de 15 cm de diámetro y 4 m de largo se encuentra enterrado a 20 cm de profundidad. La temperatura de la pared del tubo es 75 °C y la temperatura de la superficie de la Tierra es de 5 °C. Suponiendo que la conductividad térmica de la Tierra es de 0.8 W/m·°C, calcule el calor perdido por el tubo.

Solución

En esta solución podemos calcular el factor de forma utilizando la ecuación dada en la Tabla 3-l. Como $D < 3r$,

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r) = \cosh^{-1}(20/7.5) =} = \frac{2\pi(4)}{} = 15.35\ \text{m}$$

El flujo de calor se calcula a partir de

$$q = kS\ PT = (0.8)(15.35)(75 - 5) = \mathbf{859.6\ W}\ \ [2933\ \text{Btu/h}]$$

Tabla 3-1 Factores de forma de conducción, resumidos de las Refs. 6 y 7

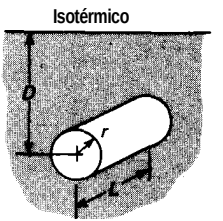
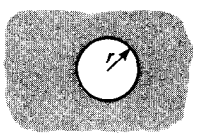
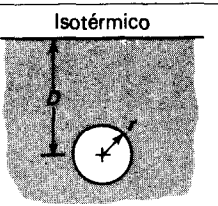
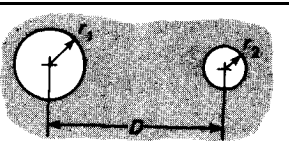
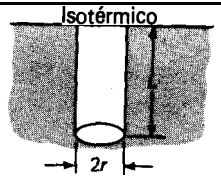
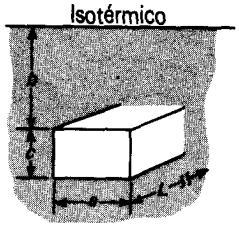
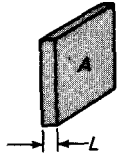
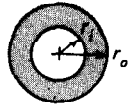
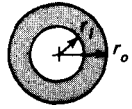
Sistema físico	*Esquemático*	*Factor de forma*	*Restricciones*
Cilindro isotérmico de radio r sumergido en un medio *semiinfinito* que tiene superficie isotérmica		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)}$	$L \gg r$
		$\frac{2\pi L}{\ln (2D/r)}$	$L \gg r$ $D > 3r$
		$\frac{2\pi L}{\ln \frac{L}{r}\left\{1 + \frac{\ln [L/(2D)]}{\ln (L/r)}\right\}}$	$D \gg r$ $L \gg D$
Esfera isotérmica de radio r sumergida en un medio infinito		$4\pi r$	
Esfera isotérmica de radio r sumergida en un medio semiinfinito que tiene superficie isotérmica		$\frac{4\pi r}{1 - r/2D}$	
Conducción entre dos cilindros isotérmicos sumergidos en un medio infinito		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$

Tabla 3-1 (Continuación)

Cilindro isotérmico de radio r colocado en un medio semiinfinito como se muestra		$\frac{2\pi L}{\ln (2L/r)}$	$L \gg 2r$
Paralelepípedo rectangular isotérmico sumergido en un medio semiinfinito que tiene superficie isotérmica		$1.685L\ [\log\ (1 + \frac{b}{a})]^{-0.59} (\frac{b}{c})^{-0.078}$	Véase Ref. 7
Pared plana		$\frac{A}{L}$	Flujo de calor unidimensional
Cilindro hueco longitud L		$\frac{2\pi L}{\ln (r_o/r_i)}$	$L \gg r$
Esfera hueca		$\frac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$	

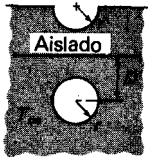
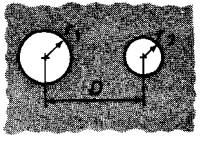
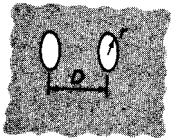
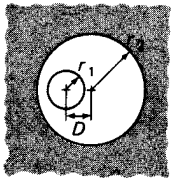
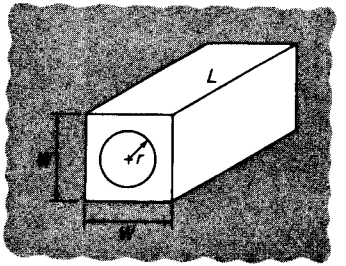
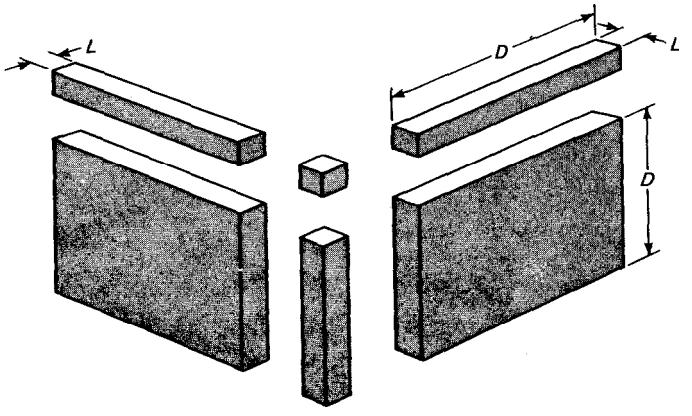
Sistema físico	Esquemático	Factor de forma	Restricciones
Disco delgado horizontal sumergido en un medio sumiinfínito con superficie isotérmica		$4r$ $8r$	$D = O$ $D \gg 2r$
Hemisferio sumergido en un medio semiinfinito		$2\pi r$	
Esfera isotérmica sumergida en un medio semiinfinito con superficie aislada		$\frac{4\pi r}{1 + r/2D}$	
Dos esferas isotérmicas sumergidas en un medio infinito		$\frac{4\pi}{\frac{r_2}{r_1}\left[1 - \frac{r_1/D)^4}{1 - (r_2/D)^2}\right] - \frac{2r_2}{D}}$	$D > 5r$
Placa restangular delgada de longitud L, sumergida en un medio semiinfinito que tiene superficie isotérmica		$\frac{\pi W}{\ln (4W/L)}$ $\frac{2\pi W}{\ln (4W/L)}$	$D = O$ $D \gg W$

Tabla 3-I (Continuación)

Discos paralelos sumergidos en un medio infinito		$\frac{4\pi}{2\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(r/D)\right]}$	$D > 5r$
Cilindros excéntricos de longitud L		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r_2$
Cilindro centrado en un cuadrado de longitud L		$\frac{2\pi L}{\ln(0.54W/r)}$	$L \gg W$



Rg. 3-4 Esquema que ilustra dimensiones que se utilizan en el cálculo de factores de forma tridimensionales.

Ejemplo 3-2

Un horno cúbico pequeño de 50 X 50 x 50 cm está construido en su interior can ladrillo refractario (k = 1.04 W/m·°C) con un espesor de pared de 10 cm. El interior del horno se mantiene a 500°C, y el exterior a 50 °C. Calcule el calor perdido a través de las paredes.

Solución

Calculamos el factor de forma total sumando los factores de forma de las paredes. bordes y esquinas:

Paredes: $$S = \frac{A}{L} = \frac{(0.5)(0.5)}{0.1} = 2.5 \text{ m}$$

Bordes: $$S = 0.540 = (0.54)(0.5) = 0.27 \text{ m}$$

Vértices: $$S = 0.151, = (0.15)(0.1) = 0.015 \text{ m}$$

Hay seis secciones de paredes, doce bordes y ocho esquinas. de manera que el factor de forma total es

$$S = (6X2.5) + (12)(0.27) + (8)(0.015) = 18.36 \text{ m}$$

y el flujo de calor se calcula como

$$q = kS\,\Delta T = (1.04)(18.36)(500 - 50) = 8.592 \text{ kW} \quad 129{,}320 \text{ Btu/h}$$

3-5 Método numérico de análisis

Durante los últimos 100 años se ha acumulado un inmenso número de soluciones analíticas para los problemas de transferencia de calor. Aun así, en numerosas situaciones prácticas, la geometría o condiciones de frontera son tales que no se ha podido obtener una solución analítica, o si se ha desarrollado una solución, ésta involucra una solución en serie tan compleja que la evaluación numerica se vuelve en extremo

difícil. Para tales situaciones el enfoque más fructífero es el que se basa en técnicas de diferencia finita, cuyos principios básicos presentaremos brevemente en esta sección. Claro está que el rápido desarrollo de las computadoras de alta velocidad ha permitido al especialista práctico en transferencia de calor, obtener soluciones numéricas a muchos problemas que hasta el momento se pensaban imposibles.

Considérese un cuerpo bidimensional que se ha de dividir en incrementos iguales tanto en la dirección x como en lay, tal como se muestra en la Fig. 3-5. Los puntos nodales están designados como se muestran; las posiciones m indican el incremento x y las n indican el incremento y. Deseamos establecer las temperaturas en cualquiera de estos puntos nodales dentro del cuerpo, utilizando la Ec. 3-1 como una condición dominante. Se usan diferencias finitas para aproximar incrementos diferenciales en las coordenadas de temperatura y espacio; y entre más pequeños escojamos estos incrementos finitos, más exacta será la aproximación de la verdadera distribución de temperatura.

Los gradientes de temperatura se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n+1/2} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n-1/2} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n+1/2} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n-1/2}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

De este modo, la aproximación de diferencias finitas para la Ec. 3-1 se convierte en:

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si Ax = Ay, entonces:

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

Como estamos considerando el caso de conductividad térmica constante, todos los flujos de calor pueden ser expresados en términos de diferenciales de temperatura. La Ec. 3-24 establece de manera muy simple que el flujo de calor neto dentro de cualquier nodo es cero en condiciones de estado estacionario. En efecto, el enfoque numérico de diferencias finitas reemplaza la distribución de temperatura continua por medio

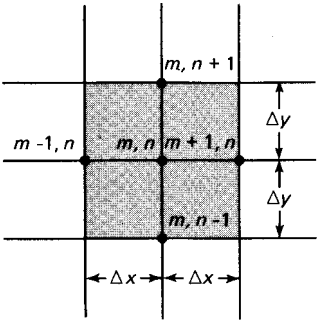


Fig. 3-5 Esquema que ilustra la nomenclatura utilizada en el análisis numérico bidimensional de conducción de calor.

de barras de conducción de calor ficticias conectadas entre puntos nodales pequeños que no generan calor.

También podemos diseñar un esquema de diferencias finitas para tomar en cuenta la generación de calor. Simplemente añadimos el término q/k dentro de la ecuación general y obtenemos:

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Entonces para una rejilla cuadrada en la que Ax = Ay,

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{q(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0 \qquad (3\text{-}24a)$$

Para utilizar el método numérico, se deberá escribir la Ec. 3-24 para cada nodo dentro del material y resolver el sistema de ecuaciones resultante para las temperaturas en los diversos nodos. En la Fig. 3-6 se muestra un ejemplo muy simple, y las cuatro encuaciones para los nodos 1, 2, 3 y 4 serán

$$100 + 500 + T_2 + T_3 - 4T_1 = 0$$
$$T_1 + 500 + 100 + T_4 - 4T_2 = 0$$
$$100 + T_1 + T_4 + 100 - 4T_3 = 0$$
$$T_3 + T_2 + 100 + 100 - 4T_4 = 0$$

Estas ecuaciones tienen la solución

$$T_1 = T_2 = 250\ ^\circ\text{C} \qquad T_3 = T_4 = 150^\circ\text{C}$$

Una vez que las temperaturas están determinadas, el flujo de calor puede ser calculado de:

$$q = \sum k\ \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

en donde el ΔT es tomado en las fronteras. En el ejemplo, el flujo de calor puede ser calculado ya sea, en la cara de 500 °C o en las tres caras de 100 °C. Si se utiliza una rejilla suficientemente fina, los dos valores deberán ser muy parecidos. En general, para los cálculos es casi siempre mejor tomar el promedio aritmético de los dos valores. En el ejemplo los dos cálculos dan como resultado:

Cara a 500 °C:

$$q = -k\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250 \quad 500) + (250 \quad 500)] = 500k$$

Cara a 100 °C:

$$q = -k\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (150 \quad 100) + (150 - 100) + (250 - 100)] = -5OOk$$

y en este caso los dos valores concuerdan. El cálculo del flujo de calor en casos que involucran fronteras curvas o formas complicadas es tratado por Dusinberre [3], Schneider [2] y Myers [15].

Cuando el sólido es expuesto a alguna condición de frontera de convección, las temperaturas en la superficie deberán calcularse de un modo diferente al expuesto. Considérese la frontera que se muestra en la Fig. 3-7. El balance de energía en el nodo (m, n) es

$$-k\,\Delta y\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y} - k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} = h\Delta y(T_{m,n} - T_\infty)$$

Si Ax = Ay, la temperatura de frontera está expresada en la ecuación

$$T_{m,n}\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) - \frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty \quad \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) = 0 \qquad (3\text{-}25)$$

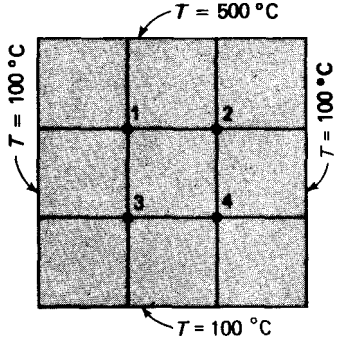


Figura 3-g

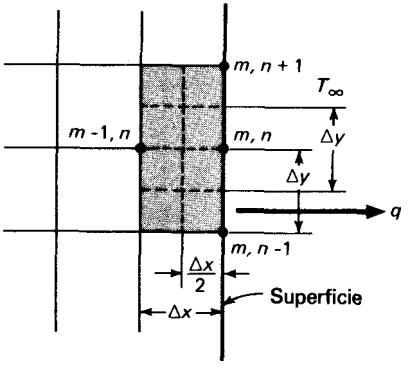


Fig. 3-7 Nomenclatura para una ecuación nodal con condición de frontera de convección.

Se deberá escribir una ecuación de este tipo para cada nodo a lo largo de la superficie que se muestra en la Fig. 3-7. En consecuencia, cuando está presente una condición de frontera de convección, se utiliza una igualdad como la Ec. 3-25 en la frontera y una como la Ec. 3-24 para los puntos interiores.

La Ec. 3-25 se aplica a superficies planas expuestas a condiciones de frontera de convección. No se podrá aplicar en otras situaciones, tales como una pared aislada o una esquina expuesta a condiciones de frontera de convección. Considérese la sección de la esquina que se muestra en la Fig. 3-8. El balance de energía para la sección de la esquina es

$$-k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} = h\frac{\Delta x}{2}(T_{m,n} - T_\infty) + h\frac{\Delta y}{2}(T_{m,n} - T_\infty)$$

Si $\Delta x = \Delta y$,

$$2T_{m,n}\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) - 2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty - (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) = 0 \qquad (3\text{-}26)$$

Se pueden tratar de manera similar otras condiciones de frontera y la Tabla 3-2 (Pág. 97) da un resumen adecuado sobre las ecuaciones nodales para diversas situaciones geométricas y de frontera. Las situaciones f y g son de particular interés ya que proporcionan las ecuaciones de cálculo que pueden utilizarse con fronteras curvas y continuar usando incrementos uniformes en Ax y Ay.

Ejemplo 3-3

Considérese el cuadrado de la Fig. 3-6. La cara izquierda se mantiene a 100 °C y la rara superior a 500 "C. mientras que las otras **dos caras están expuestas a un medio a 100 "C:**

$$h = 10\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad k = 10\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}$$

El bloque es 1 m². Calcule las temperaturas de los diversos nodos romo se indicó en la Fig. 3-9, y loe flujos de calor en las fronteras.

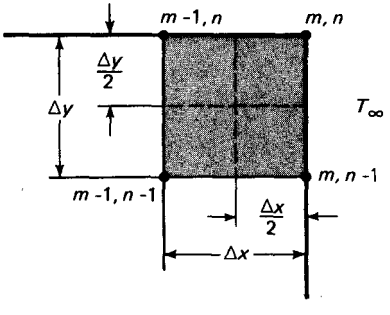


Fig. 3-8 Nomenclatura para ecuación nodal con convección en una sección de esquina.

Solución

La ecuación nodal para los nodos, 1, 2, 4 y 5 es:

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

La ecuación para los nodos 3, 6, '7 y 8 está dada por la Ec. 3-25, y la ecuación para el nodo 9 está dada por la Ec. 3-26:

$$\frac{h\ \Delta z}{k} = \frac{(10)(1)}{(3)(10)} = \frac{1}{3}$$

las ecuaciones para los nodos 3 y 6 se escriben entonces

$$2T_2 + T_6 + 567 - 4.67T_3 = 0$$

$$2T_5 + T_3 + T_9 + 67 - 4.67T_6 = 0$$

Las ecuaciones para los nodos 7 y 8 están dadas por

$$2T_4 + T_8 + 167 - 4.67T_7 = 0$$

$$2T_5 + T, + T_9 + 67 - 4.67T_8 = 0$$

y la ecuación para el nodo 9 es

$$T_6 + T_8 + 67 - 2.67T_9 = 0$$

Entonces tenemos nueve ecuaciones y nueve temperaturas nodales desconocidas. Pronto discutiremos las técnicas de resolución pero por el momento sólo daremos las respuestas:

Nodo	*Temperatura, °C*
1	280.67
2	330.30
3	309.38
4	192.38
5	231.15
6	217.19
7	157.70
8	184.71
9	175.62

Los flujos de calor en las fronteras se calculan de dos maneras: como flujos de conducción para las caras de 100 y 500 °C y como flujos de convección para las otras dos. Para la cara a 500 °C, el flujo de calor hacia el *interior* de la cara es:

$$q = \Sigma k\ \Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y} = (10)[500 - 280.67 + 500 - 330.30 + (500 - 309.38)(\tfrac{1}{2})]$$

$$= 4843.4\ \text{W/m}$$

El flujo de calor hacia *afuera* de la cara de 100 °C es

$$q = \Sigma k\ \Delta y \frac{\Delta T}{\Delta x} = (10X280.67 - 100 + 192.38 - 100 + (157.70 - 100)(\tfrac{1}{2})]$$

$$= 3019\ \text{W/m}$$

El flujo de calor hacia *afuera* de la cara derecha está dado por la relación de convección

Tabla 3-2 **Resumen de fórmulas nodales para cálculos de diferencia finita (Las líneas achuradas indican elemento de volumen).**

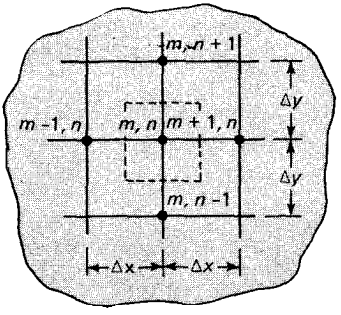
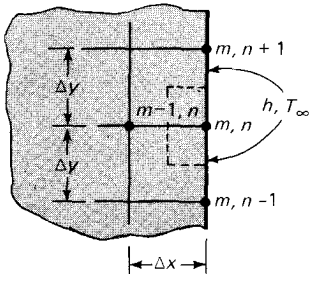
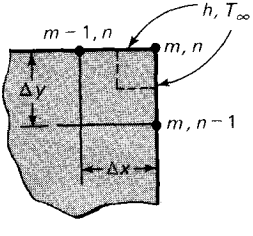
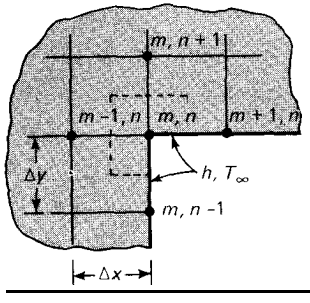
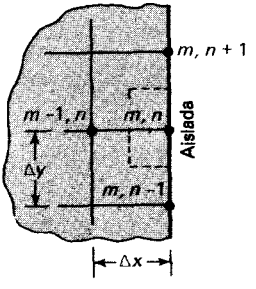
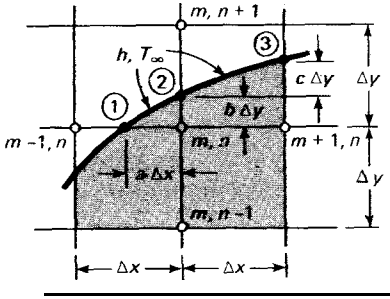
Situación física	*Ecuación nodal para incrementos iguales en* x *y* y
(a) Nodo interior 	$0 = T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n}$
(b) Nodo de frontera de convección 	$0 = \frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) T_{m,n}$
(c) Vértice exterior con frontera de convección 	$0 = 2\frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) - 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) T_{m,n}$
(d) Vértice interior con frontera de convección 	$0 = 2\frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(3 + \frac{h\,\Delta x}{k}\right) T_{m,n}$

Tabla 3-2 Resumen de fórmulas nodales para cálculos de diferencia finita *(continuación)* (Las líneas achuradas indican elemento de volumen).

Situación física	*Ecuación* nodal para *incrementos iguales en x y y*
(e) Frontera aislada 	$0 = T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n}$
(f) Nodo interior cerca de una frontera curva 	$0 = \frac{2}{b(b+1)} T_2 + \frac{2}{a+1} T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1} T_{m,n-1} + \frac{2}{a(a+1)} T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) T_{m,n}$
(g) Nodo frontera con convección a lo largo de una frontera curva-nodo 2 para (f) arriba	$0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} T_3 + \frac{a+1}{b} T_{m,n} + \frac{h\,\Delta x}{k}(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) T_\infty - \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2})\frac{h\,\Delta x}{k}\right] T_2$

$$q = \Sigma h\,\Delta y(T - T_\infty)$$
$$= (10)(\tfrac{1}{3})[309.38 \quad 100 + 217.19 - 100 + (175.62 - 100)(\tfrac{1}{2})]$$
$$= 1214.6 \text{ W/m}$$

Finalmente, el flujo de calor hacia *afuera* de la cara del fondo es

$$q = \Sigma h\,\Delta x(T - T_\infty)$$
$$= (10)(\tfrac{1}{3})[(100 - 100)(\tfrac{1}{2}) + 157.70 - 100 + 184.71 - 100 + (175.62 - 100)(\tfrac{1}{2})]$$
$$= 600.7 \text{ W/m}$$

El flujo total hacia afuera es

$$q_{sal} = 3019 + 1214.6 + 600.7 = 4834.3 \text{ W/m}$$

Esto se compara en forma favorable con los 4843.4 W/m conducidos hacia la cara superior.

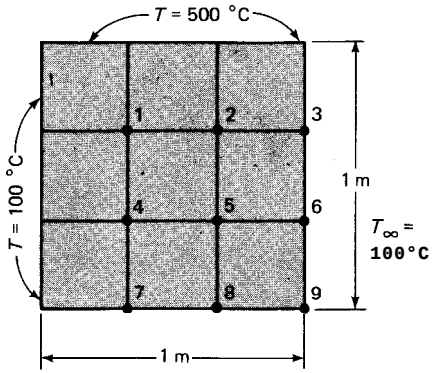


Fig. 3-9 Nomenclatura para el Ej. 3-3.

Técnicas de resolución

Por la discusión precedente hemos visto que el método numérico es simplemente un medio de aproximar una distribución continua de temperatura con los elementos nodales finitos. A mayor número de nodos tomados, más exacta será la aproximación; pero claro está, más ecuaciones significa soluciones más engorrosas. Afortunadamente, las computadoras y aun las calculadoras programables son capaces de obtener estas soluciones con mucha rapidez.

En problemas prácticos la selección de un elevado número de nodos puede ser superflua debido a las incertidumbres en las condiciones de frontera. Por ejemplo, no es excepcional tener incertidumbres de ± 15 a 20% en el coeficiente de convección h.

Las ecuaciones nodales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \ldots + a_{1n}T_n &= C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \ldots &= C_2 \\ a_{31}T_1 + \cdots &= C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}T_1 + a_{n2}T_2 + \ldots + a_{nn}T_n &= C_n \end{aligned} \tag{3-27}$$

donde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son las temperaturas nodales desconocidas. Utilizando la notación **matricial**

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \\ a_{31} & & \cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \\ \\ C_n \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \\ \\ T_n \end{bmatrix}$$

La Ec. 3-27 se puede expresar como

$$[A][T] = [C] \tag{3-28}$$

y el problema es encontrar la inversa de [A] de manera que

$$[T] = [\text{Al-'[Cl} \tag{3-29}$$

Designando $[A]^{-1}$ por

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

las soluciones finales para las temperaturas desconocidas están escritas en su forma desarrollada como

$$\begin{aligned} T, &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + . + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + . + b_{nn}C_n \end{aligned} \tag{3-30}$$

Es evidente que entre mayor sea el número de nodos, más compleja será la solución y tomará más tiempo, aun con una computadora de alta velocidad. Para la mayor parte de los problemas de conducción, la matriz contiene un gran número de elementos cero, de manera que se puede realizar cierta simplificación en el procedimiento. Por ejemplo, la notación matriz para el sistema del Ej. 3-3 será

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-4 & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4.67 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4.67 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2.6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -500 \\ -567 \\ -100 \\ 0 \\ -67 \\ -167 \\ -67 \\ -67 \end{bmatrix}$$

Vemos que debido a la estructura de las ecuaciones la matriz de coeficiente es muy dispersa. Por tal razón, pueden ser muy eficaces los métodos iterativos de resolución. El método Gauss-Seidel es uno de los que trataremos más adelante. El llamado método de relajación es un viejo método adecuado para cálculos a mano con un pequeño número de nodos. En esta técnica se hace que la ecuación nodal sea igual a algún residual $\bar{q}_{m,n}$ y se sigue el siguiente procedimiento para el cálculo:

1. Se suponen valores para las temperaturas nodales.
2. Se calcula el valor del residual para cada nodo a partir de la ecuación respectiva y las temperaturas supuestas.
3. Se "relajan" a cero los residuales cambiando las suposiciones de las temperaturas nodales. Casi siempre se relajan primero los residuales más altos.
4. Como se ha cambiado cada temperatura nodal se deberá calcular un nuevo residual para los nodos conectivos.

5. Se continúa el procedimiento hasta que los residuales sean lo suficientemente cercanos a cero.

En las Tablas 3-3 y 3-4 se muestran las soluciones de relajamiento para los dos ejemplos previos. En su mayor parte, el método de relajamiento se empleará como un medio apropiado sólo cuando no se tiene a mano una computadora.

Otros métodos de resolución comprenden un análisis transiente llevado hasta un estado estacionario (véase el Cap. 4), eliminación directa (eliminación de Gauss [9]) o técnicas iterativas más sofisticadas [14]. Existe un gran número de programas de computación para la solución de problemas de transferencia de calor. Kern y Kraus [19] presentan tanto programas de estado estacionario como transientes que pueden manejar hasta 300 nodos. En la Ref. 17 hay un programa general de análisis de circuito aplicable a problemas de transferencia de calor, y la mayor parte de los centros de cómputo tienen algún tipo de programa propio para cálculos de transferencia de calor. En las Refs. 11 y 19 se da mayor información sobre técnicas numéricas.

3-6 Formulación numérica en términos de elementos de resistencia

Hasta ahora hemos mostrado cómo se pueden resolver los problemas de conducción por medio de aproximaciones de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales. Para cada nodo se formula una ecuación nodal y se resuelve el conjunto de ecuaciones para las temperaturas a través del cuerpo. Del mismo modo, al formular las ecuaciones prodríamos haber utilizado un concepto de resistencia para describir la transferencia de calor entre los nodos. Designando nuestro nodo de interés con el subíndice i y los nodos adyacentes con el subíndice j, tenemos la situación general de nodo de conducción que se muestra en la Fig. 3-10. En estado estacionario la entrada neta de calor hacia el nodo i debe ser cero o

$$q_i + \sum_j \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0 \tag{3-31}$$

Tabla 3-3 Tabla de relajación para el sistema de la Fig. 3-6

T_1	q_1	T_2	$\tilde{q}_2$	T_3	$\tilde{q}_3$	T_4	$\tilde{q}_4$
300	-100	300	-100	200	-100	200	-100
275	0		-125		-125		
	-30	270	-5				-130
			-45		-165	160	30
	-70			160	-5		-10
255	10		-65		-25		
	0	260	-25				-20
	-5			155	-5		-25
	-15	250	15				-35
			5		-15	150	5
	-20			150	5		0
250	0		0		0		

Tabla 3-4 Método de relajación para la frontera de convección de la Fig. 3-9

	T_1	$\tilde{q}_1$	T_2	$\tilde{q}_2$	T_3	$\tilde{q}_3$	T_4	$\tilde{q}_4$	T_5	$\tilde{q}_5$	T_6	$\tilde{q}_6$	T_7	$\tilde{q}_7$	T_8	$\tilde{q}_8$	T_9	$\tilde{q}_9$
	300	− 100	300	0	200	383	200	-50	200	0	150	117	150	17	150	67	150	-33
				100	300	-84						217						
						-34				50	200	-16						17
	275	0		75				75										
		25	325	-25		16				75								
										85				27	160	20		27
		5					180	5		65				-13				
				-5				25	220	-15		24				60		
												44				80	170	-27
		15					190	-15		-5				7				
						26				5	210	-3						-17
										15				17	170	33		-7
				5	310	-21						7						
				9				-11	224	-1		15				41		
								-6					155	-6		46		
				4	305	2						10						
	279	-1		8				-2										
		1	327	0		6				1								
						8				3	212	1						-5
				2	307	-1						3						
								-3					154	-1		45		
										13				9	180	-2		5
				5				0	227	1		9				4		
								2					156	0		6		
						i				3	214	0						7
												3				9	173	-1
										5				2	182	0		1
Valores finales	279	1	327	5	307	1	190	2	227	5	214	3	156	2	182	0	173	1

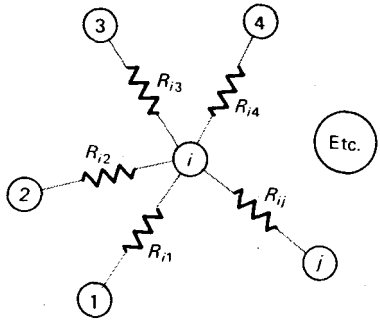


Fig. 3-10 Nodo general de conducción.

en donde q_i es el calor enviado al nodo i por generación de calor, radiación, etc. Los R_{ij} pueden tomar la forma de fronteras de convección, conducción interna, etc., y se puede fijar la Ec. 3-31 como igual a algún residual para una solución de relajación o igual a cero para ser tratada por métodos matriciales.

No se obtiene ninguna información nueva al usar una formulación de resistencia, pero algunas personas pueden encontrar conveniente trabajar con estos términos. Cuando se pretende realizar una resolución numérica que tenga en cuenta variaciones de propiedades, la formulación de resistencia es muy útil.

Para conveniencia del lector la Tabla 3-5 enumera los elementos de resistencia que corresponden a los nodos de la Tabla 3-2. Obsérvese que todos los elementos de resistencia son para espesor unitario del material y Ax = Ay. La nomenclatura para la tabla es que R_{m+} se refiere a la resistencia en el lado x positivo del nodo (m, n), R_{n-} se refiere a la resistencia en el lado negativo y del nodo (m, n) y así sucesivamente.

La formulación de resistencia también es útil para soluciones numéricas de formas tridimensionales complicadas. Los elementos de volumen para los tres sistemas comunes de coordenadas se muestran en la Fig. 3-l 1, y las resistencias nodales internas para cada sistema aparecen en la Tabla 3-6. La nomenclatura para los subíndices (m, n, k) está dada en la parte superior de la tabla y los signos más o menos en los subíndices de resistencia designan las resistencias en la dirección positiva o negativa a partir del nodo central (m, n, k). También se encuentra indicado para cada sistema coordenado el volumen elemental AV. Observamos desde luego, que en un problema práctico los incrementos de las coordenadas se escogen con frecuencia de manera que Ax = Ay = Δz, etc. y las resistencias se simplifican.

3-7 Iteración Gauss-Seidel

Cuando el número de nodos es muy elevado, una técnica iterativa proporcionará con frecuencia una solución a la ecuación nodal más eficaz que la proporcionada por una inversión directa de la matriz. Uno de estos métodos es el llamado iteración de *Gauss-Seidel* y se aplica de la siguiente manera. A partir de la Ec. 3-31 podemos resolver para la temperatura T_i en términos de las resistencias y temperaturas de los nódulos adyacentes T_j como:

Tabla 3-5 Resistencias para los nodos de la tabla 3-2

Δx = Ay, Az = 1

Situación física	R_{m+}	R_{m-}	R_{n+}	R_{n-}	AV
(a) Nodo interior	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$(\Delta x)^2$
(b) Frontera de convección	$\frac{1}{h\Delta x}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{2}$
(c) Vértice exterior, *convección*	$\frac{2}{h\Delta x}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{h\Delta x}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{4}$
(d) Vértice interior. convección*	$\frac{2}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3(\Delta x)^2}{4}$
(e) Frontera aislada	∞	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{2}$
(f) Nodo interior cerca de una frontera curva	$\frac{2}{(b+1)k}$ al nodo $(m+1, n)$	$\frac{2a}{(b+1)k}$ al nodo 1	$\frac{b}{(a+1)k}$ al nodo 2	$\frac{2}{(a+1)k}$ al nodo $(m, n-1)$	$[2a(b+1)+b+c+1]\frac{(\Delta x)^2}{4}$
(g) Nodo de frontera con el nodo 2 de frontera curva anterior (f)	$R_{23} = \frac{2\sqrt{c^2+1}}{bk}$ $R_{21} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{bk}$ $R_{2-\infty} = \frac{2}{h\Delta x(\sqrt{c^2+1}+\sqrt{a^2+b^2})}$ $R_{n-} = \frac{2b}{k(a+1)}$ al nodo (m, n)				

• También $R_\infty = 1/h\Delta x$ para convección a T_∞.

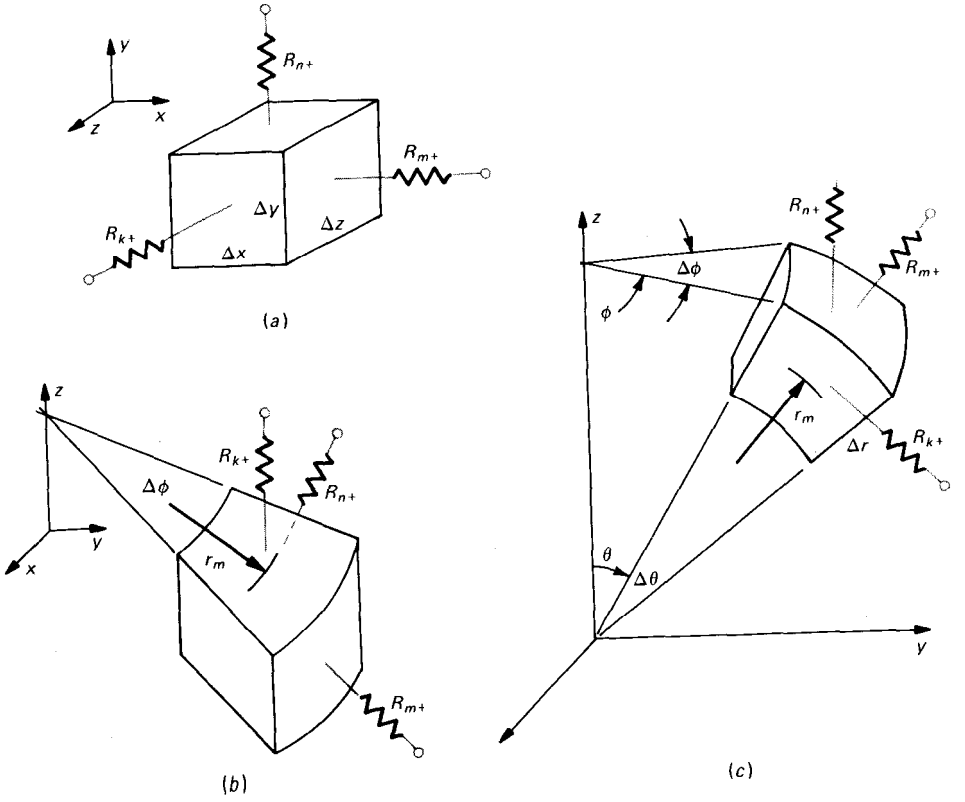


Fig. 3-11 Elementos de volumen y resistencia: Sistemas coordenados *(a)* cartesiano, *(b)* cilíndrico y *(c)* esférico.

Tabla 3-6 Resistencias nodales internas para diferentes sistemas coordenados

	Cartesiano	*Cilíndrico*	*Esférico*
Nomenclatura para incrementos	x, m y, n z, k	r, m ϕ, n z, k	r, m ϕ, n θ, k
Elemento de volumen A V	Δx Ay Δz	r_m Ar $\Delta\phi\ \Delta z$	r_m^2 sen θ Ar $\Delta\phi\ \Delta\theta$
R_{m+}	$\frac{\Delta x}{\text{Ay}\ \Delta z\ k}$	$\frac{\text{Ar}}{(r_m + \Delta r/2)\ \Delta\phi\ \Delta z\ k}$	$\frac{\Delta r}{(\text{r,,,} + \Delta r/2)^2 \text{ sen } \theta \Delta\phi\ \Delta\theta\ k}$
R_{m-}	$\frac{\Delta x}{\text{Ay}\ \Delta z\ k}$	$\frac{\text{Ar}}{(r_m\ \ \Delta r/2)\ \Delta\phi\ \Delta z\ k}$	$\frac{\text{Ar}}{(r_m + \Delta r/2) \text{ sen } \theta\ \Delta\phi \text{ he } k}$
R_{n+}	$\frac{Ay}{\text{Ax}\ \Delta z\ k}$	$\frac{r_m\ \Delta\phi}{\text{Ar Az } k}$	$\frac{\Delta\phi \text{ sen } \theta}{\text{Ar Aek}}$
R_{n-}	$\frac{\Delta y}{\Delta x\ \Delta z\ k}$	$\frac{r_m\ \Delta\phi}{\text{Ar Az } k}$	$\frac{\Delta\phi \text{ sen } \theta}{\Delta r \text{ Aek}}$
R_{k+}	$\frac{\Delta z}{\Delta x\ \Delta y\ k}$	$\frac{\Delta z}{r_m\ \Delta\phi\ \Delta r\ k}$	$\frac{\Delta\theta}{\text{sen } (\theta + \Delta\theta/2) \text{ Ar } \Delta\phi\ k}$
R_{k-}	$\frac{\text{AZ}}{\Delta x \text{ Ay } k}$	$\frac{\text{AZ}}{r_m\ \Delta\phi\ \Delta r\ k}$	$\frac{\Delta\theta}{\text{sen } (\theta - \Delta\theta/2) \text{ Pr } \Delta\phi\ k}$

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j (T_j/R_{ij})}{\sum_j (1/R_{ij})} \tag{3-32}$$

La iteración de Gauss-Seidel hace uso de las ecuaciones de diferencias expresadas en la forma de la **Ec.** 3-32 a través del siguiente procedimiento.

1. Se supone un conjunto inicial de valores para T_i. Esta suposición inicial se puede obtener a través de cualquier método apropiado. Para la resolución por computadora de un alto número de nodos, con frecuencia se les asigna a las T_i un valor cero al comenzar el cálculo.
2. En seguida se calculan los nuevos valores de las temperaturas nodales T_i de acuerdo a la **Ec.** 3-32, ***usando siempre los valores más recientes del*** T_j.
3. Se repite el proceso hasta que los cálculos sucesivos difieren por una cantidad suficientemente pequeña. En términos de un programa de computación esto significa que se insertará una prueba para parar los cálculos en el momento **que**

$$|T_{i_{n+1}} - T_{i_n}| \leq \delta \qquad \text{para todo } T_i$$

donde δ es alguna constante seleccionada y n es el número de iteraciones. En forma alternativa, se puede seleccionar una prueba no dimensional de manera **que**

$$\epsilon \geq \frac{T_{i_{n+1}} - T_{i_n}}{T_{i_n}}$$

Es obvio que a menor valor de 6, mayor será el tiempo de cálculo requerido para obtener el resultado deseado. Sin embargo, el lector deberá observar que la ***exactitud*** de la solución al problema físico no depende únicamente del valor de 6. Esta constante gobierna la exactitud de la solución del conjunto de ecuaciones de diferencias. La solución al problema físico también depende de la selección del incremento Ax.

Exactitud de las soluciones

Ya hemos observado que la aproximación de diferencias finitas a un problema físico mejora a medida que se utilizan incrementos de Ax y Ay cada vez más pequeños. Pero no hemos dicho cómo estimar la exactitud de esta aproximación. Existen dos enfoques básicos.

1. Compárese la solución numérica con una solución analítica, si ésta existe, 0 con una solución analítica para un problema similar.
2. Escójanse valores de Ax progresivamente menores y obsérvese el comportamiento de la solución. Si el problema ha sido formulado y resuelto de un modo

correcto, las temperaturas nodales deberán converger a medida que Ax disminuye. Se debe observar que los errores de redondeo de la computadora aumentan con el aumento en el número de nodos debido al aumento en el número de cálculos de la máquina. Es por esto que es necesario observar la convergencia de la solución.

Se puede demostrar que el error de la aproximación de diferencias finitas para $\partial T/\partial x$ es del orden de $(\Delta x/L)^2$ en donde L es alguna dimensión característica del cuerpo.

Las soluciones analíticas son de utilidad limitada en el control de la exactitud de un modelo numérico, porque la mayor parte de los problemas que necesitarán resolución por métodos numéricos, o bien no tienen ninguna solución analítica, o si existe una, su cálculo puede resultar demasiado engorroso.

Al estudiar las técnicas de resolución para las ecuaciones nodales, indicamos que una solución exacta para estas ecuaciones no asegura una solución exacta al problema físico. En muchos casos la solución final es un gran error, porque de veras, al comienzo no se planteó correctamente el problema. Ninguna computadora o criterio de convergencia puede corregir esta clase de error. Una manera de controlar los errores de planteamiento es realizar alguna clase de balance de energía utilizando la solución final. La naturaleza del balance varía de problema a problema, pero para el estado estacionario siempre toma la forma de energía de entrada igual a energía de salida. Si el balance de energía no concuerda dentro de los límites razonables, es muy posible que el problema no haya sido formulado en forma correcta. Tal vez haya por aquí o por ahí alguna constante incorrecta, o algún dato de entrada erróneo o se hizo uso defectuoso de alguna orden de computación, o una o más ecuaciones nodales están escritas en forma equivocada. Suponiendo que el balance de energía concuerda, podremos emprender la dirección de utilizar valores de Ax menores a fin de mejorar la exactitud.

En los ejemplos presentamos los balances de energía como una verificación al planteamiento de los problemas.

Exactitud en las propiedades y condiciones de frontera

De vez en cuando hemos mencionado que las conductividades térmicas de los materiales varían con la temperatura; sin embargo, sobre un intervalo de temperatura de 100 a 200 °C la variación no es grande (del orden de 5 a 10%) y está justificado el suponer valores constantes para simplificar soluciones a los problemas. Las condiciones de frontera por convección y radiación son particularmente notorias por su comportamiento variable. Mucho más grave es el hecho de que para muchos problemas prácticos, la incertidumbre básica en nuestro conocimiento sobre coeficientes de transferencia de calor puede no ser mucho mejor que $\pm 20\%$. Las incertidumbres de $\pm 10\%$ en las propiedades de radiación en superficie no son nada extrañas. Por ejemplo, si a una placa de aluminio muy pulida se le deja oxidar exageradamente, absorberá $300\ \%$ más radiación que cuando estaba pulida.

Los comentarios anteriores no fueron hechos para alarmar al lector, sino para mostrar que la selección de un alto número de nodos para el planteamiento numérico no proporciona necesariamente una solución exacta al problema físico; también debemos examinar las incertidumbres en las condiciones de frontera. En este punto el lec-

tor no está preparado para estimar estas incertidumbres. Los capítulos posteriores sobre convección y radiación clarificarán el asunto.

Ejemplo 3-4

Aplíquense las técnicas de Gauss-Seidel para obtener las temperaturas nodales para los cuatro nodos en la Fig. 3-6.

Solución

Para este problema es útil pensar en términos de un plateamiento de resitencia ya que todas las resistencias conectivas entre los nodos de la Fig. 3-6 son iguales; es decir,

$$R = \frac{\Delta y}{k\ \mathrm{Ay}} = \frac{\Delta x}{k\ \mathrm{Ay}} = \frac{1}{k} \qquad (a)$$

Por consiguiente, cuando aplicamos la Ec. 3-32 a cada nodo, obtenemos $(q_{i_{\text{gen}}} = 0)$

$$T_i = \frac{\sum_j k_j T_j}{\sum_j k_j} \qquad (b)$$

Porque cada nodo tiene conectados cuatro resitencias y suponemos que k es constante,

$$\sum_j k_j = 4k$$

y

$$T_i = \frac{1}{4}\sum_j T_j \qquad (c)$$

Ahora establecemos una tabla de iteración como la que se muestra y suponemos como antes temperaturas iniciales de 300 y 200 °C. Se aplica entonces la Ec. c repetidamente hasta obtener una convergencia satisfactoria. En la Tabla, cinco iteraciones proporcionan convergencia con 0.13'. Para ilustrar el cálculo podemos indicar los dos casos específicos a continuación:

$$(T_2)_{n=1} = \tfrac{1}{4}(500 + 100 + T_4 + T_1) = \tfrac{1}{4}(500 + 100 + 200 + 275) = 268.75$$

$$(T_3)_{n=4} = \tfrac{1}{4}(100 + T_1 + T_4 + 100) = \tfrac{1}{4}(100 + 250.52 + 150.52 + 100) = 150.26$$

Obsérvese que al calcular $(T_3)_{n=4}$ hemos usado la información más reciente que poseemos sobre T_1 y T_4

Números de iteracciones n	T_1	T_2	T_3	T_4
0	300	300	200	200
1	275	268.75	168.75	159.38
2	259.38	254.69	154.69	152.35
3	251.76	251.03	151.03	150.52
4	250.52	250.26	150.26	150.13
5	250.13	250.07	150.07	150.03

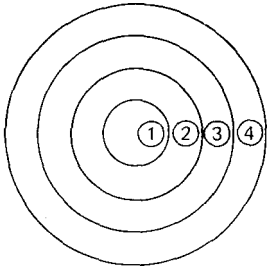


Fig. Ej. 3-5 Ejemplo esquemático.

Ejemplo 3-5: Planteamiento numérico con generación de calor

Ilustramos el planteamiento de resistencia en coordenadas cilíndricas considerando un alambre de 4.0 mm de diámetro con una generación de calor uniforme de 500 mW/m^3. La temperatura exterior en la superficie del alambre es de 200 °C, y la conductividad térmica es 19 $W/m \cdot °C$. Deseamos calcular la distribución de temperatura en el alambre. Con tal propósito seleccionamos cuatro nodos, tal como se muestra en la figura anterior. Haremos los cálculos por unidad de longitud, por tanto permitimos que $\Delta z = 1.0$. Como el sistema es unidimensional, tomamos $\Delta\phi = 2\pi$. Para todos los elementos Δr se escoge igual a 0.5 mm. En seguida calculamos las resistencias y elementos de volumen utilizando las relaciones de la Tabla 3-6 y proporcionamos los valores aquí abajo. El cálculo de R_{m+} para el nodo 4 es diferente de los demás ya que la trayectoria del flujo de calor es menor. Para el nodo 4 r_m es 1.75 mm., por tanto, la resistencia positiva que llega a la temperatura de la superficie que conocemos es

$$R_{m+} = \frac{\Delta r/2}{(r_m + \Delta r/4)\,\Delta\phi\,\Delta z\,k} = \frac{1}{15\pi k}$$

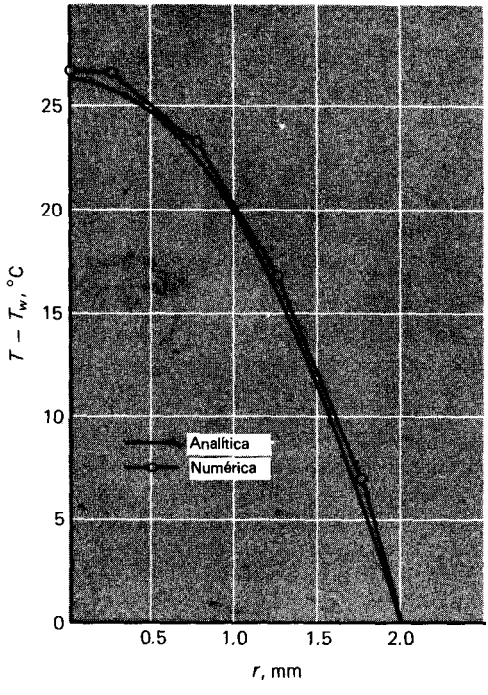


Fig. Ej. 3-5 Comparación de soluciones analítica y numérica.

La temperatura para el nodo 4 se escribe como

$$T_4 = \frac{2749 + 6\pi k T_3 + 15\pi k(200)}{21\pi k}$$

donde el 200 es la temperatura exterior de la superficie que conocemos.

Nodo	r_m, m m	R_{m+}, °C/W	R_{m-}, °C/W	AV $= r_m \Delta r\, \Delta\phi\, \Delta z$, μm^3	$q_i = \dot{q}\, \Delta V$, W
1	0.25	$\frac{1}{2\pi k}$	∞	0.785	392.5
2	0.75	$\frac{1}{4\pi k}$	$\frac{1}{2\pi k}$	2.356	1178
3	1.25	$\frac{1}{6\pi k}$	$\frac{1}{4\pi k}$	3.927	1964
4	1.75	$\frac{1}{15\pi k}$	$\frac{1}{6\pi k}$	*5.498*	*2749*

En seguida se da un resumen de los valores de $\Sigma(1/R_{ij})$ y T_i de acuerdo con la Ec. 3-32 para ser utilizado en un esquema de iteración de Gauss-Seidel.

Nodo	$\sum \frac{1}{R_{ij}}$, W/°C	$T_i = \frac{q_i + \Sigma(T_j/R_{ij})}{\Sigma(1/R_{ij})}$
1	$2\pi k$ = 119.38	$T_1 = 3.288 + T_2$
2	$6\pi k$ = 358.14	$T_2 = 3.289 + \frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_3$
3	$10\pi k$ = 596.90	$T_3 = 3.290 + 0.4T_2 + 0.6T_4$
4	21nk = 1253.50	$T_4 = 2.193 + \frac{2}{7}T_3 + 142.857$

Ahora se tabularán trece iteracciones:

	Temperatura de nodo, °C			
Iteración n	T_1	T_2	T_3	T_4
0	240	230	220	210
1	233.29	227.72	220.38	208.02
2	231.01	227.21	218.99	207.62
3	230.50	226.12	218.31	207.42
4	229.41	225.30	217.86	207.30
5	228.59	224.73	217.56	207.21
6	228.02	224.34	217.35	207.15
7	227.63	224.07	217.21	207.11
8	227.36	223.88	217.11	207.08
9	227.17	223.75	217.04	207.06
10	227.04	223.66	216.99	207.04
11	226.95	223.60	216.95	207.04
12	226.89	223.55	216.93	207.03
13	226.84	223.52	216.92	207.03
Analítica	225.904	222.615	216.036	206.168
Control de Gauss-Seidel	225.903	222.614	216.037	206.775
Solución exacta de ecuaciones nodales	226.75	223.462	216.884	207.017

Podemos comparar la solución iterativa con un cálculo exacto que hace uso de la Ec. Z-250:

$$T - T_w = \frac{q}{4k}(R^2 - r^2)$$

donde T_w es la temperatura de superficie de 200 °C, R = 2.00 mm y r es el valor de r_m para cada nodo. Los valores analíticos aparecen en la parte inferior de la última iteración y entonces se hace un control de Gauss-Seidel en los valores analíticos. Hay una excelente concordancia en los tres primeros nodos y una un poco menor en el nodo 4. Finalmente, se muestran las soluciones exactas para las ecuaciones nodales como comparación. Estos son los valores a los que convergería el esquema iterativo si se continúa lo suficiente. En este límite los cálculos analítico y numérico difieren por un factor constante de cerca de 0.85 °C, y esta diferencia es principalmente el resultado de la manera en la que se manejaron la resistencia de superficie y las condiciones de frontera. Un valor menor de Δr cerca de la superficie producirá una mejor concordancia. En la figura que lo acompaña (Pág, 109) se muestra una comparación gráfica de las selecciones analítica y numérica.

La pérdida total de calor del alambre se puede calcular como conducción a través de R_{m+} en el nodo 4. Entonces

$$q = \frac{T_4 - T_W}{R_{m+}} = 15\pi k(207.03 - 200) = 6.294 \text{ kW/m} \quad [6548 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}]$$

Esto debe ser igual al calor total generado en el alambre, o sea

$$q = \dot{q}V = (500 \times 10^6)\pi(2 \times 10^{-3})^2 = 6.283 \text{ kW/m} \quad [6536 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}]$$

La diferencia entre los dos valores resulta de la inexactitud en la determinación de T_4. La utilización del valor de la solución exacta de 207.017 °C daría una pérdida de calor de 6.2827 kW. Para este problema el valor exacto de flujo de calor es 6.283 kW porque el cálculo de la generación de calor es independiente del planteamiento de diferencia finita.

Ejemplo 3-6: Generación de calor con elementos nodales no uniformes

Una capa de vidrio [k = 0.8 W/m·°C] de 3 mm de espesor tiene adheridas a la superficie superior franjas conductoras de electricidad de 1 mm de grueso, tal como se muestra en la figura. La superficie inferior del vidrio está aislada y la superior expuesta a un medio de convección a 30 °C con h = 100 W/m²·°C. Las franjas generan calor a la rapidez de 40 a 20 W/m de longitud. Determine la distribución de temperatura en estado estacionario en una sección típica del vidrio, utilizando el método numérico para ambas rapideces de generación de calor.

Solución

En la figura se muestra la red nodal para una sección típica del vidrio. En este ejemplo RO hemos escogido Δx = Ay. Debido ala simetría, $T_1 = T_7$, $T_2 = T_6$, etc. y sólo necesitamos resolver para las temperaturas de 16 nodos. Empleamos el planteamiento de resistencia. Como se muestra, hemos escogido Δx = 5 mm y Ay = 1 mm. Ahora podemos calcular las diversas resistencias:

Nodos 1, 2, 3, 4.

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k(\Delta y/2)}{\Delta x} = \frac{(0.8)(0.001/2)}{0.005} = 0.08$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (100)(0.005) = 0.5$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{k\,\Delta x}{\text{Ay}} = \frac{(0.8)(0.005)}{0.001} = 4.0$$

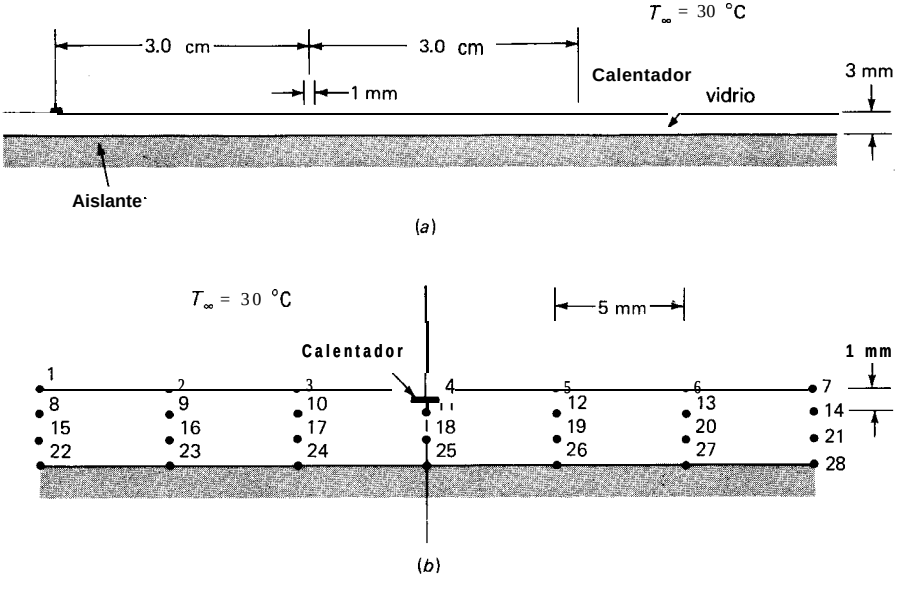


Fig. Ej. 3-6 (*a*) **Sistema físico,** (*b*) **arreglo nodal.**

Nodos 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k\ \Delta y}{\Delta x} = \frac{(0.8)(0.001)}{0.005} = 0.16$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = \frac{k\ \Delta x}{\Delta y} = 4.0$$

Nodos 22, 23, 24, 25:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k(\Delta y/2)}{\Delta x} = 0.08$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{k\ \Delta x}{\Delta y} = 4.0$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = 0 \qquad \text{(superficie aislada)}$$

Las ecuaciones **nodales** se obtienen **de la** Ec. 3-31 en la forma general

$$\Sigma(T_j/R_{ij}) + q_i - T_i\ \Sigma(1/R_{ij}) = 0$$

Sólo el **nodo** 4 tiene **un término de generación** de calor. y $q_i = 0$ para todos los demás nodos. De las resistencias antes mencionadas podemos calcular el $\Sigma(1/R_{ij})$ como

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$
1, 2, 3, 4	4.66
8 , , 18	8.32
22, 23, 24, 25	4.16

Para el nodo 4 la ecuación es

$$(2)(0.08)T_3 + 4.0)T_5 + (0.5)(30) + q_4 - 4.667, = 0$$

El factor de '2 en T_3 aparece porque $T_3 = T_5$ debido a la simetría. Cuando todas las ecuaciones han sido evaluadas y la matriz está resuelta, se obtienen las siguientes temperaturas:

Temperatura de nodo °C	q/L, W/m	
	20	40
1	31.90309	33.80617
2	32.78716	35.57433
3	36.35496	42.70993
4	49.81266	69.62532
8	32.10561	34.21122
9	33.08189	36.16377
10	36.95154	43.90307
11	47.82755	65.65510
15	32.23003	34.46006
16	33.26087	36.52174
17	37.26785	44.53571
18	46.71252	63.42504
22	32.27198	34.54397
23	33.32081	36.64162
24	37.36667	44.73333
25	46.35306	62.70613

Los resultados del modelo y de los cálculos pueden verificarse calculando la pérdida de calor por convección por la superficie superior. Como toda la energía generada en la pequeña franja de calentamiento debe perderse eventualmente por convección (la superficie inferior del vidrio está-aislada y por tanto, no pierde calor), sabemos el valor numérico que deberá tener la convección. La pérdida de calor en la superficie superior se expresa por

$$q_c = \Sigma h_i A_i (T_i - T_\infty)$$

$$= (2)(100)\left[\frac{\Delta x}{2}(T_1 - T_\infty) + \Delta x(T_2 + T_3 - 2T_\infty) + \frac{\Delta x}{2}(T_4 - T_\infty)\right]$$

El factor de 2 tiene en cuenta los dos lados de esta sección. Con $T_\infty = 30$ °C este cálculo da

$$q_c = 19.999995 \quad \text{para } q/L = 20 \text{ W/m}$$

$$q_c = 40.000005 \quad \text{para } q/L = 40 \text{ W/m}$$

Obviamente, el acuerdo es excelente

Ejemplo 3-7: Material compuesto con elementos nodales no uniformes

Un material compuesto se encuentra embebido en un material de alta conductividad térmica mantenido a 400 °C, tal como se muestra. La superficie superior está expuesta a un medio de convección a 30 "C con h = 25 $W/m^{2}\cdot{}^{o}C$. Determine la distribución de temperatura y pérdida de calor por la superficie superior para el estado estacionario.

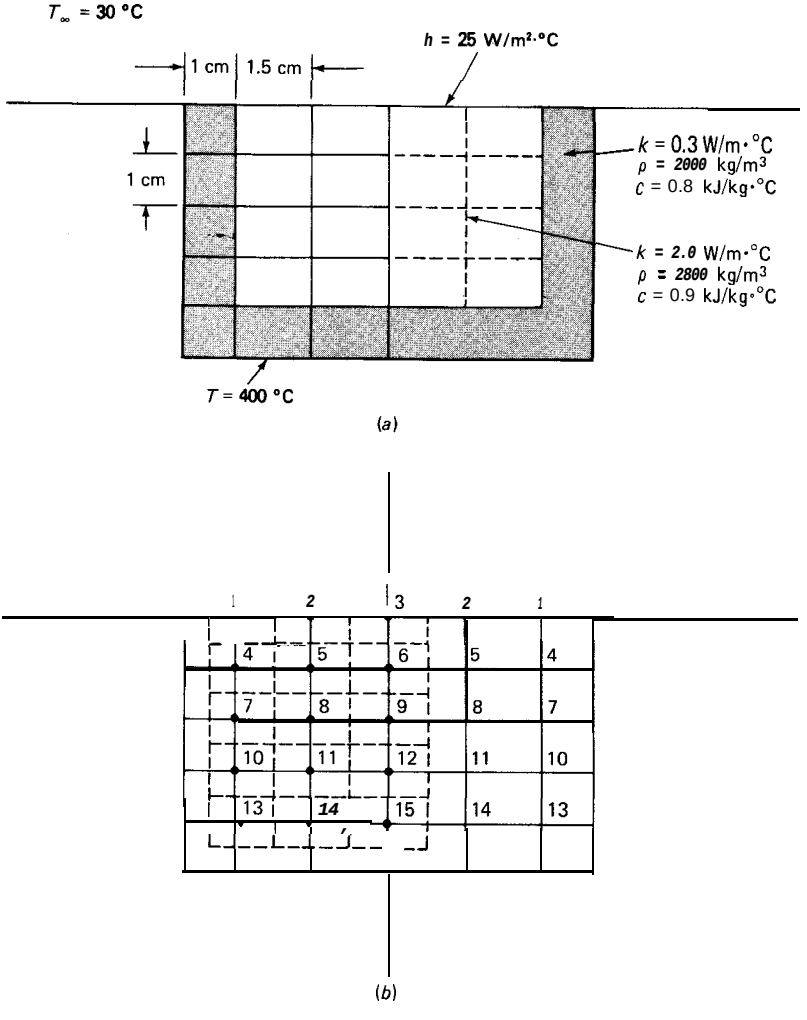


Fig. Ej. 3-7 (*a*) Sistema físico, (*b*) fronteras de nodos.

Solución

Como se muestra, para este ejemplo escogimos nodos no cuadrados. Obsérvese también que los nodos 1, 4, 7, 10, 13, 14 y 15 consisten de dos materiales. Una vez más empleamos el planteamiento de resistencia.

Para el nodo 1:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(2.0)(0.005)}{0.015} = 0.6667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(0.3)(0.005)}{0.01} = 0.15$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (25)(0.005 + 0.0075) = 0.3125$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \left(\frac{kA}{\Delta y}\right)_L + \left(\frac{kA}{\Delta y}\right)_R = \frac{(0.3)(0.005) + (2.0)(0.0075)}{0.01} = 1.65$$

Para los nodos 4, 7, 10:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{(2.0)(0.01)}{0.01} = 1.3333$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0.3)(0.01)}{0.01} = 0.3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = 1.65$$

Para el nodo 13:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{(2.0)(0.005) + (0.3)(0.005)}{0.015} = 0.76667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0.3)(0.01)}{0.01} = 0.3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 1.65$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0.3)(0.0075) + (0.3)(0.005)}{0.01} = 0.375$$

Para los nodos 5, 6, 8, 9, 11, 12:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2.0)(0.01)}{0.015} = 1.3333$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = \frac{(2.0)(0.015)}{0.01} = 3.0$$

Para los nodos 2, 3.

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2.0)(0.005)}{0.015} = 0.6667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (25)(0.015) = 0.375$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = 3.0$$

Para los nodos 14, 15:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2.0)(0.005) + (0.3)(0.005)}{0.015} = 0.76667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 3.0$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0.3)(0.015)}{0.01} = 0.45$$

Para plantear las ecuaciones nodales usaremos la Ec. 3-32. Para el nodo 1, $\Sigma(1/R_{ij}) = 2.7792$ y obtenemos

$$T_1 = \frac{1}{2.7792}[(400)(0.15) + (30)(0.3125) + T_2(0.6667) + 1.65T_4]$$

Para el nodo 3, $\Sigma(1/R_{ij}) = 4.7083$ y la ecuación nodal es

$$T_3 = \frac{1}{4.7083}[T_2(0.6667)(2) + 3.0T_6 + (0.375)(30)]$$

El factor de 2 en T_2 aparece debido al reflejo de T_2 a la derecha de T_3.

Para los otros nodos seguimos un procedimiento similar a fin de obtener 15 ecuaciones nodales con las 15 temperaturas desconocidas. En seguida se podrán resolver estas ecuaciones por el método de cálculo que sea más conveniente. Las temperaturas resultantes son:

$T_1 = 254.956$	$T_2 = 247.637$	$T_3 = 244.454$
$T_4 = 287.334$	$T_5 = 273.921$	$T_6 = 269.844$
$T_7 = 310.067$	$T_8 = 296.057$	$T_9 = 291.610$
$T_{10} = 327.770$	$T_{11} = 313.941$	$T_{12} = 309.423$
$T_{13} = 343.516$	$T_{14} = 327.688$	$T_{15} = 323.220$

El calor que se escapa por la cara superior se obtiene sumando la pérdida por convección de los nodos:

$$\begin{aligned} q_{conv} &= \Sigma hA_i(T_i - T_\infty) \\ &= (2)(25)[(0.0125)(254.96 - 30) + (0.015)(247.64 - 30) + (0.0075)(244.45 - 30)] \\ &= 384.24 \text{ W/m de profundidad} \end{aligned}$$

Como un control a este valor, podemos calcular el calor conducido desde la superficie a 400 °C hacia el interior de los nodos 1, 4, 7, 10, 13, 14 y 15:

$$q_{cond} = \Sigma kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} q_{cond} &= 2\,\frac{0.3}{0.01}[(0.005)(400 - 254.96) + (0.01)(400 - 287.33) + (0.01)(400 - 310.07) \\ &\quad + (0.01)(400 - 327.77) + (0.0225)(400 - 343.52) + (0.015)(400 - 327.69) \\ &\quad + (0.0075)(400 - 323.22)] \\ &= 364.29 \text{ W/m de profundidad} \end{aligned}$$

La concordancia es excelente

Ejemplo 3-8: Condiciones de frontera de radiación

Una franja cerámica de 1 por 2 cm [$k = 3.0$ W/m·°C, $\rho = 1600$ kg/m^3 y $c = 0.8$ kJ/kg·°C] está embebida en un material de alta conductividad térmica, tal como se muestra, de manera que los lados se mantienen a una temperatura constante de 900 °C. La superficie inferior de la cerámica se encuentra aislada, y la superficie superior está expuesta a un medio de convección y radiación a $T_\infty = 50$ °C; $h = 50$ W/m^2·°C, y la pérdida de calor por radiación se calcula a partir de

$$q = \sigma A \epsilon (T^4 - T_\infty^4)$$

donde A es el área de la superficie y $\sigma = 5.669 \times 10^{-8}$ W/m^2·°K^4 y $\epsilon = 0.7$. Resuelva para la distribución de temperatura de estado estacionario de los nodos que se muestran y para la rapidez de pérdida de calor.

Solución

Emplearemos el planteamiento de resistencia y observamos que la radiación puede escribirse, como

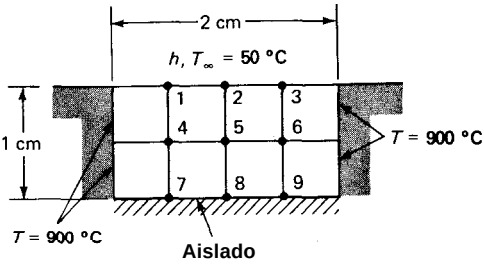


Figura Ejemplo 3-8

$$q = \sigma\epsilon A(T^4 - T_\infty^4) = \frac{T - T_s}{R_{rad}} \qquad (a)$$

$$\frac{1}{R_{rad}} = \sigma\epsilon A(T^2 + T_\infty^2)(T + T_\infty) \qquad (b)$$

De la simetría tenemos que $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$, $T_7 = T_9$, de manera que sólo tenemos seis nodos desconocidos. Ahora calculamos las resistencias:

Nodos 1. 2:

$$\frac{1}{R_{m+}} \quad \frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(3.0)(0.0025)}{} \approx 1.5 \qquad \frac{R_{n-}}{} = \frac{(3.0)(0.005)}{} = 3.0$$

$$\frac{1}{R_{n+,conv}} = hA = (50)(0.005) = 0.25$$

$$\frac{1}{R_{n+,rad}} = \sigma\epsilon A(T^2 + T_\infty^2)(T + T_\infty) \qquad (c)$$

El término de radiación introduce no linealidades y nos forzará a emplear una solución iterativa.

Nodos 4, 5:

$$\text{Toda } \frac{1}{R} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(3.0)(0.005)}{0.005} = 3.0$$

Nodos 7, 8:

$$R_{m+}^{1} \quad \frac{1}{R_{m-}} \quad 1.5 \qquad \frac{1}{R_{n+}} = 3.0$$

Como la superficie inferior está aislada, $1/R_{n-} = 0$. Ahora utilizamos la Ec. 3-32

$$T_i = \frac{\Sigma(T_j/R_{ij})}{\Sigma(1/R_{ij})} \qquad (3\text{-}32)$$

y tabulamos:

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$
1	$6.25 + 1/R_{rad}$
2	$6.25 + 1/R_{rad}$
4	12
5	12
7	6
8	6

Nuestras ecuaciones nodales se expresan así en grados Kelvin debido al término de radiación y se convierten en

$$T_1 = \frac{1}{\Sigma(1/R_{ij})}[1.5T_2 + 3T_4 + (1.5)(1173) + (323)(0.25) + \sigma\epsilon(0.005)(T_1^2 + 323^2)(T_1 + 323)(323)]$$

$$T_2 = \frac{1}{\Sigma(1/R_{ij})}[1.5T_1(2) + 3T_5 + (323)(0.25) + \sigma\epsilon(0.005)(T_2^2 + 323^2)(T_2 + 323)(323)]$$

$$T_4 = \tfrac{1}{12}[(1173)(3.0) + 3T_1 + 3T_7 + 3T_5] \qquad T_5 = \tfrac{1}{12}[2T_4(3.0) + 3T_2 + 3T_8]$$

$$T_7 = \tfrac{1}{6}[(1173)(1.5) + 3T_4 + 1.5T_8] \qquad T_8 = \tfrac{1}{6}[2T_7(1.5) + 3T_5]$$

Los términos de radiación crean un conjunto de ecuaciones muy lejos de la linealidad. El algoritmo de cálculo que usaremos se esboza de la siguiente manera:

1. Suponga que $T_1 = T_2 = 1173$ K.
2. Basándose en esta suposición calcule $1/R_{rad}$ y $\Sigma(1/R_{ij})$ para los nodos 1 y 2.
3. Resuelva este conjunto de ecuaciones para T_1 a T_8.
4. Utilizando valores nuevos para T_1 y T_2 calcule de nuevo los valores $1/R_{rad}$.
5. Utilizando nuevos valores resuelva otra vez las ecuaciones.
6. Repita el procedimiento hasta que las respuestas den una convergencia adecuada

En la tabla inferior se muestran los resultados de seis iteraciones. Como se puede observar la convergencia es bastante rápida. Las temperaturas se encuentran en grados Kelvin.

Iteración	T_1	T_2	T_4	T_5	T_7	T_8
1	*990.840*	**944.929**	1076.181	1041.934	1098.951	1070.442
2	1026.263	991.446	1095.279	1068.233	1113.622	1090.927
3	1019.879	982.979	1091.827	1063.462	1110.967	1087.215
4	1021.056	984.548	1092.464	1064.344	1111.457	1087.901
5	1020.840	984.260	1092.347	1064.182	1111.367	1087.775
6	1020.879	984.313	1092.369	1064.212	1111.384	1087.798

En este punto podemos observar que en los problemas prácticos el valor de ϵ sólo será conocido dentro de una tolerancia de varios porcentajes y por consiguiente, nada se ganará con continuar la resolución hasta una exactitud exagerada.

La pérdida de calor se determina calculando la radiación y convección de la superficie superior (nodos 1, 2, 3):

$$q_{rad} = \Sigma\sigma\epsilon A_i(T_i^4 - 323^4)$$
$$= (5.669 \times 10^{-8})(0.7)(0.005)[(2)(1020.88^4 - 323^4) + 984.313^4 - 323^4] = 610.8 \text{ W/m de profundidad}$$

$$q_{conv} = \Sigma hA_i(T_i - 323)$$
$$= (50)(0.005)[(2)(1020.88 \quad 323) + 984.313 - 323] = 514.27 \text{ W}$$

$$q_{total} = 610.8 + 514.27 = 1125.07 \text{ W/m de profundidad}$$

Esto se puede verificar calculando la conducción de entrada a partir de las superficies a 900 "C:

$$q_{cond} = \Sigma kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x}$$
$$= \frac{(2)(3.0)}{0.005}[(0.0025)(1173 - 1020.879) + (0.005)(1173 - 1092.369) + (0.0025)(1173 - 1111.384)]$$
$$= 1124.99 \text{ W/m de profundidad}$$

La concordancia es excelente.

3-8 Analogía eléctrica para conducción bidimensional

La conducción eléctrica en estado estacionario en un material homogéneo de resistencia constante es análogo a la conducción de calor en estado estacionario en un cuerpo de forma geométrica semejante. Para la conducción eléctrica bidimensional se aplica la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

donde E es el potencial eléctrico. Una forma muy simple de resolver un problema de conducción de calor bidimensional es construir un análogo eléctrico y determinar en forma experimental los factores de forma geométricos para ser usados en la Ec. 3-23. Una manera de realizar esto es utilizar un papel comercial disponible que esté recubierto con una capa delgada de material conductor. Se puede cortar este papel en la forma exacta de un modelo geométrico de un sistema de conducción de calor bidimensional. Se adhieren en los bordes correctos buenos conductores eléctricos, para simular las condiciones de frontera de temperatura en el problema. Se impone entonces una diferencia de potencial eléctrico en el modelo. Se puede observar que en comparación con los conductores adheridos a los bordes el papel tiene una alta resistencia, de manera que se puede mantener una condición de potencial constante en la región de contacto.

Una vez que se ha impuesto en el papel el potencial eléctrico, se podrá utilizar un voltímetro ordinario para trazar líneas de potencial eléctrico constante. Teniendo estas líneas de potencial constante, se podrán construir fácilmente líneas de flujo, ya que son ortogonales a las líneas de potencial. Estas líneas equipotenciales y de flujo tienen exactamente el mismo arreglo que las líneas isotérmicas y de flujo de calor de los problemas de conducción de calor semejantes. El factor de forma se calcula de inmediato utilizando el método que se aplicó a los cuadrados curvilíneos.

Se debe observar que la analogía de la placa conductora no se puede aplicar a los problemas en los que existe una generación de calor; sin embargo, añadiendo las resistencias apropiadas, se podrán manejar sin mucho trabajo las condiciones de frontera de convección. Schneider [2] y Ozisik [12] tratan el método de la placa conductora, así como otras analogías para el tratamiento de problemas de transferencia de calor por conducción, y Kayan [4, 5] da un tratado detallado del método de la placa conductora.

Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la principal suposición en el método de separación de variables para la resolución de la ecuación de Laplace?
2. **Defina el factor de forma de conducción.**
3. **¿Cuál es el procedimiento básico en el planteamiento de una solución numérica para un problema de conducción bidimensional?**
4. **Una vez que se han obtenido ecuaciones de diferencia finita para un problema de conducción, ¿qué métodos están disponibles para efectuar la resolución? {Cuáles son las ventajas y desventajas** de cada método, y cuándo se aplica cada técnica?

5. Investigue las rutinas de computadora que tienen en su centro de cómputo para la resolución de problemas de transferencia de calor por conducción.

Problemas

3-1 Comenzando con las soluciones de separación de variables para $\lambda^2 = 0$ y $\lambda^2 < 0$ (Ecs. Y-9 y 3-10), demuestre que con cualquiera de estas dos formas de solución, no es posible satisfacer las condiciones de frontera para la temperatura constante en y = *H*. Es decir, demuestre que, en orden para satisfacer las condiciones de frontera

$$T = T_1 \quad \text{en } y = 0$$
$$T = T, \quad \text{en } x = 0$$
$$T = T, \quad \text{en } x = W$$
$$T = T_2 \quad \text{en } y = H$$

resultará o una solución trivial o físicamente ilógica cuando se utiliza la Ec. 3-9 o la Ec. 3-10.

3-2 Escriba los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de soluciones dada en la Ec. 3-20. ¿Qué porcentaje de error resulta cuando sólo se utilizan estos tres primeros términos en y = *H* y *x* = *W*/2?

3-3 Un tubo de 7.5 cm de diámetro cuya temperatura de superficie se mantiene a 210 °C, pasa a través del centro de una lámina de concreto de 45 cm de espesor. La superficie exterior de la lámina es mantenida a 15 °C. Utilizando la gráfica de flujo, estime la pérdida de calor del tubo por unidad de longitud.

3-4 Un horno cuyas dimensiones interiores son 1 x 2 x 3 pies está hecho de un material que posee una conductividad térmica de 0.5Btu/h pies·°F. El espesor de la pared es 6 plg. Las temperaturas de las superficies interior y exterior son 1000 y 200 °F, respectivamente. Calcule la pérdida de calor a través de la pared del horno.

3-5 Un cubo de 35 cm de lado exterior está construido en ladrillo refractario. El espesor de la pared es de 5.0 cm. La temperatura de la superficie interior es 540 °C, y la temperatura de la superficie exterior es 90 °C. Calcule el flujo de calor en watts.

3-6 Un tubo de Monel de pared gruesa, de 2.5 cm de diámetro interno y 5 cm de diámetro extemo, está cubierto con una capa de fibra de vidrio de 2.5 cm. La temperatura dentro del tubo

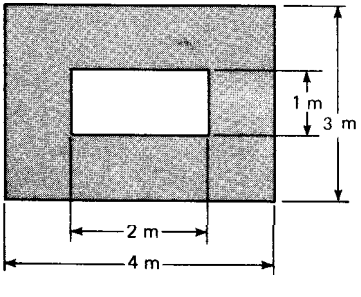


Figura Problema 3-7

es de 260 °C y la temperatura en el exterior del aislante es de 38 °C. ¿Cuánto calor se pierde por pie de longitud? Para el Monel k = ll Btu/h·pie·°F.

3-7 Una pared simétrica de horno tiene las dimensiones que se muestran. Utilizando la gráfica de flujo obtenga el factor de forma para esta pared.

3-8 Derive una ecuación equivalente a la Ec. 3-24 para un nodo interior en un problema de flujo de calor tridimensional.

3-9 Derive una ecuación equivalente a la Ec. 3-24 para un nodo interior en un problema de flujo de calor unidimensional.

3-10 Derive una ecuación equivalente a la Ec. 3-25 para una condición de frontera unidimensional de convección.

3-11 Considerando los problemas de aleta unidimensional del Cap. 2, demuestre que una ecuación nodal para nodos a lo largo de la aleta que se muestra en la figura a continuación puede expresarse como

$$T_m \left[\frac{hP(\Delta x)^2}{kA} + 2_1 - \frac{hP(\Delta x)^2}{kA} T_\infty - (T_{m-1} + T_{m+1}) = 0 \right.$$

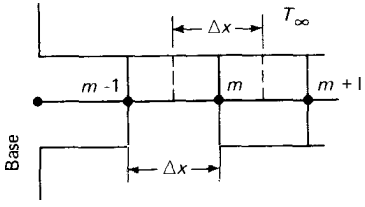


Figura Problema 3-11

3-12 Una varilla de aluminio de 2.5 cm de diámetro y 15 cm de largo sobresale de una pared que es mantenida a 300 °C. La temperatura ambiente es de 38 °C. El coeficiente de transferencia de calor es de 17 W/m².°C. Utilizando una técnica numérica de acuerdo con el resultado del Prob. 3-11, obtenga valores para las temperaturas a lo largo de la varilla. Subsecuentemente, obtenga el flujo de calor de la pared en x = 0. Sugestión: La condición de frontera en la punta de la varilla puede expresarse por

$$T_m \left[\frac{h\,\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA} + 1 \right] - T_\infty \left[\frac{h\,\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA}_1 \right. \quad T_{m-1} = 0$$

donde m denota el nodo que se encuentra en la punta de la aleta. El flujo de calor en la base es

$$q_{x=0} = \frac{-kA}{\Delta x} (T_{m+1} - T_m)$$

donde T_m es la temperatura de base y T_{m+1} es la temperatura en el primer incremento.

3-13 Repita el Prob. 3-7 utilizando una variación lineal del coeficiente de transferencia de calor entre la temperatura de base y la punta de la aleta. Supóngase que h = 28 W/m².°C en la base y h = ll W/m².°C en la punta.

3-14 Para la pared en el Prob. 3-7 se usa un material con $K = 1.4$ W/m².°C. Las temperaturas de las paredes interior y exterior son de 650 y 150 °C, respectivamente. Utilizando una técnica numérica, calcule el flujo de calor a través de la pared.

3-15 Repita el Prob. 3-14, suponiendo que la pared exterior está expuesta a un entorno de 38 °C y que el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 17 W/m².°C. Suponga que la temperatura de la superficie interior se mantiene a 650 °C.

3-16 Repita el Prob. 3-3, utilizando la técnica numérica.

3-17 Demuestre que la ecuación nodal que corresponde a una pared aislada que se muestra a la figura a continuación es

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0$$

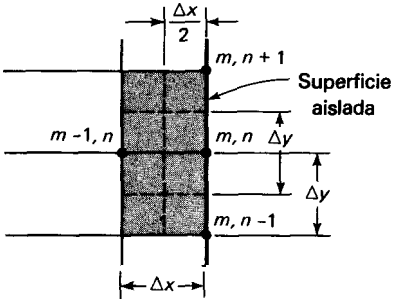


Figura Problema 3-17

3-18 En la sección ilustrada, la superficie l-4-7 se encuentra aislada. El coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie l-2-3 es de 28 W/m².°C. La conductividad térmica del material sólido es de 3.5 W/m².°C. Utilizando la técnica numérica, calcule la temperatura en los nodos 1, 2, 4 y 5.

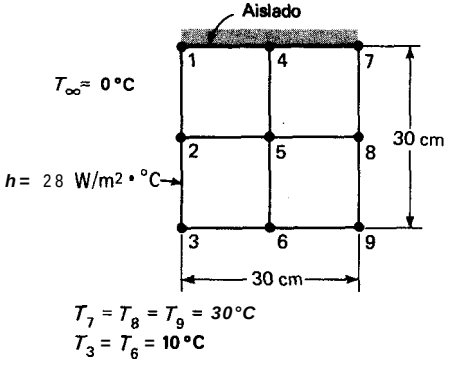


Figura Problema 318

3-19 Una placa de vidrio de 3 X 12 plg [k = 0.7 W/m·°C] se encuentra orientada con la cara de 12 X 12 plg en posición vertical. Una de las caras pierde calor por convección hacia los contomos que se encuentran a 70 °F. La otra pared vertical se encuentra en contacto con un bloque que tiene una temperatura constante de 400 °F. Las otras cuatro caras se encuentran aisladas. El coeficiente de transferencia de calor por convección varía aproximadamente como:

$$h_x = 0.22(T_s - T_\infty)^{1/4}x^{-1/4} \quad \text{Btu/h·pie}^2\text{·°F}$$

donde T_s y T_∞ están en grados Fahrenheit, T, es la temperatura local de la superficie, y x es la distancia vertical en pies, desde el borde inferior de la placa. Determine la pérdida de calor por convección utilizando un análisis numérico adecuado.

3-20 Calcule las temperaturas en los puntos 1, 2, 3 y 4 utilizando el método numérico.

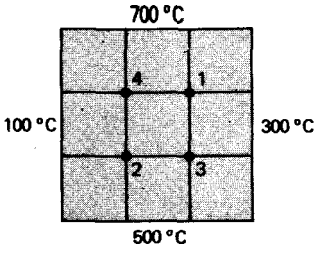


Figura Problema 3-20

3-21 Derive una expresión para la ecuación nodal del nodo (m, n) bajo condiciones de estado estacionario para la sección de vértice aislado que se muestra.

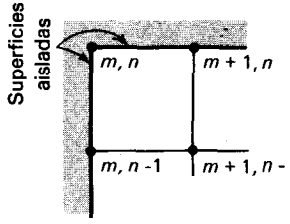


Figura Problema 3-21

3-22 Dos cilindros largos de 7.5 y 2.5 cm de diámetro se encuentran completamente rodeados por un medio con k = 1.4 W/m·°C. La distancia entre los centros es de 10 cm y los cilindros se mantienen a 200 y 35 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor por unidad de longitud.

3-23 Una esfera de 1 m de diámetro se mantiene a una temperatura de 35 °C y se encuentra enterrada en un lugar donde k = 1.7 W/m·°C. La profundidad de la línea del centro es de 2.4 m y la temperatura de la superficie de la Tierra es de 4 °C. Calcule el calor perdido por la esfera.

3-24 Para el bloque que se muestra, calcule la distribución de temperatura en estado estacionario en los lugares donde se encuentran los nodos adecuados, utilizando el método numérico. Si es posible, empléese una computadora digital para la solución y aproveche las subrutinas que se encuentren en su centro de cómputo: k = 2.0 Btu/h·pie·°F.

3-25 Derive la ecuación que se da en la Tabla 3-2*f*.

3-26 Derive una expresión para la ecuación de un nodo de frontera sujeto al flujo de calor constante del entorno. Utilice la nomenclatura de la Fig. 3-7.

3-27 Una esfera de 20 cm de diámetro está totalmente rodeada por una gran masa de lana de vidrio. Un calentador en el interior de la esfera mantiene su superficie exterior a 170 °C mientras que la temperatura en el borde exterior de la lana de vidrio es de 20 °C. ¿Cuánta potencia se necesita enviar al calentador para que mantenga las condiciones de equilibrio?

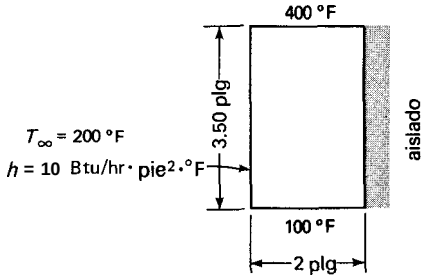


Figura Problema 3-24

3-28 Repita el Ej. 3-3 utilizando el método de iteración de Gauss-Seidel.

3-29 Repita el Prob. 3-18, utilizando el método de iteración de Gauss-Seidel.

3-30 Se ha diseñado un esquema para medir la conductividad térmica de la tierra hundiendo en el suelo en posición vertical, una varilla larga calentada por medio de electricidad. Por razones de diseño se supone que la varilla mide 2.5 cm de diámetro y 1 m de longitud. Para evitar alteraciones inadecuadas de la tierra, la temperatura máxima en la superficie de la varilla es de 55 °C mientras que la de la tierra es de 10°C. Suponiendo una conductividad de 1.7 W/m·°C, ¿Cuánta potencia en watts necesita el calentador eléctrico?

3-31 Un gran tanque esférico de almacenamiento de 2 m de diámetro se encuentra enterrado en un lugar en el que la conductividad térmica es de 1.5 W/m·°C. Se utiliza el tanque para almacenar una mezcla de hielo a 0 "C, y la temperatura ambiente de la Tierra es 20 °C. Calcule el calor perdido por el tanque.

3-32 Establezca las ecuaciones nodales para una modificación del Ej. 3-5, de manera que la mitad izquierda del alambre esté aislada y la mitad derecha se encuentre expuesta a un medio de convección con h = 200 W/m²°C y T = 20 °C.

3-33 En una aplicación de energía solar propuesta, el flujo solar está concentrado sobre un tubo de acero inoxidable de 5 cm de diámetro externo [k = 16 W/m·°C] 2 m de longitud. El flujo de energía sobre la superficie del tubo es 20 000 W/m² y el espesor de pared del tubo es de 2 mm. Dentro del tubo fluye agua hirviendo con un coeficiente de convección de 5000 W/m²·°C y a una temperatura de 250 "C. Ambos lados del tubo se encuentran montados en soportes adecuados que los mantienen a 100 °C. Para consideraciones de tipo de esfuerzo térmico, el gradiente de temperatura cerca de los soportes es importante. Suponiendo un sistema unidimensional, establezca una solución numérica para obtener el gradiente de temperatura cerca de los soportes:

3-34 La superficie superior del sólido que se muestra en la figura es mantenida a 100 °C, incluyendo la parte del medio cilindro. En una amplia profundidad en el sólido de temperatura es de 25 °C; k = 1 W/m·°C. ¿Cuál es la transferencia de calor en la superficie para la región en donde L = 30 cm y D = 10 cm?

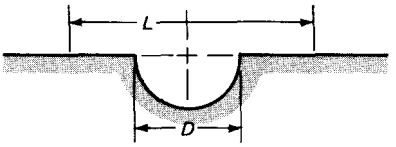


Figura Problema 3-34

3-35 La franja compuesta en la figura a continuación está expuesta a un medio de convección a 300 °C y $h = 40$ W/m^2·°C. Las propiedades del material son $k_A = 20$ W/m·°C, $k_B = 1.2$ W/m·°C y $k_C = 0.5$ W/m·°C. La franja se encuentra montada sobre una placa mantenida a la temperatura constante de 50 °C. Calcule la transferencia de calor de la franja hacia la placa por unidad de longitud. Suponga un flujo de calor bidimensional.

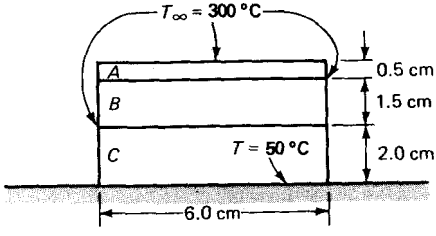


Figura Problema 3-35

3-36 En ciertas localidades, la transmisión de energía se hace por cables subterráneos. En un ejemplo, un cable de 8.0 cm de diámetro se encuentra enterrado a 1.3 m de profundidad y la resistencia del cable es 1.1 × 10^{-4} Ω/m. La temperatura de la superficie del suelo es de 25 °C y para la Tierra $k = 1.2$ W/m·°C. Calcule la corriente máxima permitida si la temperatura exterior del cable no puede exceder 110 °C.

3-37 Una esfera de cobre de 4.0 cm de diámetro se mantiene a 70 °C y está sumergida en una región grande de la Tierra en donde $k = 1.3$ W/m·°C. La temperatura a gran distancia de la esfera es 12 °C. Calcule el calor perdido por la esfera.

3-38 Dos cilindros largos excéntricos de 15 y 4 cm de diámetro, respectivamente; son mantenidos a 100 y 20 °C y están separados por un material con $k = 3.0$ W/m·°C. La distancia entre los centros de 4.5 cm. Calcule la transferencia de calor entre los cilindros por unidad de longitud.

3-39 Dos tubos se encuentran enterrados y se mantienen a temperaturas de 300 y 125 °C. Los diámetros son 8 y 16 cm y la distancia entre los centros es 40 cm. Calcule la rapidez de transferencia de calor por unidad de longitud, si la conductividad térmica de la Tierra en esta localidad es de 0.7 W/·°C.

3-40 Una esfera caliente de 1.5 m de diámetro se mantiene a 300 °C y está enterrada en un material con $k = 1.2$ W/m·°C; la temperatura de la superficie exterior es de 30 °C. La profundidad al centro de la esfera es 3.75 m. Calcule la pérdida de calor.

3-41 La base de la aleta que mostramos se mantiene a 300 °C y está expuesta al medio de convección indicado. Calcule las temperaturas de estado estacionario de los nodos que se muestran y la pérdida de calor si $k = 1.0$ W/m·°C.

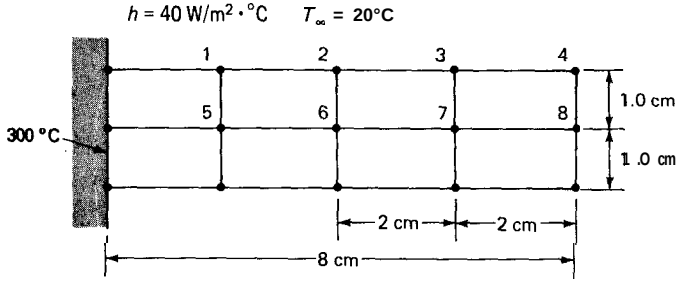


Figura Problema 3-41

3-42 El medio cilindro tiene $k = 20\ W/m \cdot °C$ y se encuentra expuesto a un medio de convección a 20 °C. La superficie inferior es mantenida a 300 °C. Calcule las temperaturas para los nodos que se muestran y la pérdida de calor para el estado estacionario.

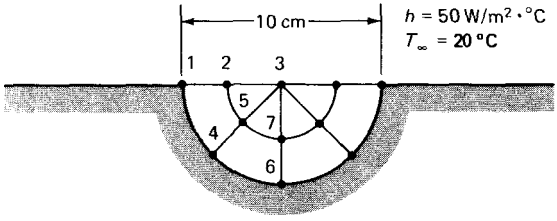


figura Problema 842

Referencias

1 Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids," 2d ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N.J., 1959.

2 Schneider, P. J.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.

3 Dusinberre, G. M.: "Heat Transfer Calculations by Finite Differences," Intemational Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.

4 Kayan, C. F.: An Electrical Geometrical Analogue for Complex Heat Flow, *Trans. ASME,* vol. 67, p. 713, 1945.

5 Kayan, C. F.: "Heat Transfer Temperature Patterns of a Multicomponent Structure by Comparative Methods, *Trans. ASME,* vol. 71, p. 9, 1949.

6 Rudenberg, R.: Die Ausbreitung der Luft- und Erdfelder um Hochspannungsleitungen, besonders bei Erd- und Kurzschlussen, *Elecktrotech. Z., vol.* 46, p. 1342, 1925.

7 Andrews, R. V.: Solving Conductive Heat Transfer Problems with Electrical-analogue Shape Factors, *Chem. Eng. Prog., vol.* 51, no. 2, p. 67, 1955.

6 Sunderland, J. E., and K. R. Johnson: Shape Factors for Heat Conduction through Bodies with Isothermal or Convective Boundary Conditions, *Truns. ASHAE,* vol. 70, pp. 237-241, 1964.

9 Richtmeyer, R. D.: "Difference Methods for Initial Value Problems," Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

10 Cranck, J., and P. Nicplson: A Practica1 Method for Numerical Evaluation of Solutions of P.D.E. of the Heat Conduction Type, *Proc. Camb. Phil. Soc.,* vol. 43, p. 50, 1947.

II Barakat, H. Z., and J. A. Clark: On the Solution of Diffusion Equation by Numerical Methods, *J. Heat Transfer,* p. 421, November 1966.

12 Ozisik, M. N.: "Boundary Value Problems of Heat Conduction," Intemational Textbook Company, Scranton, Fa., 1968.

13 Arpaci, V. S.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.

14 Ames, W. F.: "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering," Academic Press, Inc., New York, 1965.

15 Myers, R. F.: "Conduction Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company; New York, 1972.

16 Adams, J. A., and D. F. Rogers: "Computer Aided Analysis in Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

17 Bowers, J. C., and S. R. Sedore: "SCEPTRE: A Computer Program for Circuit and Systems Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.

16 Rohsenow, W. M., and J. P. Hartnett (eds.): "Handbook of Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

19 Kem, D. Q., and A. D. Kraus: "Extended Surface Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

20 Strong, P. F., and A. G. Emslie: "The Method of Zones for the Calculation of Temperature Distribution," *NASA* CR-56800, July 1963.

21 Sepetoski, W. K., C. H. Sox, and P. F. Strong: "Description of a Transient Thermal Analysis Program for Use with the Method of Zones," *NASA* CR-56722, August 1963.

22 Schultz, H. D.: "Thermal Analyzer Computer Program for the Solution of General Heat Transfer Problems," *NASA* CR-65581, July 1965.

23 Hahne, E., and U. Grigull: Formfaktor und Formweiderstand der stationaren mehrdimensionalen Warmeleitung, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 751, 1975.

4
Conducción en Estado Transitorio

4-1 Introducción

Si un cuerpo sólido se somete a un cambio repentino en el medio ambiente, debe transcurrir cierto tiempo antes que se establezca en él una condición de temperatura en equilibrio. Nos referimos a la condición de equilibrio como el estado estacionario y calculamos la distribución de temperatura y la transferencia de calor por los métodos descritos en los Caps. 2 y 3. En el proceso de calentamiento o enfriamiento transitorio que tiene lugar en el periodo intermedio antes que establezca el equilibrio, el análisis debe modificarse para tomar en cuenta el cambio de la energía interna del cuerpo con el tiempo, y se deben ajustar las condiciones de frontera para que correspondan a la situación física que aparece en el problema de transferencia de calor en estado transitorio. El análisis de transferencia de calor en estado transitorio es obviamente de gran interés práctico, debido al gran número de procesos de calentamiento y enfriamiento que deben calcularse en aplicaciones industriales.

Para analizar un problema de transferencia de calor transitoria, podríamos proceder resolviendo la ecuación general de conducción de calor por el método de separación de variables, el cual es semejante al tratamiento analítico utilizado para el problema bidimensional en estado estacionario que se estudió en la Sec. 3-2. Proporcionamos una ilustración de este método para un caso de geometría simple y en seguida remitimos al lector a las referencias sobre análisis de casos más complicados.

Considérese la placa infinita de espesor $2L$ que se muestra en la Fig. 4-1. Inicialmente la placa se encuentra en una temperatura uniforme T_i, y en el tiempo cero de las superficies se reducen bruscamente a $T = T_1$. La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-1}$$

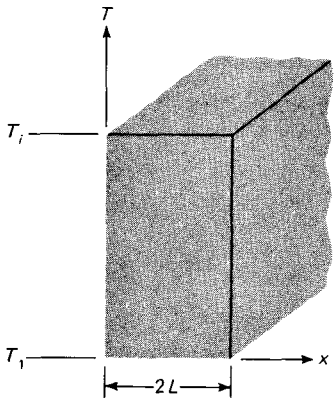


Fig. 4-1 Placa infinita sujeta a enfriamiento brusco de superficies.

La ecuación puede ordenarse de manera más conveniente introduciendo la variable $\theta = T - T_1$. Entonces:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \tag{4-2}$$

con las condiciones iniciales y de frontera

$$\theta = \theta_i = T_i - T_1 \qquad \text{en } \tau = 0,\ 0 \le x \le 2L \tag{a}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en } x = 0,\ \tau > 0 \tag{b}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en } x = 2L,\ \tau > 0 \tag{c}$$

Suponiendo una solución de producto $\theta(x, \tau) = X(x)\ \mathscr{H}(\tau)$ se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\mathscr{H}}{d\tau} + \alpha\lambda^2\mathscr{H} = 0$$

en donde λ^2 es la constante de separación. A fin de satisfacer las condiciones de frontera es necesario que $\lambda^2 > 0$, de manera que la forma de la solución se convierte en:

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x)e^{-\lambda^2\alpha\tau}$$

Por la condición de frontera (b), $C_1 = 0$ para $\tau > 0$. Como C_2 no puede ser también cero, encontramos por la condición de frontera (c) que $\operatorname{sen} 2L\lambda = 0$, o:

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Por tanto, la forma de la serie final de la solución es:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-[n\pi/2L]^2 \alpha\tau} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}$$

Esta ecuación puede reconocerse como una expansión sinusoidal de Fourier, con las constantes C_n determinadas a partir de la condición inicial (a) y la siguiente ecuación:

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \theta_i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx = \frac{4}{n\pi} \theta_i \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

La serie final de la solución es, por consiguiente:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-[n\pi/2L]^2 \alpha\tau} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad (4\text{-}3)$$

En la Sec. 4-4 se presentará esta solución en su forma gráfica a fin de resolverla. Por el momento, nuestro propósito ha sido mostrar cómo se puede resolver la ecuación de conducción de calor en estado transitorio por medio del método de separación de variables, por lo menos para un caso. En las referencias se proporciona información adicional sobre métodos analíticos en problemas de estado transitorio.

4-2 Sistema de capacidad calorífica global

Continuamos nuestro estudio de conducción de calor transiente, analizando sistemas que se pueden considerar como uniformes en temperatura. Este tipo de análisis se llama método de capacidad calorífica global. Estos sistemas están obviamente idealizados ya que, si se conduce calor hacia el exterior o interior de un material, debe existir en él un gradiente de temperatura. En general, mientras menor sea el tamaño físico del cuerpo, más realista será la suposición de una temperatura uniforme a través de él; en el límite, se podría emplear un volumen diferencial como en la derivación de la ecuación general de conducción de calor.

Si se sumergiera una bola de acero caliente en un recipiente con agua fría, se podría utilizar el método de análisis de capacidad calorífica global, si fuera posible justificar la suposición de temperatura uniforme en la bola durante el proceso de enfriamiento. Es evidente que la distribución de temperatura en la bola dependería de la conductividad térmica del material de ésta y de las condiciones de transferencia de calor desde la superficie de la bola hacia el líquido que la rodea; es decir, el coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie. Deberíamos obtener una distribución de temperatura razonablemente uniforme en la bola si la resistencia a la transferencia de calor por conducción fuera pequeña comparada con la resistencia a la convección en la superficie, de manera que el gradiente de temperatura más alto ocurriera a través de la capa de fluido en la superficie. El análisis de capacidad calorífica global es entonces aquel en el que se supone que la resistencia interna del cuerpo es despreciable en comparación con la resistencia externa.

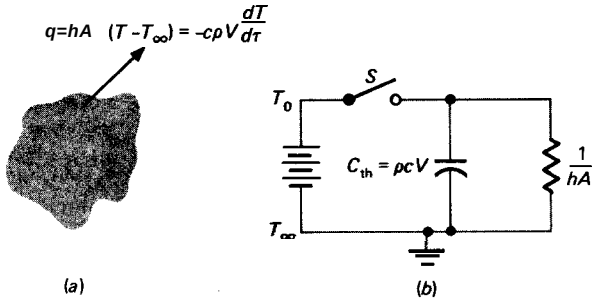


Fig. 4-2 Nomenclatura para análisis de capacidad calorífica global.

La pérdida de calor por convección del cuerpo se manifiesta como una disminución en su energía interna tal como se muestra en la Fig. 4-2. Entonces

$$q = hA(T - T_\infty) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau} \tag{4-4}$$

donde A es el área de la superficie para convección y V es el volumen. La condición inicial se escribe:

$$T = T_0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

de manera que la solución el la Ec. 4-4 es

$$\frac{T}{T_0 - T_\infty} = e^{-[hA/\rho cV]\tau} \tag{4-5}$$

La red térmica para un sistema de capacidad única se muestra en Ea Fig. 4.2*b*. Observamos que en esta red de "carga" inicialmente la capacidad térmica del sistema al potencial T_0 cerrando el interruptor S. En seguida, cuando se abre el interruptor, la energía almacenada en la capacitancia térmica se disipa a través de la resistencia $1/hA$. La analogía entre este sistema térmico y un sistema eléctrico es evidente, y podríamos construir con facilidad un sistema eléctrico que se comportara exactamente igual que el sistema térmico, a condición de que convirtiéramos la razón

$$\frac{hA}{p\ c\ v} = \frac{1}{R_{ter}\ C_{ter}} \qquad R_{ter} = \frac{1}{hA} \qquad C_{ter} = \rho cV$$

igual a $1/R_e C_e$, donde R_e y C_e son la resistencia eléctrica y la capacitancia. En el sistema térmico almacenamos energía, mientras que en el eléctrico almacenamos carga eléctrica. Al flujo de energía en el sistema térmico se le llama calor y al flujo de carga se le llama corriente eléctrica. A la cantidad $cp\,V/hA$ se le llama constante de tiempo del sistema porque tiene las dimensiones de tiempo. Cuando

$$\tau = \frac{c\rho V}{hA}$$

se observa que la diferencia de temperatura $T - T_\infty$ tiene un valor de 36.8% de la diferencia inicial $T_0 - T_\infty$.

Los sistemas de capacidad global múltiple pueden tratarse de manera similar al que acabamos de analizar. Se pueden encontrar estos sistemas cuando se someten materiales compuestos a cambios en el medio ambiente. Si se conoce el tipo y tamaño del material, es fácil determinar la capacidad térmica de cada "parte" del sistema; pero para sistemas múltiples también será necesario determinar la resistencia térmica que conecta las partes. Si estuviéramos considerando un sistema de dos partes constituido por dos materiales sólidos unidos, la resistencia conectora sería una resistencia de conducción determinada a partir del tipo y conductividad de cada material. Por otra parte, si el sistema de dos partes consistiera en una cantidad de agua en un recipiente metálico de pared gruesa, la resistencia conectora sería la que corresponde a la convección entre el agua y el recipiente. Para cada problema específico será necesario un método diferente para determinar las resistencias conectoras entre las partes. Con propósitos ilustrativos, se analizará un sistema de dos partes como el recipiente de agua, para mostrar el método de ataque.

Supóngase que tenemos un recipiente con agua (o algún otro líquido), como se muestra en la fig. 4-3. El coeficiente de transferencia de calor entre el agua y el recipiente es h_1, y aquel entre el recipiente y el medio ambiente es h_2. El agua y el recipiente se encuentran inicialmente a una temperatura T_0 y se les deja enfriar en presencia de una temperatura ambiente T_∞. Se realiza un balance de energía en cada una de las partes:

Cuerpo 1:
$$h_1A_1(T_1 - T_2) = -\rho_1c_1V_1\frac{dT_1}{d\tau} \tag{4-6}$$

Cuerpo 2:
$$h_1A_1(T_2 - T_1) + h_2A_2(T_2 - T_\infty) = -\rho_2c_2V_2\frac{dT_2}{d\tau} \tag{4-7}$$

Por tanto, tenemos dos ecuaciones diferenciales lineales simultáneas que pueden resolverse para dar la historia de la temperatura en cada cuerpo. Las condiciones de frontera que se usan con estas ecuaciones son

$$T_1 = T_2 = T_0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

lo que implica $dT_1/d\tau = 0$ en $\tau = 0$ de la Ec. 4-6.

Las Ecs. 4-6 y 4-l pueden reescribirse en forma de operador como

$$\left(D + \frac{h_1A_1}{\rho_1c_1V_1}\right)T_1 - \frac{h_1A_1}{\rho_1c_1V_1}T_2 = 0 \tag{4-6a}$$

$$-\frac{h_1A_1}{\rho_2c_2V_2}T_1 + \left(D + \frac{h_1A_1 + h_2A_2}{\rho_2c_2V_2}\right)T_2 = \frac{h_2A_2}{\rho_2c_2V_2}T_\infty \tag{4-7a}$$

donde el símbolo D indica diferenciación con respecto al tiempo. Por conveniencia hacemos

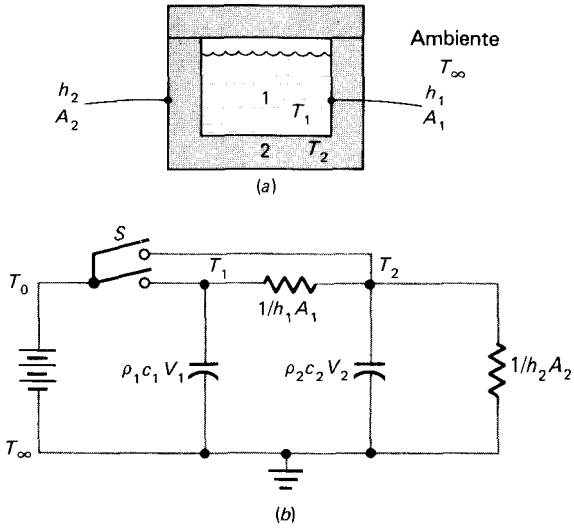


Fig. 43 Nomenclatura para análisis de capacidad calorífica en dos partes.

$$K_1 = \frac{h_1A_1}{\rho_1c_1V_1} \qquad K_2 = \frac{h_1A_1}{\rho_2c_2V_2} \qquad K_3 = \frac{h_2A_2}{\rho_2c_2V_2}$$

Entonces

$$(D + K_1)T_1 - K_1T_2 = 0$$

$$-K_2T_1 + (D + K_2 + K_3)T_2 = K_3T_\infty$$

Resolviendo las ecuaciones de manera simultánea obtenemos para la ecuación diferencial que sólo involucra T_1

$$[D^2 + (K_1 + K_2 + K_3)D + K_1K_3]T_1 = K_1K_3K_\infty \tag{4-8}$$

cuya solución general es

$$T_1 = T_\infty + Me^{m_1\tau} + Ne^{m_2\tau} \tag{4-9}$$

donde m_1 y m_2 se expresa por

$$m_1 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) + [(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1K_3]^{1/2}}{2} \tag{4-10}$$

$$m_2 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) - [(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1K_3]^{1/2}}{2} \tag{4-11}$$

Las constantes arbitrarias M y N se pueden obtener aplicando las condiciones iniciales:

$$T_1 = T_0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

y
$$\frac{dT_1}{d\tau} = 0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

de modo que
$$T_0 = T_\infty + M + N$$
$$0 = m_1 M + m_2 N$$

La solución final es

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{m_2}{m_2 - m_1} e^{m_1 \tau} - \frac{m_1}{m_2 - m_1} e^{m_2 \tau} \tag{4-12}$$

La solución para T_2 se puede obtener sustituyendo la relación para T_1 de la Ec. 4-12 en la Ec. 4-6.

Cuando hay un sistema de tres partes, se deberán escribir tres ecuaciones diferenciales simultáneas; cuatro ecuaciones serán necesarias para el sistema de cuatro partes; y así sucesivamente. Además, se pueden aplicar condiciones de frontera variables en el tiempo. En estos casos más complicados, con frecuencia es ventajoso utilizar el método de transformada de Laplace para obtener las soluciones a las ecuaciones diferenciales.

En la Fig. 4-36 se muestra la red análoga para el sistema de dos partes. Cuando el interruptor S está cerrado, las dos capacitancias térmicas se cargan hasta el potencial T_0. En el tiempo cero el interruptor se abre y las capacitancias se descargan a través de las resistencias térmicas que se muestran.

Para indicar la aplicación del análisis de capacidad global a sólidos, considérese el sistema que se muestra en la Fig. 4-4. Para mostrar cómo se analiza el sistema sólo estamos utilizando dos nodos para indicar las resistencias conectoras. En un problema práctico podrían haber nodos conectores adicionales y resistencias adicionales. Como en los ejemplos anteriores, se escribe una ecuación diferencial para cada nodo y el conjunto de ecuaciones resultantes se resuelve para obtener la respuesta de temperatura transiente. Si el número de nodos es muy alto, casi siempre es mejor recurrir a una solución numérica, como se indicará en secciones posteriores de este capítulo.

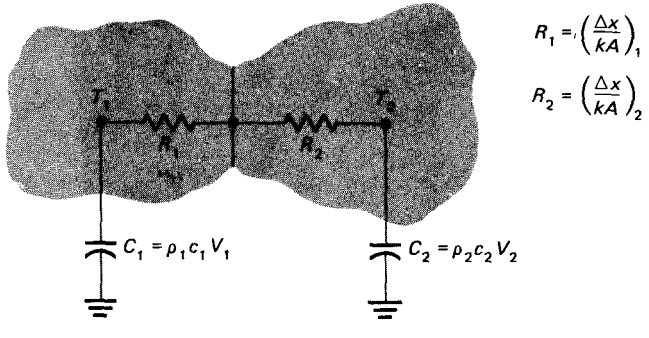


Fig. 4-4 Capacidades globales para sólidos en contacto.

Campo de aplicación del análisis de capacidad global

Ya hemos observado que el tipo de análisis de capacidad global supone una distribución uniforme de temperatura a través del cuerpo sólido, y que la suposición es equivalente a decir que la resistencia de convección en la superficie es grande en comparación con la resistencia de conducción interna. Se puede esperar que este análisis proporcione estimaciones razonables cuando se tiene la siguiente condición:

$$\frac{h(V/A)}{k} < 0.1 \qquad (4\text{-}12a)$$

donde k es la conductividad térmica del sólido. En las secciones que siguen examinaremos aquellas situaciones para las que no se aplican tales condiciones. Veremos que el análisis de capacidad global tiene relación directa con los métodos numéricos tratados en la Sec. 4-7.

Si consideramos la razón $V/A = s$ como una dimensión característica del sólido el grupo adimensional es llamado el número de *Biot*:

$$\frac{hs}{k} = \text{número de} = \text{Bi}$$

El lector debería reconocer que existen muchos casos prácticos en los que el método de capacidad global puede proporcionar buenos resultados. En la Tabla 4-l damos algunos ejemplos que ilustran la validez relativa de tales casos.

Ejemplo 4-1

Una bola de acero [c = 0.46 kJ/K_g·°C, k = 35 W/m·°C] de 5.0 cm de diámetro. e inicialmente a una temperatura uniforme de 450 °C, se coloca de manera brusca en un medio controlado en el que la temperatura se mantiene a 100 "C. El coeficiente de transferencia de calor es 10 W/m²·°C. Calcule el tiempo requerido por la bola para alcanzar una temperatura de 150 "C.

Solución

Debemos anticipar que el método de capacidad global se aplica a este caso debido al bajo valar de h y el alto valor de k. Podemos verificar utilizando la Ec. 4-12a:

Tabla 4-l Ejemplos de sistemas de capacidad global

Situación física	k, W/m °C	*Valor aproximado de* h, W/m² °C	$\frac{h(V/A)}{k}$
1 Cubo de acero de 3.0 cm enfriándose en aire ambiente	40	*1.0*	8.75×10^{-4}
2 Cilindro de vidrio de 5.0 cm enfriado por una corriente de aire a 50 m/s	0.8	180	2.81
3 Misma situación que la 2 pero con cilindro de cobre	380	180	0.006
4 Cubo caliente de cobre de 3 cm sumergido en agua de modo que ocurre ebullición	380	10,000	0.132

$$\frac{h(V/A)}{k} = \frac{(10)[(4/3)\pi(0.025)^3]}{4\pi(0.025)^2(35)} = 0.0023 < 0.1$$

de modo que podemos usar la Ec. 4-5. Tenemos

$$T = 150°C \qquad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \text{ [486 lb}_m\text{/pie}^3\text{]}$$

$$T_\infty = 100 °C \qquad h = 10 \text{ W/m}^2\cdot°C \text{ [1.76 Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot°F\text{]}$$

$$T_0 = 450 °C \qquad c = 460 \text{ J/kg}\cdot°C \text{ [0.11 Btu/lb}_m\cdot°F\text{]}$$

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{(10)4\pi(0.025)^2}{(7800)(460)(4\pi/3)(0.025)^3} = 3.344 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-[hA/\rho cV]\tau}$$

$$\frac{150 - 100}{450 - 100} = e^{-3.344\times10^{-4}\tau}$$

$$\tau = 5819 \text{ s} = 1.62 \text{ h}$$

4-3 Flujo de calor transiente en un sólido semiinfinito

Considérese que el sólido semiinfinito que se muestra en la Fig. 4-5 se mantiene a una temperatura inicial T_i. Se reduce bruscamente la temperatura de la superficie y se le mantiene a una temperatura T_0; queremos una expresión para la distribución de temperatura en la placa, como una función del tiempo. Esta distribución de temperatura se puede utilizar en forma subsecuente para calcular el flujo de calor en cualquier posición x en el sólido como una función del tiempo. Suponiendo propiedades constantes, la ecuación diferencial para la distribución de temperatura $T(x, \tau)$ es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-13}$$

Las condiciones de frontera e iniciales son

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, \tau) = T_0 \quad \text{para } \tau > 0$$

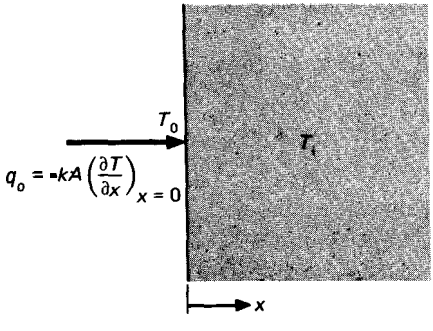


Fig. 4-5 Nomenclatura para flujo de calor transiente en un sólido semiinfinito.

Este es un problema que puede resolverse por la técnica de transformada de Laplace. En la Ref. 1 la solución se da como

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \tag{4-14}$$

donde la función de error de Gauss se define como

$$\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{4-15}$$

Se deberá observar que en esta definición η es una variable falsa y la integral es una función de su límite superior. Cuando se inserta en la Ec. 4-14 la definición de la función de error, la expresión para la distribución de temperatura se vuelve

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{4-16}$$

El flujo de calor en cualquier posición x se puede obtener de

$$q_x = -kA\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

Al realizar la diferenciación parcial de la Ec. 4-16 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= (T_i - T_0)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/4\alpha\tau}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \\ &= \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\, e^{-x^2/4\alpha\tau} \end{aligned} \tag{4-17}$$

El flujo de calor en la superficie es

$$q_0 = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \tag{4-18}$$

El flujo de calor en la superficie se determina evaluando el gradiente de temperatura en $x = 0$, a partir de la Ec. 4-17. En la Fig. 4-6 se proporciona una gráfica de la distribución de temperatura para el sólido semiinfinito. En la Ref. 3 se han tabulado los valores de la función de error, y en el Apéndice A se proporciona una tabulación abreviada.

Flujo constante de calor

Para la misma distribución de temperatura inicial uniforme podríamos exponer bruscamente la superficie a un flujo de calor superficial constante q_0/A. Las condiciones iniciales y de frontera en la Ec. 4-13 se volverían entonces:

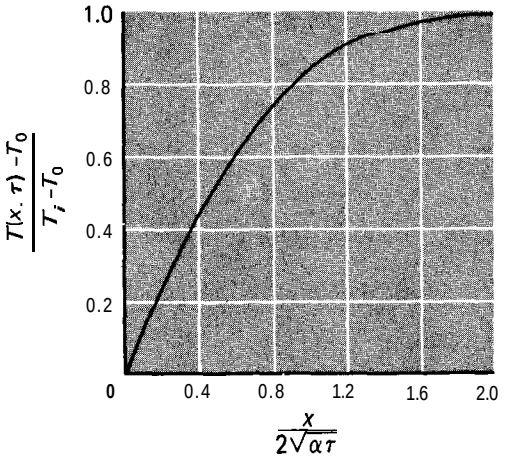


Fig. 4-6 Distribución de temperatura en el sólido semiinfinito.

$$T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{q_0}{A} = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \quad \text{para } \tau > 0$$

La solución para este caso es

$$T - T_i = \frac{2q_0\sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA}\left(1 - \text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \qquad (4\text{-}19)$$

Ejemplo 4-2

Un gran bloque de acero [k = 45 W/m· °C, α = 1.4 x 10^{-5} m^2/s] se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 35 °C. Se expone la superficie a un flujo de calor, (a) aumentando de manera brusca la temperatura de superficie a 250 °C, y(b) a través de un flujo de calor constante de 3.2 x 10s W/m^2. Calcule para ambos casos la temperatura a una profundidad de 2.5 cm después de pasados 0.5 min.

Solución

Podemos hacer uso de las soluciones para el sólido semiinfinito, expresadas en las Ecs. 4-14 y 4-19. Para el caso *a*,

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0.0\%}{(2)[(1.4 \times 10^{-5})(30)]^{1/2}} = 0.61$$

Se determina la función de error de acuerdo con el Apéndice A como

$$\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \text{fer}\,0.61 = 0.61164$$

Tenemos T_i = 35 °C y T_0 = 250 °C, de manera que la temperatura en x = 2.5 cm se determina a partir de la Ec. 4-14 como

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_i - T_0)\,\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$= 250 + (35 - 250)(0.61164) = 118.5\ °C$$

Para el caso b de flujo de calor constante, hacemos uso de la Ec. 4-19. Como q_0/A se da como 3.2 x 10^5 W/m^2, podemos insertar los valores numéricos para obtener

$$T(x\ \tau) = 35 + \frac{(2)(3.2 \times 10^5)[(1.4 \times 10^{-5})(30)/\pi]^{1/2}}{45} e^{-(0.61)^2} \quad \frac{(0.025)(3.2 \times 10^5)}{45}(1 \quad 0\ 61164)$$

$$= 79.3\% \qquad x = 2.5\ \text{cm},\ \tau = 30\ \text{s}$$

Para el caso de flujo de calor constante, la temperatura de *superficie* después de 30 s se evaluaría en la Ec. 4-19 con $x = 0$. Así

$$T(x = 0) = 35 + \frac{(2)(3.2 \times 10^5)[(1.4 \times 10^{-5})(30)/\pi]^{1/2}}{45} = 199.4\ ^\circ\text{C}$$

Ejemplo 4-3

Una lámina grande de aluminio tiene una temperatura uniforme de 200 °C; se disminuye bruscamente su temperatura superficial a 70 "C. ¿Cuánto es el calor total por unidad de superficie que se elimina de la lámina, cuando la temperatura a una profundidad de 4.0 cm ha bajado a 120 "C?

Solución

Primero encontramos el tiempo requerido para alcanzar la temperatura de 120 °C yen seguida integramos la Ec. 4-18 a fin de obtener el calor total extraído durante este intervalo. Para el aluminio,

$$\alpha = 8.4\ \text{x}\ 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad k = 215\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}\ 1124\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}\cdot{}^\circ\text{F}]$$

También tenemos

$$\text{T,} = 200\ ^\circ\text{C} \qquad T_0 = 70\ ^\circ\text{C} \qquad T(x, \tau) = 120\ ^\circ\text{C}$$

Utilizando la Ec. 4-14 obtenemos

$$\frac{120 - 70}{200 \quad 70} = \text{fer}\ \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3847$$

De la Fig. 4-6 o el Apéndice A,

$$\frac{2}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3553$$

Y

$$\tau = \frac{(0.04)^2}{(4)(0.3553)^2(8.4 \times 10^{-5})} = 37.72\ \text{s}$$

El calor total extraído a la superficie se obtiene integrando la Ec. 4-18:

$$\frac{Q_0}{A} = \int_0^\tau \frac{q_0}{A} d\tau = \int_0^\tau \frac{k(T_0 - T_i)}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}} d\tau = 2k(T_0 - T_i)\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}}$$

$$= (2)(215)(70 - 200)\left[\frac{37.72}{\pi(8.4 \times 10^{-5})}\right]^{1/2} = -21.13 \times 10^6\ \text{J/m}^2 \qquad [-1861\ \text{Btu/pie}^2]$$

4-4 Condiciones de frontera de convección

En **muchas situaciones prácticas el problema de conducción de calor transiente se encuentra ligado a una condición de frontera de convección en la superficie del sólido.**

Obviamente, las condiciones de frontera para una ecuación diferencial deben modificarse para tomar en cuenta esta transferencia de calar por convección en la superficie. Para el problema del solido semiinfinito anterior, esto se expresaría por

$$hA(T_\infty - T)_{x=0} = -kA \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{S=0} \tag{4-20}$$

La solución para este problema es bastante complicada, y Schneider [1] la ha trabajado en detalle. El resultado es

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{fer}X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right]\left[1 - \text{fer}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right] \tag{4-21}$$

donde $X = x/(2\sqrt{\alpha\tau})$

T_i = temperatura inicial del sólido

T_∞ = temperatura ambiente

Esta solución se presenta en forma gráfica en la Fig. 4-7.

Se han obtenido soluciones para otras geometrías. Los casos más importantes son aquellos que se ocupan de (1) placas cuyo espesor es pequeño en relación con otras dimensiones, (2) cilindros en donde el diámetro es pequeño comparado con la longitud y (3) esferas. Los resultados de análisis para estas geometrías se han presentado en forma gráfica por Heisler [2], y la Fig. 4-8 ilustran la nomenclatura para los tres casos. En todos los casos la temperatura ambiente para convección es T_∞ y la temperatura central para x = 0 o r = 0 es T_0. En un tiempo cero se supone que cada sólido tiene una temperatura inicial uniforme T_i. En las Figs. 4-9 a 4-15 se dan las temperaturas en los sólidos, como funciones del tiempo y la posición espacial. En estas gráficas observamos las definiciones:

$$\theta = T(x, \tau) - T_\infty \qquad 0 \qquad T(r, \tau) - Tm$$

$$\theta_i = T_i - Tm$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty$$

Si se desea una línea central de temperatura sólo se necesitará una gráfica para obtener el valor para θ_0 y en seguida T_0. Para determinar una temperatura fuera del centro se necesitan dos gráficas para calcular el producto

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i}\frac{\theta}{\theta_0}$$

Por ejemplo, las Figs. 4-9 y 4-12 se emplearán para calcular una temperatura fuera de centro, para una placa infinita.

Las pérdidas de calor para una placa infinita, un cilindro infinito y una esfera se proporcionan en las Figs. 4-16 a 4-18, en donde Q_0 representa el contenido inicial de energía interna del cuerpo en relación a la temperatura ambiente

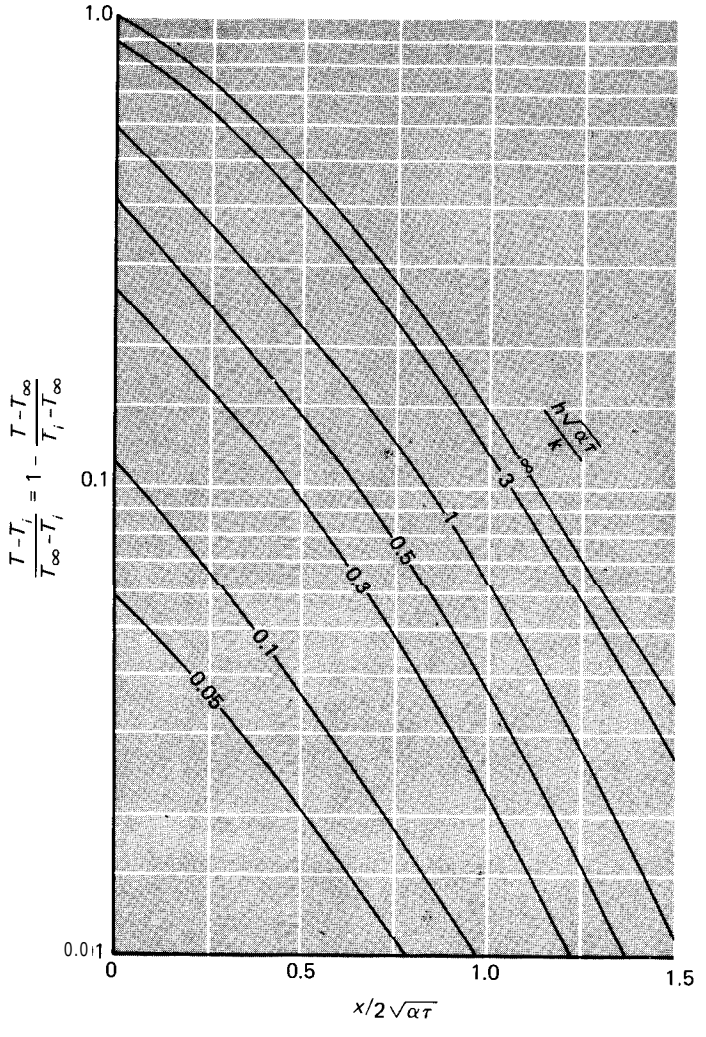


Fig. 4-7 Distribución de temperatura en el sólido semiinfinito con condición de frontera de convección.

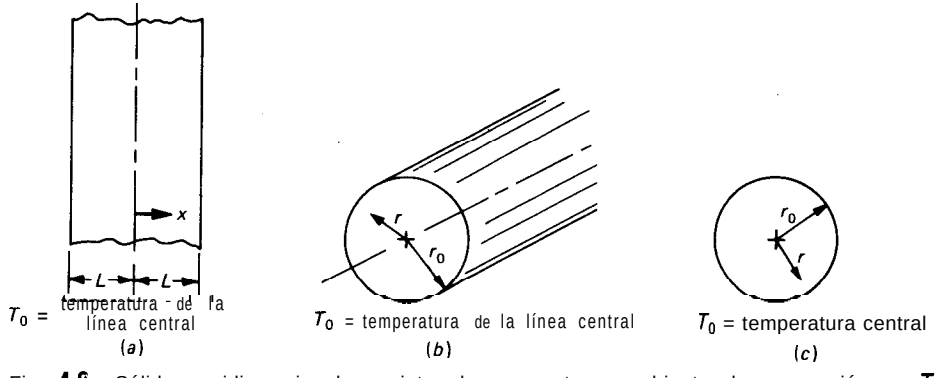


Fig. 4-8 Sólidos unidimensionales sujetos bruscamente a ambiente de convección en $T\infty$: (a) placa infinita de espesor $2L$; (b) cilindro infinito de radio r_o; (c) esfera de radio r_o.

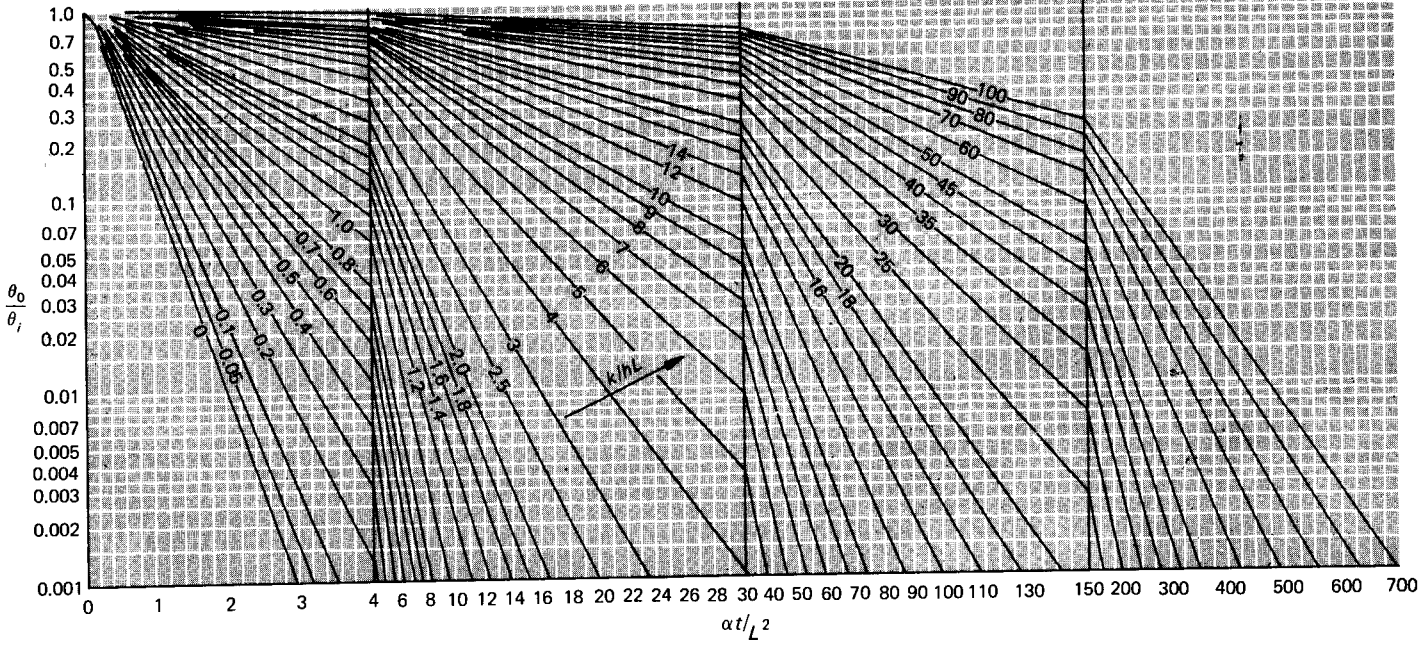


Fig. 4-9 Temperatura en el plano medio para una placa infinita de espesor $2L$, de la Ref. 2.

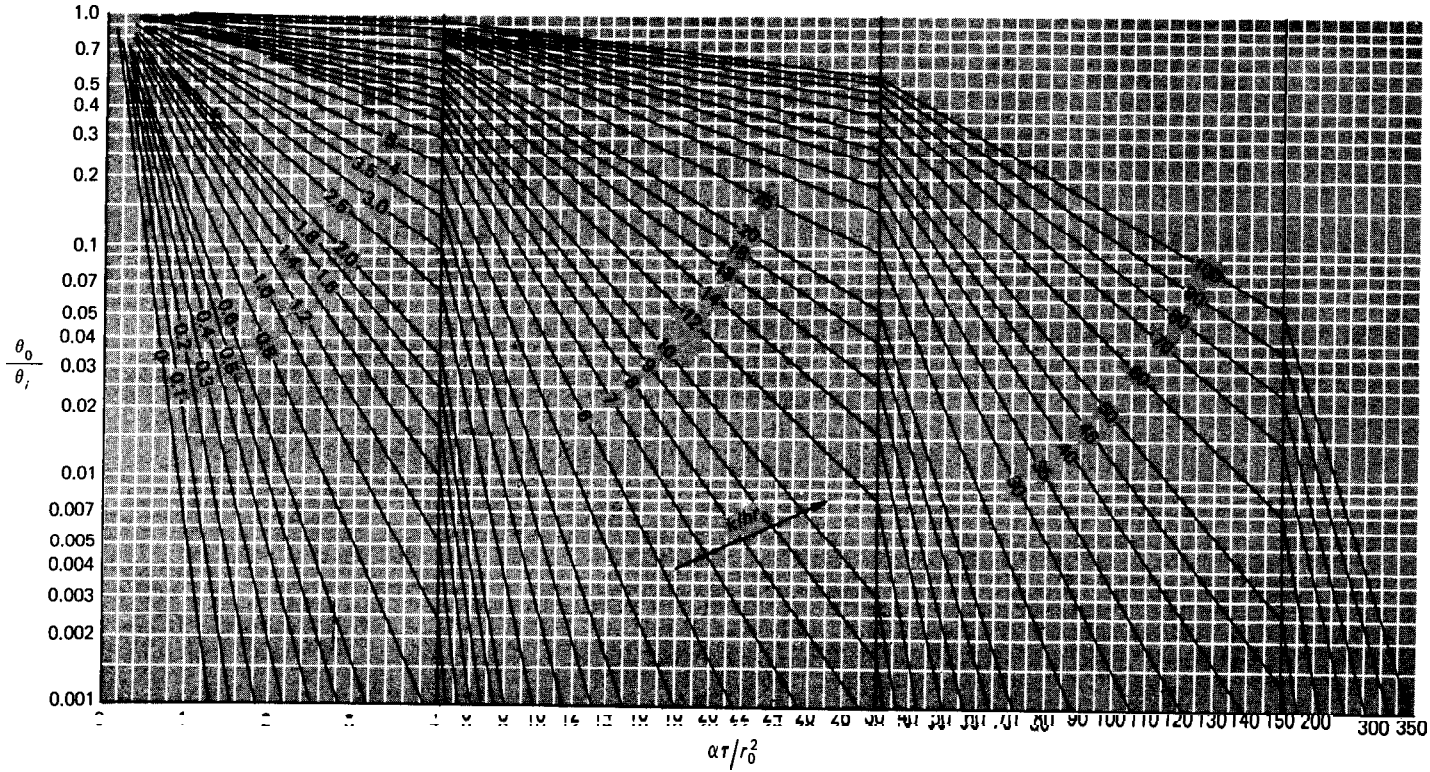


Fig. 4-10 Temperatura axial para un cilindro infinito de radio r_0, de la Ref. 2.

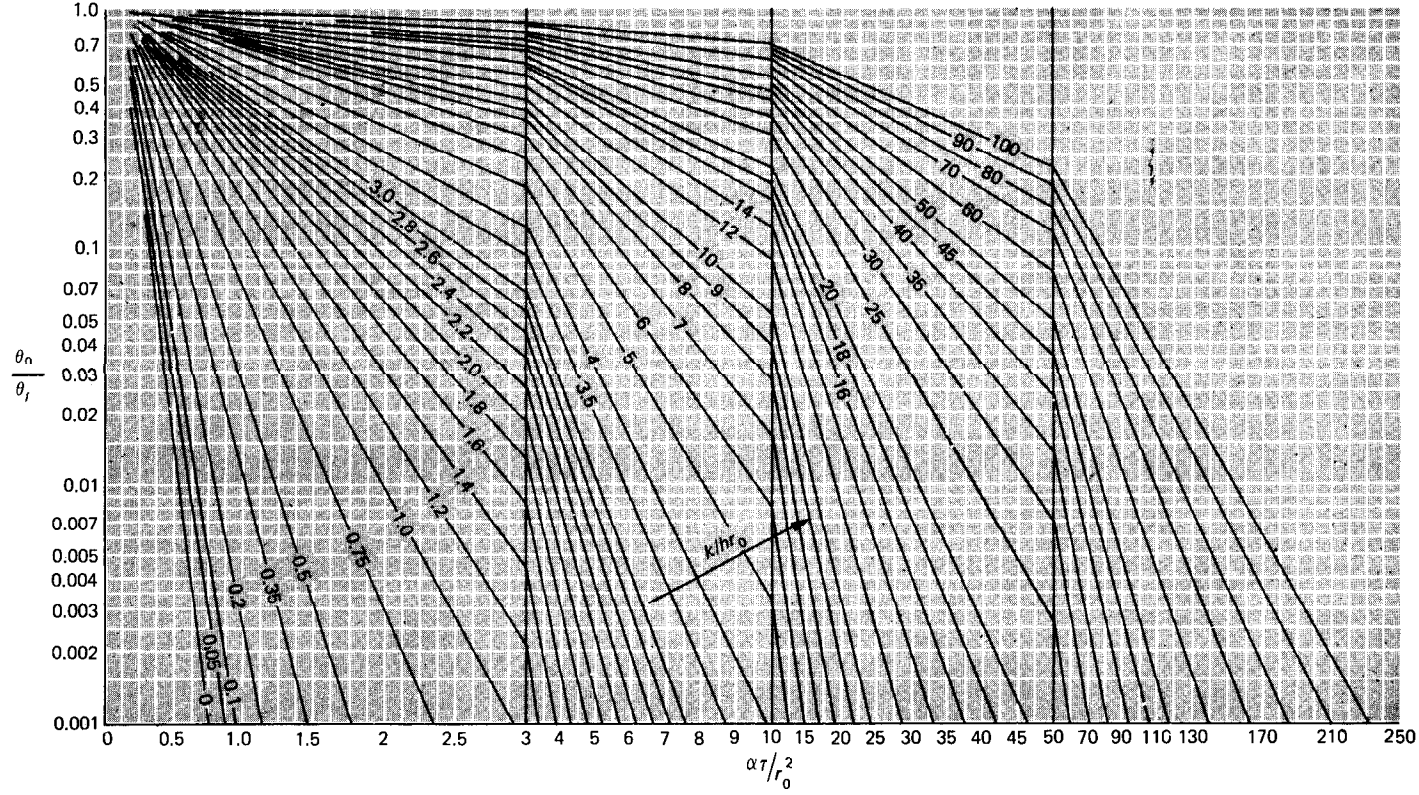


Fig. **4-11** Temperatura central para una esfera de radio r_0, de la Ref. 2.

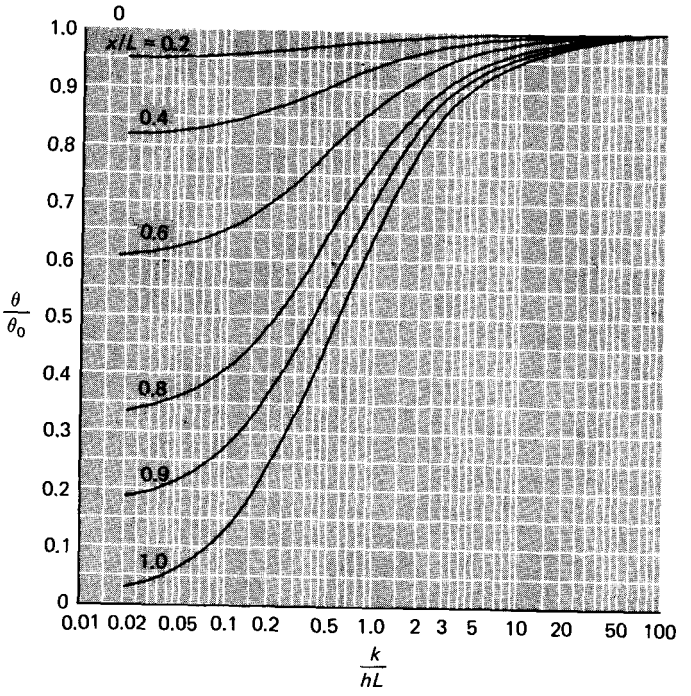


Fig. 4-12 Temperatura en función de la temperatura central en una placa infinita de espesor $2L$, de la Ref. 2.

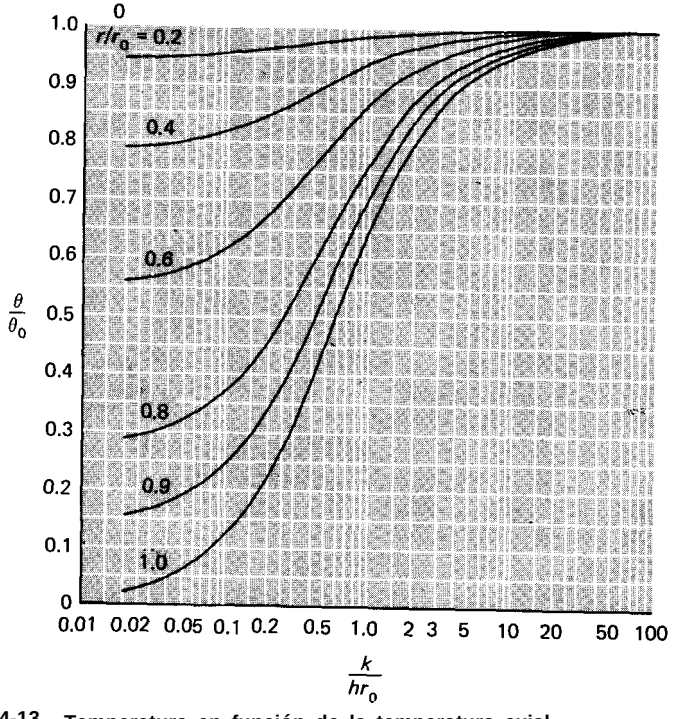


Fig. 4-13 Temperatura en función de la temperatura axial en un cilindro infinito de radio r_0, de la Ref. 2.

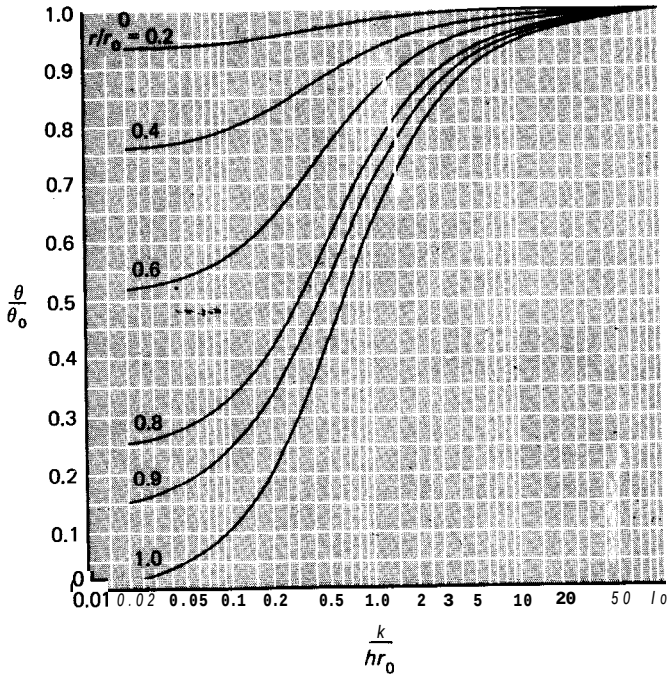


Fig. 4-14 Temperatura en función de la temperatura central para una esfera de radio r_0, de la Ref. 2.

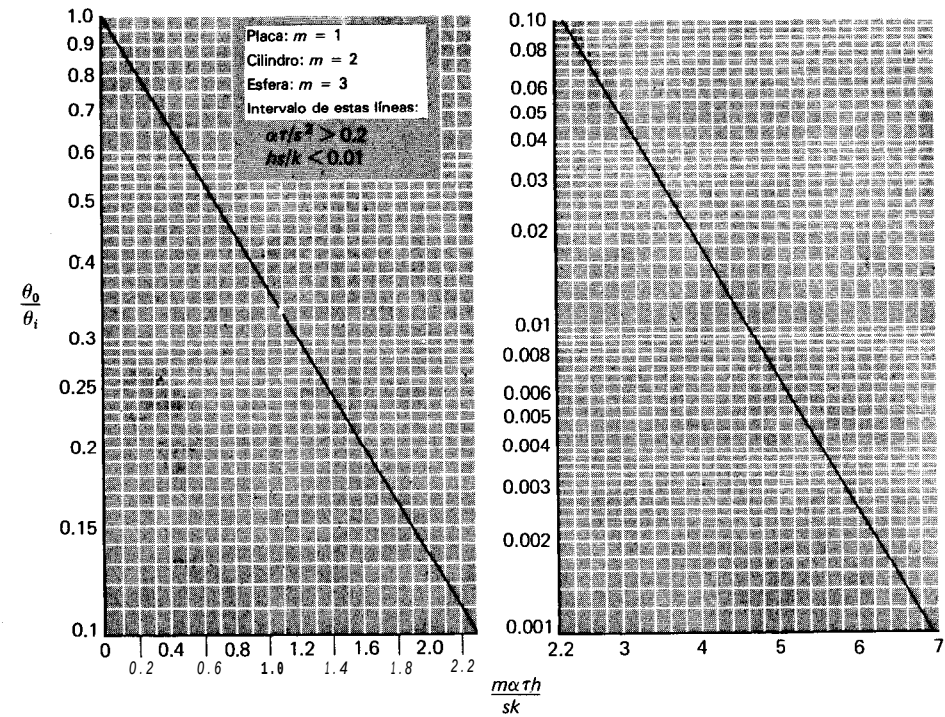


Fig. 4-15 Temperatura central para placas, cilindros y esferas, para valores pequeños de h, de acuerdo con la Ref. 2.

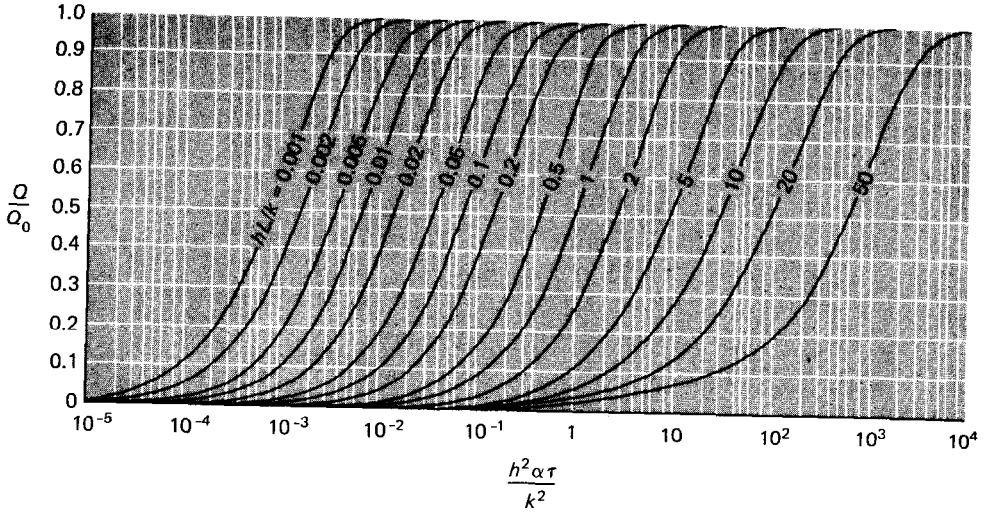


Fig. 4-16 Pérdida adimensional de calor Q/Q_0 con el tiempo de una placa infinita de espesor $2L$, de la Ref. 6.

$$Q_0 = \rho c V(T_i - T_\infty) = \rho c V \theta_i \tag{4-22}$$

En estas figuras Q es el calor real perdido por el cuerpo en un tiempo τ.

Es evidente, que existen muchos otros problemas prácticos de calentamiento y enfriamiento de interés. Las soluciones para un gran número de casos se presentan en forma gráfica por Schneider [7], y los lectores interesados en estos cálculos encontrarán de gran utilidad esta referencia,

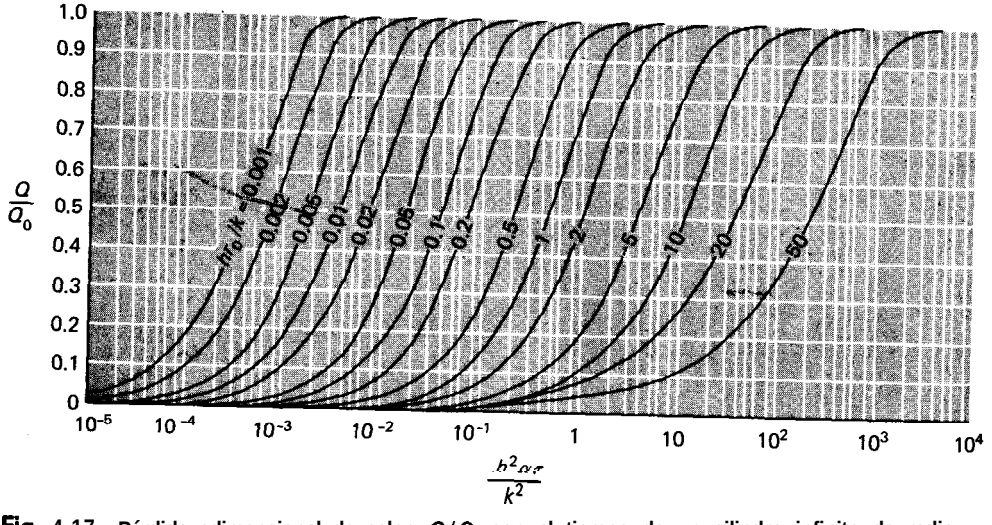


Fig. 4-17 Pérdida adimensional de calor Q/Q_0 con el tiempo de un cilindro infinito de radio r_0, de la Ref. 6.

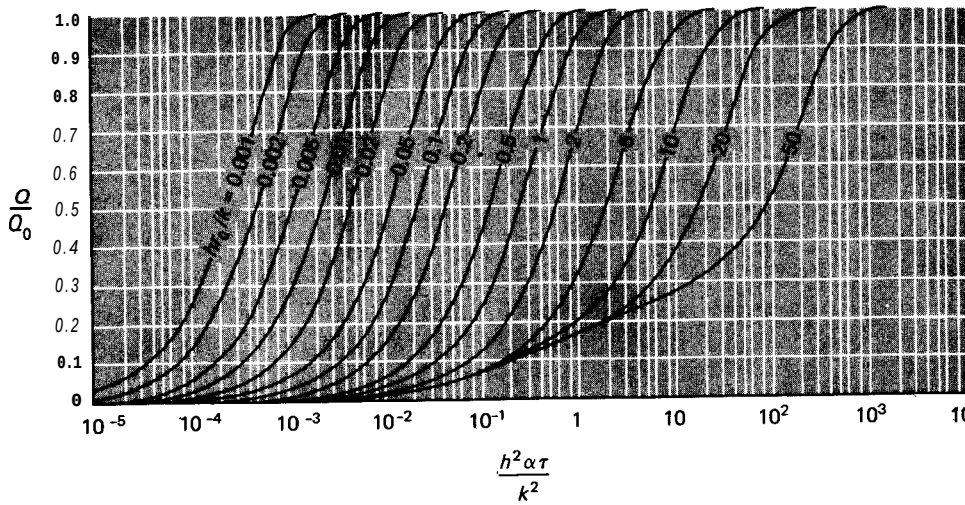


Fig. 4-18 Pérdida adimensional de calor Q/Q_0 con el tiempo de una esfera de radio r_0 de la Ref. 6.

Los módulos de Biot y Fourier

Una inspección rápida de las Figs. 4-7 a 4-18 indica que todos los perfiles de temperatura adimensionales y los flujos de calor, se pueden expresar en términos de los parámetros adimensionales llamados módulos de Biot y Fourier:

$$\text{Módulo de Biot} = \text{Bi} = \frac{hs}{k}$$

$$\text{Módulo de Fourier} = \text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2}$$

En estos parámetros s designa alguna dimensión característica del cuerpo; para la placa es la mitad del espesor mientras que para el cilindro y la esfera representa el radio. El módulo de Biot compara las magnitudes relativas de las resistencias de convección superficial y conducción interna a la transferencia de calor. El módulo de Fourier compara una dimensión característica del cuerpo con una profundidad de penetración aproximada de la onda de temperatura, para ún tiempo dado τ.

Un valor muy bajo del módulo de Biot significa que la resistencia a la conducción interna es despreciable en comparación con la resistencia a la convección en superficie. Esto a su vez indica que la temperatura será casi uniforme a través de todo el sólido, y que su comportamiento podrá ser aproximado por el método de análisis de capacidad global. Es de interés observar que el exponente de la Ec. 4-5 puede expresarse en términos de los módulos de Biot y Fourier si tomamos el radio V/A como la dimensión característica s. Entonces,

$$\frac{hA}{\rho c V}\tau = \frac{h\tau}{\rho c s} = \frac{hs}{k}\frac{k\tau}{\rho c s^2} = \text{Bi Fo}$$

Campo de aplicación de las gráficas de Heisler

Las gráficas de Heisler están restringidas a los valores del módulo de Fourier ($\alpha\tau/s^2$) mayores de 0.2. Para valores menores de este parámetro, el lector deberá consultar las soluciones y gráficas que se proporcionan en las diversas referencias al final del capítulo.

Ejemplo 4-4

La lámina del Ej. 4-3 se expone de manera brusca a un medio de convección en superficie a 70°C con un coeficiente de transferencia de calor de 525 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el tiempo requerido para que la temperatura alcance 120 °C a una profundidad de 4.0 cm para esta circunstancia.

Solución

Para la resolución de este problema podemos utilizar ya sea la Ec. 4-21 o bien la Fig. 4-7, pero es más fácil aplicar la figura ya que el tiempo aparece en dos términos. Aun cuando se utilice la figura, se requerirá un procedimiento iterativo debido a que el tiempo aparece tanto en la variable $h\sqrt{\alpha\tau}/k$ como en $x/2\sqrt{\alpha\tau}$. Buscamos el valor de τ de manera que

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} \quad \frac{120 \quad 200}{70 - 200} = 0.615 \qquad (a)$$

Por consiguiente, ensayamos valores de τ y obtenemos lecturas de la razón de temperaturas a partir de la Fig. 4-7 hasta lograr concordancia con la Ec. a. La lista de interaciones se encuentra a continuación. Los valores para k y α se obtienen del Ej. 4-3.

τ, s	$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{T - T_i}{T_\infty \quad T_i}$ de la *Fig. 4-7*
1000	0.708	0.069	0.41
3000	1.226	0.040	0.61
4000	1.416	0.035	0.68

Por tanto, el tiempo requerido es aproximadamente de 3000 s

Ejemplo 4-5

Una gran placa de aluminio de 5.0 cm de espesor auna temperatura inicial de 200 °C se expone bruscamente al medio de convección del Ej. 4-4. Calcule la temperatura a una profundidad de 1.25 cm de una de sus caras, un minuto después que se expuso la placa al medio. ¿Cuánta energía por unidad de área se eliminó de la placa en este tiempo?

Solución

Para la resolución de este problema, se pueden utilizar las gráficas de Heisler de las Figs. 4-9 y 4-12. Primero calculamos la temperatura del centro de la placa utilizando la Fig. 4-9, y en seguida utilizamos la Fig. 4-12 para calcular la temperatura en la posición x especificada. De las condiciones del problema tenemos

$$\theta_i = T_i \quad T_\infty = 200 - 70 = 130 \qquad \alpha = 8.4 \text{ x } 10\text{-s } m^2/s \quad [3.26 \text{ pie}^2/h]$$

$2L = 5.0$ cm $L = 2.5$ cm $\tau = 1$ min $= 60$ s

$k = 215$ W/m·°C [124 Btu/h·pie·°F]

$h = 525$ W/m²·°C [92.5 Btu/h·pie²·°F]

$x = 2.5 - 1.25 = 1.25$ cm

Así,
$$\frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(0.025)^2} = 8.064 \qquad \frac{k}{hL} = \frac{215}{(525)(0.025)} = 16.38$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1.25}{2.5} = 0.5$$

De la Fig. 4-9

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.61$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty = (0.61)(130) = 79.3$$

De la Fig. 4-12 en $x/L = 0.5$,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$

Y
$$\theta = T - T_\infty = (0.98)(79.3) = 77.7$$

$$T = 77.7 + 70 = 147.7\ ^\circ\text{C}$$

Calculamos la energía perdida por la lámina utilizando la Fig. 4-16. Para este cálculo necesitamos las siguientes propiedades del aluminio:

$$\rho = 2700\ \text{kg/m}^3 \qquad c = 0.9\ \text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$$

De la Fig. 4-16 necesitamos

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(525)^2(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(215)^2} = 0.03 \qquad \frac{hL}{k} = \frac{(525)(0.025)}{215} = 0.061$$

De la Fig. 4-16

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.41$$

Por unidad de área

$$\frac{Q_0}{A} = \frac{\rho c V \theta_i}{A} = \rho c (2L)\theta_i$$
$$= (2700)(900)(0.05)(130)$$
$$= 15.8 \times 10^6\ \text{J/m}^2$$

de manera que el calor extraído por unidad de área es

$$\frac{Q}{A} = (15.8 \times 10^6)(0.41) = 6.48 \times 10^6\ \text{J/m}^2 \quad [1571\ \text{Btu/pie}^2]$$

Ejemplo 4-6

Un cilindro largo de aluminio de 5.0 cm de diámetro y a una temperatura inicial de 200 °C se expone bruscamente a un medio de convección a 70 °C y $h = 525$ W/m²·°C. Calcule la temperatura en un radio de 1.25 cm y el calor perdido por unidad de área, un minuto después que se expuso el cilindro al medio.

Solución

Este problema es similar al Ej. 4-5 exceptuando que para su resolución utilizaremos las Figs. 4-10 y 4-13. Tenemos:

$$\theta_i = T_i - T_\infty = 200 \quad 70 = 130 \qquad \alpha = 8.4 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$r_0 = 2.5 \text{ cm} \qquad \tau = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$k = 215 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad h = 525 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \qquad r = 1.25 \text{ cm}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3 \qquad c = 0.9 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

Calculamos

$$\frac{\alpha\tau}{r_0^2} = \frac{(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(0.025)^2} = 8.064 \qquad \frac{k}{hr_0} = \frac{215}{(525)(0.025)} = 16.38$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1.25}{2.5} = 0.5$$

De la Fig. 4-10

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.38$$

y de la Fig. 4-13 en $r/r_0 = 0.5$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$

de modo que $\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta}{\theta_0}\frac{\theta_0}{\theta_i}$ $\theta = (0.38)(0.98) = 0.372$

Y $\theta = T - T_\infty = (0.372)(130) = 48.4$

$$T = 70 + 48.4 = 118.4 \text{ °C}$$

Para calcular el calor perdido determinamos

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(525)^2(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(215)^2} = 0.03 \qquad \frac{hr_0}{k} = \frac{(525)(0.025)}{215} = 0.061$$

Entonces de la Fig. 4-17

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.65$$

Por unidad de longitud

$$\frac{Q_0}{L} = \frac{\rho c V \theta_i}{L} = \rho c \pi r_0^2 \theta_i = (2700)(900)\pi(0.025)^2(130) = 6.203 \times 10^5 \text{ J/m}$$

y el calor real perdido por unidad de longitud es:

$$\frac{Q}{L} = (6.203 \times 10^5)(0.65) = 4.032 \times 10^5 \text{ J/m} \quad [116.5 \text{ Btu/pie}$$

4-5 Sistemas multidimensionales

Las gráficas de Heisler que acabamos de estudiar se pueden utilizar para obtener la distribución de temperatura en placas infinitas de espesor $2L$, en cilindros largos o en

esferas. Cuando se encuentra una pared cuyas dimensiones de altura y profundidad no sean grandes en comparación con el espesor, o un cilindro cuya longitud no sea grande comparada con su diámetro, se necesitan coordenadas espaciales adicionales para especificar su temperatura; las gráficas anteriores ya no pueden aplicarse, y nos vemos forzados a buscar otro método de resolución. Por fortuna es posible combinar soluciones para los sistemas unidimensionales de una manera muy directa para obtener soluciones para problemas multidimensionales.

Es evidente que la barra rectangular infinita de la Fig. 4-19 puede estar formada por dos placas infinitas de espesor $2L_1$ y $2L_2$ respectivamente. La ecuación diferencial que prevalece en esta situación sería:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-23}$$

y para utilizar el método de separación de variables para realizar la resolución, deberíamos suponer una solución de producto de la forma:

$$T(x, z, \tau) = X(x)Z(z)\Theta(\tau)$$

Se puede demostrar que la distribución adimensional de temperatura puede expresarse como un producto de las soluciones para problemas de dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$ respectivamente:

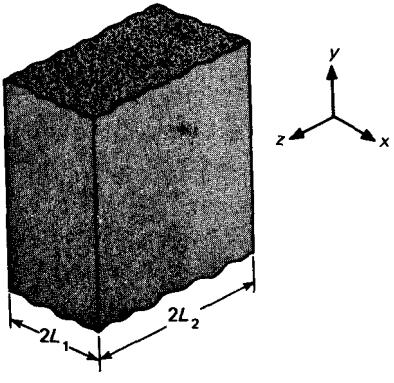
$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{barra}} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{Placa de } 2L_1} \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{Placa de } 2L_2} \tag{4-24}$$

en donde T_i es la temperatura inicial de la barra y T_∞ es la temperatura del medio.

Para dos placas infinitas las ecuaciones diferenciales respectivas serían

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T_2 T_1}{\alpha \partial \tau} \quad -\frac{1}{\partial z^2} - \frac{\partial T_2}{\alpha \partial \tau} \tag{4-25}$$

y las soluciones de producto supuestas serán



Fíg. 4-19 Barra rectangular infinita.

$$T_1 = T_1(x, \tau) \qquad T_2 = T_2(z, \tau) \tag{4-26}$$

Ahora demostraremos que la solución de producto para la Ec. 4-23 puede construirse a partir de un producto simple de las funciones (T_1, T_2), es decir:

$$T(x, z, \tau) = T_1(x, \tau)T_2(z, \tau) \tag{4-27}$$

Las derivadas adecuadas para sustituirse en la Ec. 4-23 se obtienen de la Ec. 4-27 como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = T_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = T_1 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + T_2 \frac{\partial T_1}{\partial \tau}$$

utilizando las Ecs. 4-25 tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha T_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \alpha T_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$$

Sustituyendo estas relaciones en la Ec. 4-23 nos da

$$T_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + T_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha T_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \alpha T_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}\right)$$

es decir, que la solución de producto supuesta de la Ec. 4-27 satisface realmente la diferencial original (Ec. 4-23). Esto significa que la distribución adimensional de temperatura para una barra rectangular infinita puede expresarse como un producto de las soluciones para problemas de dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$ respectivamente, como lo indica la Ec. 4-24.

De manera semejante a la que acabamos de describir, la resolución para un bloque tridimensional puede expresarse como un producto de tres soluciones para placa infinita, para placas que tienen el espesor de los tres lados del bloque. De igual modo, la solución para un cilindro de longitud finita podría expresarse como el producto de las soluciones del cilindro infinito y una placa infinita que tenga un espesor igual a la longitud del cilindro. También se pueden realizar combinaciones con las soluciones para cilindro y placa infinitas a fin de obtener distribuciones de temperatura en barras y cilindros semiinfinitos. Algunas de las combinaciones se encuentran resumidas en la Fig. 4-20 donde

$C(\Theta)$ = solución para un cilindro infinito
P(X) = solución para una placa infinita
S(X) = solución para un sólido semiinfinito

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de las diferentes gráficas para el cálculo de temperaturas en sistemas multidimensionales.

Ejemplo 4-7

Un cilindro de aluminio semiinfinito de 5 cm de diámetro se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 200 °C. Se le somete bruscamente a una condición de frontera de convección a 70 °C con $h = 525$ W/m²·°C. Calcule las temperaturas en el eje y la superficie del cilindro a 10 cm de su extremo después de 1 min de exposición al medio.

Solución

Este problema requiere una combinación de las soluciones para el cilindro infinito y la lámina semiinfinita, de acuerdo con la Fig. 4-20*e*. Para la lámina tenemos

$$x = 10 \text{ cm} \qquad \alpha = 8.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 215 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

de manera que los parámetros que se usan con la Fig. 4-7 son

$$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k} = \frac{(525)[(8.4 \times 10^{-5})(60)]^{1/2}}{215} = 0.173$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0.1}{(2)[(8.4 \times 10^{-5})(60)]^{1/2}} = 0.704$$

De la Fig. 4-7

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{lámina semiinfinita}} = 1 \quad 0.036 = 0.964 = S(X)$$

Para el cilindro infinito buscamos las razones de temperaturas del eje y de la superficie. Los parámetros que usamos con la Fig. 4-10 son

$$r_0 = 2.5 \text{ cm} \qquad \frac{k}{hr_0} = 16.38 \qquad \frac{\alpha\tau}{r_0^2} = 8.064 \qquad \frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.38$$

Esta es la razón de temperaturas del eje. Para encontrar la razón de temperaturas de la superficie, introducimos la Fig. 4-13, utilizando

$$\frac{r}{r_0} = 1.0 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0.97$$

Así

$$C(\Theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cil inf}} = \begin{cases} 0.38 & \text{en } r = 0 \\ (0.38)(0.97) = 0.369 & \text{en } r = r_0 \end{cases}$$

Combinando las soluciones para una lámina semiinfinita y un cilindro infinito, tenemos:

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro semiinfinito}} = C(\Theta)S(x)$$

$$= (0.38)(0.964) = 0.366 \qquad \text{en } r = 0$$

$$= (0.369)(0.964) = 0.356 \qquad \text{en } r = r_0$$

Las temperaturas correspondientes son:

$$T = 70 + (0.366)(200 - 70) = 117.6 \qquad \text{en } r = 0$$

$$T = 70 + (0.356)(200 - 70) = 116.3 \qquad \text{en } r = r_0$$

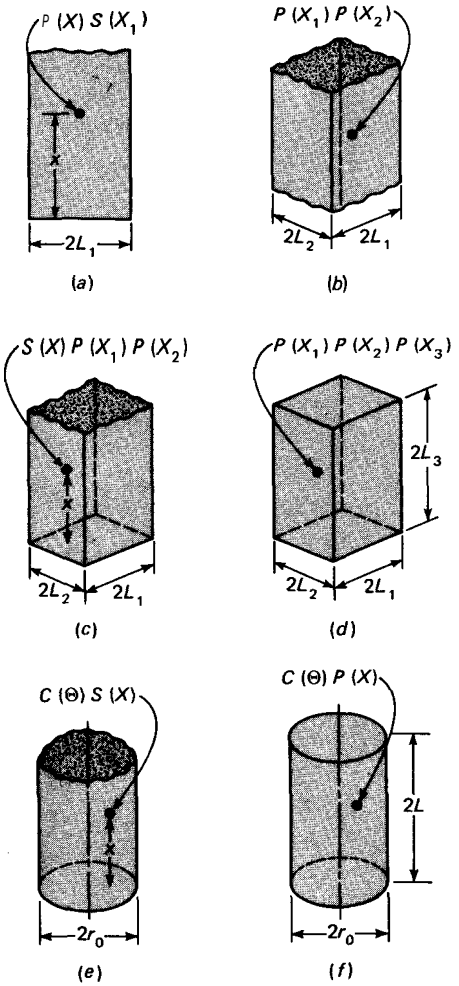


Fig. 4-20 Soluciones de producto para temperaturas en sistemas multidimensionales: (*a*) placa semiinfinita; (*b*) barra rectagular infinita; (*c*) barra rectangular semiinfinita; (*d*) paralelepípedo rectangular; (*e*) cilindro semiinfinito; (*f*) cilindro corto.

Ejemplo 4-8

Un cilindro corto de aluminio de 5.0 cm de diámetro y 10.0 cm de largo se encuentra inicialmente a una temperatura de 200 °C. Se le somete de manera brusca a un medio de convección a 70 °C y $h = 525$ W/m^2·°C. Calcule la temperatura en una posición radial de 1.25 cm ya 0.625 cm de distancia del extremo del cilindro, después de 1 min de exposición al medio.

Solución

Para resolver este problema combinamos las soluciones para un cilindro infinito y una placa infinita a partir de las gráficas de Heisler, de acuerdo con las combinaciones que se muestran en la Fig. 4-20*f*. Para el problema de placa infinita

$$L = 5 \text{ cm}$$

la posición x se mide a partir del centro de la placa de manera que

$$x = 5 - 0.625 = 4.375 \text{ cm} \qquad \frac{x}{L} = \frac{4.375}{5} = 0.875$$

Para aluminio

$$\alpha = 8.4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 215 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

de modo que: $\dfrac{k}{hL} = \dfrac{215}{(525)(0.05)} = 8.19 \qquad \dfrac{\alpha\tau}{L^2} = \dfrac{(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(0.05)^2} = 2.016$

De las Figs. 4-9 y 4-12, respectivamente.

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.75 \qquad \frac{\theta}{\theta_i} = 0.95$$

de modo que $$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{placa}} = (0.75)(0.95) = 0.7125$$

Para el cilindro $r_0 = 2.5$ **cm**

$$\frac{r_0}{} = \frac{}{} = 0.5 \qquad \overline{hr_0} = \overline{(525)(0.025)} = 16.38$$

$$\frac{\alpha\tau}{r_0^2} = \frac{(8.4 \times 10^{-5})(60)}{(0.0025)^2} = 8.064$$

y de las Figs. 4-10 y 4-13, respectivamente.

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.38 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$

de modo que $$\overline{\theta_i\theta}_{0\,\text{cil}} = (0.38)(0.98) = 0.3724$$

La combinación de las soluciones para la placa y el cilindro nos da

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro corto}} = (0.7125)(0.3724) = 0.265$$

Así $$T = T_\infty + (0.265)(T_i - T_\infty) = 70 + (0.265)(200 - 70) = 104.5\ ^\circ\text{C}$$

4-6 Método numérico transiente

Las gráficas antes descritas son muy útiles para calcular temperaturas en ciertos sólidos de forma regular bajo condiciones de flujo de calor transiente. Por desgracia, muchas figuras geométricas de interés práctico quedan fuera de estas categorías; además, con frecuencia nos enfrentamos con problemas en los que las condiciones de frontera varían con el tiempo. Estas condiciones transientes de frontera al igual que las de la figura geométrica del cuerpo pueden ser tales que una solución matemática del problema resulte imposible. En estos casos, se manejan mejor los problemas con una técnica numérica, con calculadoras manuales o computadoras, según la exactitud requerida y los medios económicos de que se dispongan. El planteamiento del problema es el mismo, independientemente de que se calcule a mano o se utilice una computa-

dora. Es este planteamiento que deseamos describir ahora. Para facilitar la exposición, por el momento limitamos el análisis a sistemas bidimensionales. Se puede hacer con facilidad una extensión a tres dimensiones.

Considérese un cuerpo bidimensional dividido en incrementos, tal como se muestra en la Fig. 4-21. El subíndice m indica la posición x y el subíndice n indica la posición y. La ecuación diferencial que controla el flujo de calor dentro del cuerpo sólido es

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\rho c\,\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-28}$$

suponiendo propiedades constantes. Del Cap. 3 recordamos que las segundas derivadas parciales pueden aproximarse por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\approx\frac{1}{(\Delta x)^2}(T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}) \tag{4-29}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\approx\frac{1}{(\Delta y)^2}(T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}) \tag{4-30}$$

La derivada temporal en la Ec. 4-28 se aproxima por

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}\approx\frac{T^{p+1}_{m,n}-T^{p}_{m,n}}{\mathrm{A}\tau} \tag{4-31}$$

En esta relación los índices superiores indican el incremento en el tiempo. La combinación de las dos relaciones anteriores nos da la ecuación de diferencias equivalente a la Ec. 4-28

$$\frac{T^{p}_{m+1,n}+T^{p}_{m-1,n}-2T^{p}_{m,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{T^{p}_{m,n+1}+T^{p}_{m,n-1}-2T^{p}_{m,n}}{(\Delta y)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n}-T^{p}_{m,n}}{\mathrm{A}\tau} \tag{4-32}$$

Así, si se conoce la temperatura en los diversos nodos en cualquier tiempo, se pueden calcular las temperaturas después de un incremento de tiempo Aτ, escribiendo una

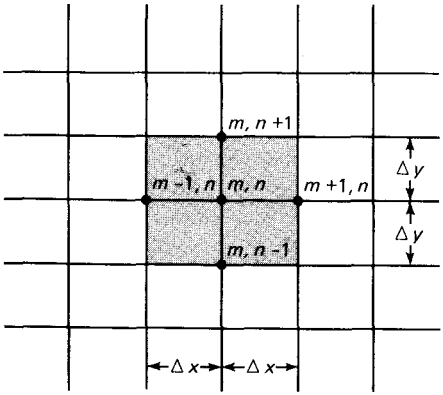


Fig. 4-21 Nomenclatura para resolución numérica del problema de conducción de calor bidimensional en estado estacionario.

ecuación como la Ec. 4-32 para cada nodo y obteniendo los valores de $T_{m,n}^{p+1}$. El procedimiento puede repetirse para obtener la distribución después de cualquier número deseado de incrementos de tiempo. Si los incrementos de coordenadas espaciales se escogen de modo que

$$\Delta x = \Delta y$$

la ecuación resultante para $T_{m,n}^{p+1}$ se convierte en

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}(T_{m+1,n}^{p} + T_{m-1,n}^{p} + T_{m,n+1}^{p} + T_{m,n-1}^{p}) + \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T_{m,n}^{p} \tag{4-33}$$

Si los incrementos de tiempo y distancia se escogen de modo adecuado de tal manera que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 4 \tag{4-34}$$

se puede ver que la temperatura del nodo (m, n) después de un incremento de tiempo, es sencillamente el promedio aritmético de las cuatro temperaturas nodales que lo rodean al comienzo del incremento en el tiempo.

Cuando se trata de un sistema unidimensional, la ecuación se convierte en

$$T_{m}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}(T_{m+1}^{p} + T_{m-1}^{p}) + \left[1 + \frac{2\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T_{p}^{m} \tag{4-35}$$

y si se escogen incrementos de tiempo y distancia de manera que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = 2 \tag{4-36}$$

la temperatura del nodo m después del incremento de tiempo se expresa como el promedio aritmético de las dos temperaturas nodales adyacentes al comienzo del incremento del tiempo.

En este punto son necesarias algunas observaciones generales sobre el uso de los métodos numéricos de resolución para problemas de conducción transiente. Ya hemos observado que la selección del valor del parámetro

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau}$$

determina la facilidad con la que podemos proceder a obtener la solución numérica; la elección de un valor 4 para un sistema bidimensional o un valor 2 para un sistema unidimensional hace los cálculos particularmente fáciles.

Una vez que se han establecido los incrementos de distancia y el valor de M, el incremento en el tiempo queda fijo; y no podemos alterarlo sin cambiar el valor de Ax

o M, o ambos. Es claro que cuanto mayor sea el valor de Ax y AT, con mayor rapidez se obtendrá la resolución. Por otra parte, entre menor sea el valor de estos incrementos en las variables independientes, mayor será la exactitud que se obtenga. A primera vista se podría suponer que podrían usarse pequeños incrementos de distancia para mayor exactitud, en combinación con incrementos de tiempo grandes para acelerar la so lución. Sin embargo, esto no ocurre porque las ecuaciones de diferencia finita limitan los valores de $\Delta\tau$ que pueden usarse una vez que se ha escogido Ax. Obsérvese que si en la Ec. 4-35. $M < 2$, el coeficiente de T^p_m se vuelve negativo y producimos una condición que viola la segunda luz de la termodinámica. Por ejemplo, supóngase que los nodos adjuntos son iguales en temperatura pero menores que T^p_m. Después de un incremento AT, T^p_m puede no ser menor que estas temperaturas adjuntas; de otra manera el calor tendría que fluir hacia arriba en la escala de temperatura, y esto es imposible. Un valor de $M < 2$ produciría exactamente este efecto; por consiguiente debemos restringir los valores de M a

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta \tau} = \begin{cases} M \geq 2 & \text{sistemas unidimensionales} \\ M \geq 4 & \text{sistemas bidimensionales} \end{cases}$$

Esta restricción limita automáticamente nuestra elección de AT, una vez que se estableció Ax.

Ocurre que las restricciones antes mencionadas, las cuales se imponen por una base física, también pueden deducirse matemáticamente. Se puede demostrar que las soluciones de diferencia finita no convergerán a menos que se cumplan estas condiciones. En las Refs. 7, 13, 15 se tratan en detalle los problemas de estabilidad y convergencia de soluciones numéricas.

Las ecuaciones de diferencia que acabamos de dar son útiles en la determinación de la temperatura interna de un cuerpo, como una función de espacio y tiempo. En la frontera del sólido casi siempre se encuentra una resistencia de convección al flujo de calor, de manera que las relaciones anteriores dejan de aplicarse. En general, cada condición de frontera de convección debe manejarse por separado, dependiendo de la figura geométrica que se está considerando. Se considerará como un ejemplo el caso de la pared plana.

Para el sistema unidimensional que se muestra en la Fig. 4-22 podemos realizar un balance de energía en la frontera de convección de manera que

$$kA \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\text{pared}} = hA(T_{ur} - T_\infty) \tag{4-37}$$

La aproximación de diferencia finita se expresaría por

$$-k \frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{m+1} - T_m) = h\ \Delta y(T_{m+1} - T_\infty)$$

$$T_{m+1} = \frac{T_m + (h\ \Delta x/k)T_\infty}{1 + h\ \Delta x/k}$$

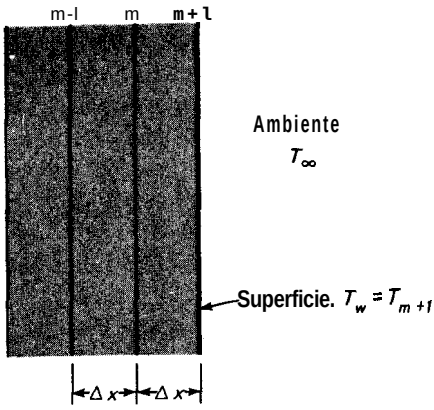


Fig. 4-22 Nomenclatura para la solución numérica del problema de conducción en estado transitorio, con condiciones de frontera de convección.

Para aplicar esta condición, debemos calcular la temperatura de superficie T_{m+1} en cada incremento de tiempo, y en seguida utilizar esta temperatura en las ecuaciones nodales para los puntos interiores del solido. Esto es sólo una aproximación porque hemos ignorado la capacidad calorífica del elemento de la pared en la frontera.
Esta aproximación funcionará bastante bien cuando se utiliza un gran numero de incrementos en x, ya que la porción de capacidad calorífica que se ignora es pequeña en comparación con el total. De un modo general, podemos tomar en cuenta la capacidad calorífica considerando la pared bidimensional de la Fig. 3-7, expuesta a una condición de frontera de convección. Realizamos un balance de energía transiente en el nodo (m, n), haciendo que la suma de la energía de conducción y convección hacia el nodo sea igual al incremento en la energía interna del nodo. Así

$$k\,\Delta y\,\frac{T^p_{m-1,n} - T^p_{m,n}}{\Delta x} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^p_{m,n+1} - TL}{\Delta y} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^p_{m,n-1} - T^p_{m,n}}{\Delta y} + h\,\Delta y(T_\infty - T^p_{m,n}) = \rho c\,\frac{\Delta x}{2}\,\mathrm{Ay}\,\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta \tau}$$

Si $\Delta x = \Delta y$, la relación para $T^{p+1}_{m,n}$ se convierte en:

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\frac{h\,\mathrm{Ax}}{k}\,T_\infty + 2T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1} + \left[-\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau}\,2\frac{h\,\Delta x}{k} - 41\,T^p_{m,n}\right]\right\} \quad (4\text{-}38a)$$

La relación unidimensional correspondiente es

$$T^{p+1}_m = \frac{\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\frac{h\,\Delta x}{k}\,T_\infty + 2T^p_{m-1} + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta} \quad 2\frac{h\,\Delta x}{k} - 2\right]T^p_m\right\} \quad (4\text{-}38b)$$

Obsérvese ahora que la selección del parámetro $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ no es tan simple como la de los puntos nodales interiores, ya que el coeficiente de transferencia de calor influye en la selección. Casi siempre es mejor seleccionar el valor de este parámetro de manera que el coeficiente de T^p_m o $T^p{}_{m,n}$ sea cero. Entonces estos valores serán:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = \begin{cases} 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) & \text{para el caso unidimensional} \\ 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) & \text{para el caso bidimensional} \end{cases}$$

Para asegurar la convergencia de la solución numérica, se deberán restringir todas estas selecciones de parámetros $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ de acuerdo con

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} \geq \begin{cases} 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) & \text{para el caso unidimensional} \\ 2\left(\dfrac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) & \text{para el caso bidimensional} \end{cases}$$

Diferencias progresivas y regresivas

Las ecuaciones que acabamos de mencionar han sido desarrolladas en base de una técnica de *diferencia progresiva*, ya que la temperatura del nodo en un incremento de tiempo futuro se expresa en términos de las temperaturas nodales que lo rodean al comienzo del incremento en el tiempo. Las expresiones se llaman formulaciones explícitas, porque es posible escribir explícitamente las temperaturas nodales $T^{p+1}_{m,n}$ en términos de las temperaturas nodales previas $T^p_{m,n}$. En esta formulación, el cálculo procede directamente de un incremento en el tiempo al siguiente, hasta que se calcula la distribución de temperatura en el estado final deseado.

La ecuación de diferencia también puede formularse calculando las derivadas espaciales en términos de las temperaturas en el incremento de tiempo $p + 1$. A tal arreglo se le llama una formulación de *diferencia regresiva* porque las derivadas temporales se mueven hacia atrás, desde los tiempos para conducción de calor hacia el nodo. Entonces la ecuación equivalente a la Ec. 4-32 sería

$$\frac{T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta\tau} \qquad (4\text{-}39)$$

La equivalencia a la Ec. (4-33) es

$$T^p_{m,n} = \frac{-\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}(T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} + T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1}) + \left[1 + \frac{4\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p+1}_{m,n} \qquad (4\text{-}39a)$$

Ahora podemos observar que esta formulación de diferencia regresiva no permite el cálculo explícito de T^{p+1} en términos de T^p. Antes bien se tendrá que escribir todo un conjunto de ecuaciones para el sistema nodal completo, y resolverlo en forma simultánea para determinar las temperaturas T^{p+1}. Por tanto, decimos que el método de diferencia regresiva produce una ***formulación implícita*** para las temperaturas futuras en el análisis transiente. La solución para el conjunto de ecuaciones puede obtenerse por medio de los métodos estudiados en el Cap. 3.

El número de Biot y los módulos de Fourier también pueden definirse de la siguiente manera para problemas en el formato numérico:

$$\mathrm{Bi} = \frac{h\,\Delta x}{k} \tag{4-40}$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \tag{4-41}$$

Se han construido las Tablas 4-2 y 4-3 utilizando esta notación para resumir algunas ecuaciones nodales típicas, tanto de formulación explícita como implícita.

La ventaja de un procedimiento explícito de diferencia progresiva es el cálculo directo de las futuras temperaturas nodales; sin embargo, la estabilidad de este cálculo

Tabla 4-2 Ecuaciones nodales explícitas (Las líneas punteadas indican elemento de volumen)

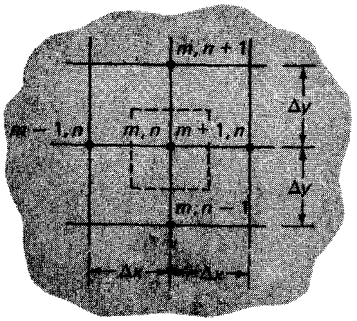
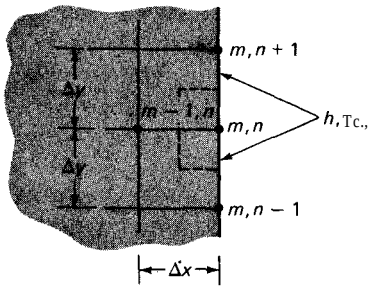
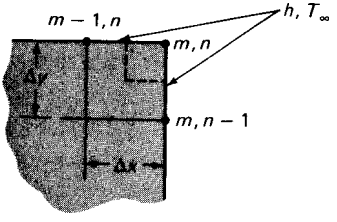
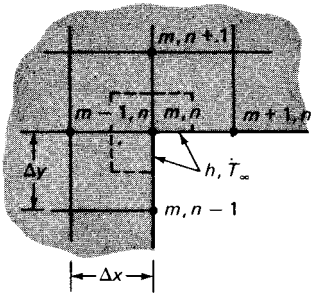
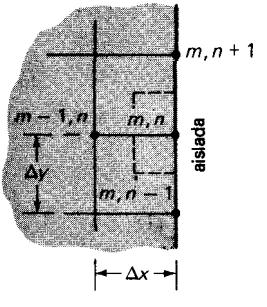
Situación física	*Ecuación nodal* $\Delta x = \Delta y$	*Requerimiento de estabilidad*
(a) Nodo interior 	$T^{p+1}_{m,n} = \mathrm{Fo}(T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m+1,n} + T^p_{m,n-1}) + [1 - 4(\mathrm{Fo})]T^p_{m,n}$	$\mathrm{Fo} \leq \frac{1}{4}$
(b) Nodo de frontera de convección 	$T^{p+1}_{m,n} = \mathrm{Fo}[2T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1} + 2(\mathrm{Bi})T_\infty{}^p] + [1 - 4(\mathrm{Fo}) - 2(\mathrm{Fo})(\mathrm{Bi})]T^p_{m,n}$	$\mathrm{Fo}(2 + \mathrm{Bi}) \leq \frac{1}{2}$

Tabla 4-2 (Continuación)

Situación física	*Ecuación nodal* $\Delta x = \Delta y$	*Requerimiento de* estabilidad
(c) Vértice exterior con frontera de convección 	$T^{p+1}_{m,n} = 2(\mathrm{Fo})[T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n-1} + 2(\mathrm{Bi})T_{\infty}{}^{p}] + [1 - 4(\mathrm{Fo}) - 4(\mathrm{Fo})(\mathrm{Bi})]T^{p}_{m,n}$	$\mathrm{Fo}(1 + \mathrm{Bi}) \leq \frac{1}{4}$
***(d)* Vértice interior con frontera de convección** 	$T^{p+1}_{m,n} = \frac{2}{3}(\mathrm{Fo})[2T^{p}_{m,n+1} + 2T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n-1} + 2(\mathrm{Bi})T_{\infty}{}^{p}] + [1 - 4(\mathrm{Fo}) - \frac{4}{3}(\mathrm{Fo})(\mathrm{Bi})]T^{p}_{m,n}$	$\mathrm{Fo}(3 + \mathrm{Bi}) \leq \frac{3}{4}$
(e) Frontera aislada 	$T^{p+1}_{m,n} = \mathrm{Fo}[2T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1}] + [1 - 4(\mathrm{Fo})]T^{p}_{m,n}$	$\mathrm{Fo} \leq \frac{1}{4}$

está controlada por la selección de los valores de Ax y AT. Una selección de un valor Ax pequeño fuerza **automáticamente** la solución de un valor máximo para AT. Por otra parte, no existe tal restricción en la resolución de las ecuaciones que se obtienen por medio de la formulación implícita. Esto significa que se pueden seleccionar incrementos de tiempo más grandes a fin de acelerar el cálculo. La desventaja obvia del método implícito es el número de cálculos cada vez mayor en cada paso. No obstante, para problemas que involucran un gran número de nodos, el método implícito puede dar como resultado un tiempo de computación menor para la solución final, ya que debido a los requerimientos de estabilidad en el método explícito se impondrán **incremen-**

tos de tiempo muy pequeños. En el método implícito se pueden utilizar incrementos en $\Delta\tau$ mucho mayores para acelerar la solución.

Referimos al lector las Refs. 4, 8, 13, 14 y 15 para el estudio de muchas aplicaciones del análisis numérico para problemas de conducción de calor transiente.

En este punto debe ser obvio para el lector que las técnicas de diferencia finita pueden aplicarse a casi cualquier situación con sólo un poco de paciencia y cuidado. Cuando se dispone de una computadora digital grande, los problemas muy complicados se vuelven fáciles de resolver. Schenck [8] y en las Refs. 17, 19, 21 del Cap. 3 nos proporcionan programas de computación para diversos problemas de transferencia de calor de interés. En las Refs. 9 a 13 se tratan los métodos de elemento finito que se usan en problemas de transferencia de calor por conducción.

4-7 Formulación de capacidad y resistencia térmicas

Como en el Cap. 3, podemos ver cada elemento de volumen como un nodo conectado a sus vecinos adyacentes por medio de resistencias térmicas. Para condiciones de estado estacionario de transferencia de energía neta al interior del nodo es cero, mientras que para los problemas de estado estacionario que nos interesan en este capítulo, la

Tabla 4-3 Ecuaciones nodales implícitas

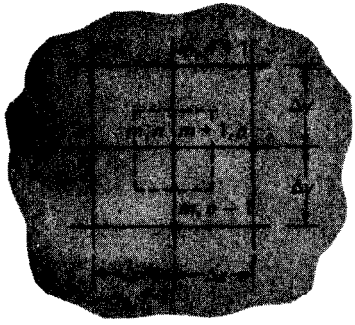
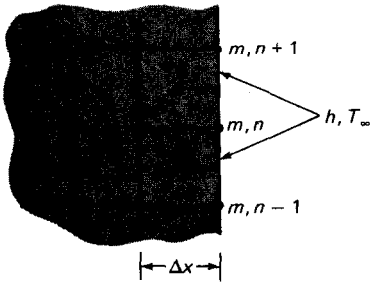
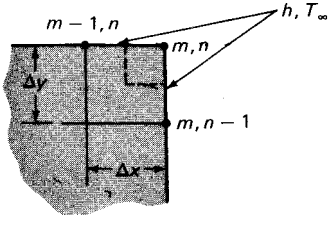
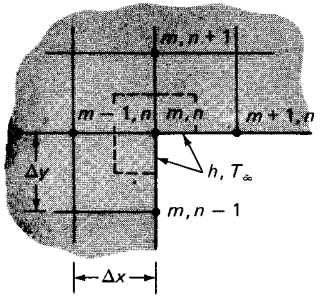
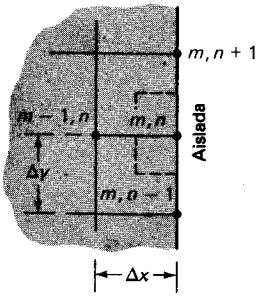
Situación física	*Ecuación nodal para* $\Delta x = \Delta y$
(a) Nodo interior 	$[1 + 4(\mathrm{Fo})]T^{p+1}_{m,n} - \mathrm{Fo}(T^{p+1}_{m-1,n} + T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m,n-1}) - T^{p}_{m,n} = 0$
(b) Nodo de frontera de convección 	$[1 + 2(\mathrm{Fo})(2 + \mathrm{Bi})]T^{p+1}_{m,n} - \mathrm{Fo}[T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1} + 2T^{p+1}_{m-1,n} + 2(\mathrm{Bi})T_\infty{}^{p+1}] - T^{p}_{m,n} = 0$

Tabla 4-3 (Continuación)

Situación física	*Ecuación nodal para* $\Delta x = \Delta y$
(c) Vértice exterior con frontera de convección 	$[1 + 4(\mathrm{Fo})(1 + \mathrm{Bi})]T_{m,n}^{p+1} - 2(\mathrm{Fo})[T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2(\mathrm{Bi})T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^{p} = 0$
(d) **Vértice** interior con frontera de convección 	$\left[1 + 4(\mathrm{Fo})\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)\right]T_{m,n}^{p+1} - \frac{2(\mathrm{Fo})}{3} \times [T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2T_{m,n+1}^{p+1} + 2T_{m+1,n}^{p+1} + 2(\mathrm{Bi})T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^{p} = 0$
(e) Frontera aislada 	$[1 + 4(\mathrm{Fo})]T_{m,n}^{p+1} - \mathrm{Fo}(2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) - T_{m,n}^{p} = 0$

transferencia de energía neta hacia el interior del nodo debe manifestarse como un incremento en la energía interna del elemento. Cada elemento de volumen se comporta como una pequeña "capacidad global", y las interacciones de todos los elementos determinan el comportamiento del sólido durante un proceso transiente. Si la energía interna de un nodo i puede expresarse en términos de calor específico y temperatura, entonces su rapidez de cambio con el tiempo se aproxima por

$$\frac{\Delta E}{\Delta \tau} = \rho c\, \Delta V\, \frac{T_i^{p+1} - T_i^{p}}{\Delta \tau}$$

donde AV es el elemento de volumen. Si definimos la capacidad térmica como

$$C_i = \rho_i c_i \Delta V_i \tag{4-42}$$

entonces la formulación general de resistencia y capacidad para el balance de energía en el nodo es

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^p - T_i^p}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^j}{\Delta\tau} \tag{4-43}$$

donde todos los términos de la izquierda son iguales a los de la Ec. 3-31. En las Tablas 3-5 y 3-6 se dan los elementos de volumen y las resistencias para diversas geometrías y condiciones de frontera. En la formulación anterior también podemos adaptar sistemas físicos donde la energía interna E involucra cambios de fase, pero están fuera del alcance de nuestro estudio. El punto central es que el uso de conceptos de resistencia y capacidad térmicas nos permiten escribir la ecuación de diferencia progresiva para todos los nodos y condiciones de frontera en una sola forma compacta, la Ec. 4-43. Así el planteamiento para una solución numérica se vuelve un proceso mucho más organizado que puede adaptarse con rapidez a los métodos de cómputo disponibles.

La Ec. 4-43 se desarrolla utilizando el concepto de diferencia progresiva para producir una relación explícita para cada T_i^{p+1}. Como en el estudio previo, también podríamos escribir el balance de energía utilizando la diferencia regresiva con las transferencias de calor en cada nodo i, calculadas en términos de las temperaturas en los incrementos de tiempo $p + 1$. Así

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+1} - T_i^{p+1}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta\tau} \tag{4-44}$$

Ahora, tal como antes, el conjunto de ecuaciones produce un conjunto *implícito* que debe resolverse en forma simultánea para T_i^{p+1}, etc. *Como* se dijo en el Cap. 3, la resolución puede llevarse a cabo por medio de métodos numéricos. Si se va a realizar una resolución con la técnica de iteración de Gauss-Seidel, entonces la Ec. 4-44 deberá resolverse para T_i^{p+1} y expresarse como

$$T_i^{p+1} = \frac{q_i + \sum_j (T_j^{p+1}/R_{ij}) + (C_i/\Delta\tau)T_i^p}{\sum_j (1/R_{ij}) + C_i/\Delta\tau} \tag{4-45}$$

Es interesante observar que en el límite de estado estacionario de $\Delta\tau \to \infty$ esta ecuación se vuelve idéntica a la Ec. 3-32, el planteamiento que utilizamos en el Cap. 3 para la solución iterativa.

Los requerimientos de estabilidad en la formulación implícita pueden examinarse resolviendo la Ec. 4-43 para T_i^{p+1}:

$$T_i^{p+1} = \left(q_i + \sum_j \frac{T_j^p}{R_{ij}}\right) \frac{\Delta\tau}{C_i} + \left(1 - \frac{\Delta\tau}{C_i} \sum_j \frac{1}{R_{ij}}\right) T_i^p \tag{4-46}$$

El valor de q_i puede tener influencia en la estabilidad, pero podemos escoger un límite seguro observando el comportamiento de la ecuación para $q_i = 0$. Utilizando el mismo argumento de termodinámica que con la Ec. 4-35, encontramos que el coeficiente T_i^p no puede ser negativo. Por tanto, nuestro requerimiento de estabilidad mínimo es

$$1 - \frac{\Delta\tau}{C_i} \sum_j \frac{1}{R_{ij}} \geq 0 \tag{4-47}$$

Supóngase que tenemos que resolver un problema numérico complicado, en diversas condiciones de frontera, tal vez, con valores no uniformes de incrementos en el espacio, etc. Una vez que tenemos formuladas todas las resistencias y capacidades nodales, tenemos la tarea de escoger el incremento de tiempo $\Delta\tau$ para usarse en el cálculo. A fin de asegurar la estabilidad debemos mantener $\Delta\tau$ igual o menor que un valor obtenido de la relación nodal más estricta, como la Ec. 4-47. Resolviendo para $\Delta\tau$ obtenemos

$$\Delta\tau \leq \left[\frac{C_i}{\sum_j (1/R_{ij})}\right]_{\text{mín}} \quad \text{para estabilidad} \tag{4-48}$$

Debemos observar que el planteamiento de capacidad y resistencia se puede adaptar con facilidad para tomar en cuenta las variaciones de propiedades térmicas con la temperatura. Sólo necesitamos calcular los valores adecuados de ϱ, c y k para incluirlos en C_i y R_{ij}. Dependiendo de la naturaleza del problema y de la exactitud requerida, podrá ser necesario calcular para cada iteración nuevos valores de C_i y R_{ij}.

Ejemplo 4-9: Enfriamiento brusco de una barra

Una barra de acero [$k = 50$ W/m·°C] de 3 mm de diámetro y 10 cm de largo se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 200 °C. En un tiempo cero, se le sumerge de repente en un fluido que tiene $h = 50$ W/m²·°C y $T_\infty = 40$ °C, mientras que uno de sus extremos se mantiene a 200 °C. Determine la distribución de temperatura en la barra después de 100 s. Las propiedades de acero son $\varrho = 7800$ kg/m³ y $c = 0.47$ kJ/kg·°C.

Solución

La selección de incrementos en la varilla es tal como se muestra en la figura. El área de sección transversal de la barra es $A = \pi(1.5)^2 = 7.069$ mm². El elemento de volumen para los nodos 1, 2 y 3 es

$$\Delta V = A\ \Delta x = (7.069)(25) = 176.725 \text{ mm}^3$$

El nodo 4 tiene un AV con la mitad de este valor, 88.36 m³. Ahora podemos tabular las diversas resistencias y capacidades para usarse en una formulación explícita. Para los nodos 1, 2 y 3 tenemos:

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0.025}{(50)(7.069 \times 10^{-6})} = 70.731 \text{ °C/W}$$

$$R_\infty = \frac{1}{h(\pi d\, \Delta x)} = \frac{1}{(50)\pi(3 \times 10^{-3})(0.025)} = 84.883 \text{ °C/W}$$

$$C = \rho c\ \text{AV} = (7800)(470)(1.7673 \times 10^{-7}) = 0.6479 \text{ J/°C}$$

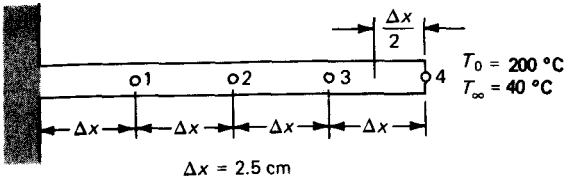


Figura Ejemplo 4-g

Para el nodo 4 tenemos

$$R_{m+} = \frac{1}{hA} = 2829 \ ^\circ\text{C/W} \qquad R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = 70.731 \ ^\circ\text{C/W}$$

$$C = \frac{\rho c \, \Delta V}{2} = 0.3240 \ \text{JPC} \qquad R_\infty = \frac{\Delta x}{hA} = 169.77 \ ^\circ\text{C/W}$$

Para determinar los requerimientos de estabilidad realizamos la siguiente tabla:

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$	C_i	$\frac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$, s
1	0.04006	0.6479	16.173
2	0.04006	0.6479	16.173
3	0.04006	0.6479	16.173
4	0.02038	0.3240	15.897

Así el nodo 4 es el más restrictivo, y debemos seleccionar $\Delta\tau < 15.9$ s. Como deseamos encontrar la distribución de temperatura a los 100 s, utilizamos $\Delta\tau = 10$ s y realizarnos el cálculo para 10 incrementos de tiempo utilizando la Ec. 4-46. Desde luego observamos que $q_i = 0$ debido a que no hay generación de calor. En la siguiente tabla se muestran los cálculos.

Incremento de tiempo	*Temperatura nodal*			
	T_1	T_2	T_3	T_4
0	200	200	200	200
1	170.87	170.87	170.87	169.19
2	153.40	147.04	146.68	145.05
3	141.54	128.86	126.98	125.54
4	133.04	115.04	111.24	109.70
5	126.79	104.48	98.76	96.96
6	122.10	96.36	88.92	86.78
7	118.53	90.09	81.17	78.71
8	115.80	85.23	75.08	72.34
9	113.70	81.45	70.31	67.31
10	112.08	78.51	66.57	63.37

Calculamos la *rapidez* de transferencia de calor al final de los 100 s sumando las pérdidas de calor por convección en la superficie de la barra. Así

$$q = \sum_i \frac{T_i - T_\infty}{R_{i\infty}}$$

y

$$q = \frac{200 - 40}{(2)(84.883) + \dfrac{112.08 + 78.51 + 66.57 - (3)(40)}{84.883}} + \left(\frac{1}{169.77} + \frac{1}{2829}\right)(63.37 - 40) = 2.704 \text{ W}$$

Ejemplo 4-10

Podemos ilustrar el esquema de cálculo para la formulación implícita realizando de nuevo el Ej. 4-9 utilizando sólo dos incrementos de tiempo, es decir, $\Delta\tau = 50$ s.

Para este problema empleamos el planteamiento indicado por la Ec. 4-45, con $\Delta\tau = 50$ s. Se necesitarán las siguientes cantidades:

Nodo	$\frac{C_i}{\Delta\tau}$	$\sum_i \frac{1}{R_{ij}} + \frac{C_i}{\Delta\tau}$
1	0.01296	0.05302
2	0.01296	0.05302
3	0.01296	0.05302
4	0.00648	0.02686

En el Ej. 4-9 determinamos los R_{ij}; por consiguiente, podemos insertarlos en la Ec. 4-45, para escribir las ecuaciones nodales para el final del primer incremento de tiempo, tomando todos $T_i' = 200$ °C. Utilizamos la virgulilla para designar las temperaturas al final del incremento de tiempo. Para el nodo 1,

$$0.05302T_1' = \frac{200}{70.731} + \frac{T_2'}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(200)$$

Para el nodo 2,

$$0.05302T_2' = \frac{T_1'}{70.731} + \frac{T_3'}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(200)$$

Para los nodos 3 y 4,

$$0.05302T_3' = \frac{T_2'}{70.731} + \frac{T_4'}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(200)$$

$$0.02686T_4' = \frac{T_3'}{70.731} + \frac{}{2829} + 40\frac{40}{169.77} + (0.00648)(200)$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a

$$0.05302T_1' - 0.01414T_2' = 5.8911$$

$$-0.01414T_1' + 0.05302T_2' - 0.01414T_3' = 3.0635$$

$$-0.01414T_2' + 0.05302T_3' - 0.01414T_4' = 3.0635$$

$$-0.01414T_3' + 0.02686T_4' = 1.5457$$

cuyas soluciones son

$$T_1' = 145.81\% \qquad T_2' = 130.12\,°\text{C}$$

$$T_3' = 125.43\% \qquad T_4' = 123.56\,°\text{C}$$

Ahora podernos utilizar por segunda vez una formulación de diferencia regresiva utilizando la virgulilla doble para designar las temperaturas al final del segundo incremento de tiempo:

$$0.05302T_1'' = \frac{200}{70.731} + \frac{T_2''}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(145.81)$$

$$0.053027'; = \frac{T_1''}{70.731} + \frac{T_3''}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(130.12)$$

$$0.05302T_3'' = \frac{T_2''}{70.731} + \frac{T_4''}{70.731} + \frac{40}{84.833} + (0.01296)(125.43)$$

$$0.02686T_4'' = \frac{T_3''}{70.731} + \frac{200}{2829} + \frac{40}{169.77} + (0.00648)(123.56)$$

y este conjunto de ecuaciones tiene la siguiente solución:

$$T_1'' = 123.81\ ^\circ\text{C} \qquad T_2'' = 97.27\ ^\circ\text{C}$$

$$T_3'' = 88.32\ ^\circ\text{C} \qquad T_4'' = 85.59\ ^\circ\text{C}$$

Encontramos que existe un desacuerdo sustancial entre estos cálculos y los resultados del Ej. 4-9. Se lograría un mejor acuerdo con un número mayor de incrementos de tiempo. En un problema que involucra un gran número de nodos, la formulación implícita puede significar menos tiempo de la computadora que el método explícito, y el objetivo de este ejemplo ha sido mostrar cómo se realiza el cálculo.

Ejemplo 4-11: Enfriamiento de una cerámica

Una franja de cerámica de 1 x 2 cm [$k = 3.0\ \text{W/m}\cdot^\circ\text{C}$] se encuentra embebida en un material de alta conductividad térmica, corno se muestra, de manera que los lados se mantienen a una temperatura constante de 300 °C. La superficie inferior de la cerámica está aislada y la superior está expuesta a un medio de convección con $h = 200\ \text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$ y $T_\infty = 50\ ^\circ\text{C}$. En un tiempo cero la cerámica se encuentra auna temperatura uniforme de 300 "C. Calcule la temperatura en los nodos 1 y 9 después de 12 s. Para la cerámica, $\rho = 1600\ \text{kg/m}^3$ y $c = 0.8\ \text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$. Calcule también la pérdida de calor total durante este tiempo.

Solución

Tratamos este problemas como un problema bidiiensional con $\Delta x = \text{Ay} = 0.5$ cm. A partir de la simetría, $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$ y $T_7 = T_9$, de manera que tenernos seis temperaturas nodales desconocidas. Ahora tabulamos las diversas resistencias y capacidades nodales. Para los nodos 4 y 5

$$R_{m+} = R_{m-} = R_{n+} = R_{n-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0.005}{(3.0)(0.005)} = 0.3333$$

Para los nodos 1 y 2

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(0.005)(2)}{(3.0)(0.005)} = 0.6667\ ^\circ\text{C/W} \qquad R_{n-} = 0.3333\ ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{n+} = \frac{1}{h\,\Delta x} = \frac{1}{(200)(0.005)} = 1.0\ ^\circ\text{C/W}$$

Para los nodos 7 y 8

$$R_{m+} = R_{m-} = 0.6667\ ^\circ\text{C/W} \qquad R_{n+} = 0.3333\ ^\circ\text{C/W} \qquad R_{n-} = \infty$$

Para los nodos 1, 2, 7 y 8 las capacidades son

$$C = \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2} = \frac{(1600)(800)(0.005)^2}{2} = 16\ \text{J/°C}$$

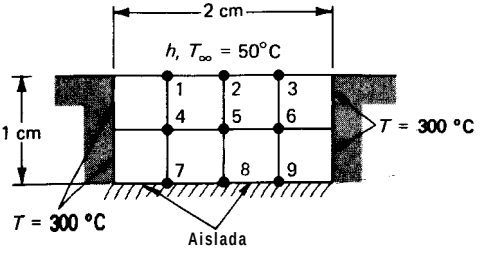


Figura Ejemplo 4-11

Para los nodos 4 **y** 5

$$C = \rho c(\Delta x)^2 = 32 \text{ J/°C}$$

El requerimiento de estabilidad para una solución explícita se determina ahora tabulando las siguientes cantidades:

Nodo	$\sum \frac{1}{R_{ij}}$	C_i	$\frac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$, s
1	7	16	2.286
2	7	16	2.286
4	12	32	2.667
5	12	32	2.667
7	6	16	2.667
8	6	16	2.667

Así los dos nodos de convección controlan el requerimiento de estabilidad, **y** ahora debemos escoger $\Delta\tau \leq$ 2.286 s. Escojamos $\Delta\tau$ = 2.0 s **y** realicemos los cálculos para seis incrementos con la **Ec.** 4-46. Una vez más observamos las consideraciones de simetría al calcular las temperaturas de los nodos 2, 5 **y** 8; es decir, $T_1 = T_3$, etc. En la tabla a continuación mostramos los cálculos.

Incremento de tiempo	*Temperatura nodal*					
	T_1	T_2	T_4	T_5	T_7	T_8
0	300	300	300	300	300	300
1	268.75	268.75	300	300	300	300
2	258.98	253.13	294.14	294.14	300	300
3	252.64	245.31	289.75	287.55	297.80	297.80
4	248.73	239.48	285.81	282.38	295.19	293.96
5	246.67	235.35	282.63	277.79	292.34	290.08
6	243.32	231.97	279.87	273.95	289.71	286.32

La pérdida de calor total durante el intervalo de tiempo de 12 s se calcula sumando la pérdida de calor de cada nodo con respecto a la temperatura inicial de 300 °C. Así

$$q = \Sigma C_i(300 - T_i)$$

donde q es la *pérdida* de calor. Para esta suma se pueden ignorar los nodos de frontera de temperatura constante ya que no sufren cambio alguno en la temperatura. Recordando que $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$ y $T_7 = T_9$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Sigma C_i(300 - T_i) &= \text{nodos (1, 2, 3, 7, 8, 9)} + \text{nodos (4, 5, 6)} \\ &= 16[(6)(300) - (2)(243.32) - 231.97 - (2)(289.71) \\ &\quad 286.321 + 32[(3)(300) - (2)(279.87) - 273.951 \\ &= 5572.3 \text{ J/m longitud de la franja}\end{aligned}$$

La *rapidez promedio* de pérdida de calor para intervalo de tiempo de 12 s es

$$\frac{q}{\Delta\tau} = \frac{5572.3}{12} = 464.4 \text{ W} \quad [1585 \text{ Btu/h}]$$

Ejemplo 4-12: Enfriamiento de una barra de acero, con h no uniforme

Tenemos una barra de acero de 2.0 cm de diámetro, 10 cm de largo ya una temperatura inicial de 200 °C. Se le expone rápidamente al aire atmosférico a 30 °C mientras que uno de los extremos de la barra se mantiene a 200 °C. Puede calcularse el coeficiente de transferencia de calor por convección a partir de

$$h = 9.0\,\Delta T^{0.175} \text{ W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$$

donde AT es la diferencia en temperatura entre la barra y el aire que la rodea. Pueden tomarse las propiedades de acero al níquel como $k = 12$ W/m·°C, $c = 0.48$ kJ/kg·°C, y $\varrho = 7800$ kg/m^3. Utilizando el método numérico (a) determine la distribución de temperatura en la barra después de 250, 500, 750, 1000, 1250 s y para un estado estacionario; (6) determine la distribución de temperatura en estado estacionario para una h constante e igual a 22.11 W/m^2·°C, y compárese con una solución analítica.

Solución

Se han seleccionado cinco nodos con Ax = 2.0 cm como se muestra en la figura siguiente. Entonces las capacidades son

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{(7800)(480)\pi(0.02)^2(0.02)}{4} = 23\,524 \text{ J/°C}$$

$$C_5 = \tfrac{1}{2}C_1 = 11.762 \text{ J/°C}$$

Las resistencias para los nodos 1, 2, 3 y 4 son

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(12)\pi(0.02)^2}{(4)(0.02)} = 0.188496$$

$$\frac{1}{R_\infty} = hP\,\Delta x = (9.0)\pi(0.02)(0.02)(T - 30)^{0.175} = (1.131 \times 10^{-2})(T - 30)^{0.175}$$

Para el nodo 5

$$\frac{1}{R_{m-}} = 0.188496$$

$$\frac{1}{R_{m+}} = hA = 9.0\,\frac{\pi(0.02)^2}{4}(T - 30)^{0.175} = (2.827 \times 10^{-3})(T - 30)^{0.175}$$

$$\frac{1}{R_{5\infty}} = \frac{1}{2R_{1\infty}} = (5.655 \times 10^{-3})(T - 30)^{0.175}$$

donde $T_\infty = 30\ ^\circ C$ para todos los nodos. Podemos calcular la siguiente tabla para las condiciones del peor caso en las que $T = 200\ ^\circ C$ a través de toda la barra. Una vez que se ha establecido de esta manera el requerimiento de estabilidad servirá para todas las demás temperaturas.

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})\|_{min}$	$\frac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$, s
1	0.4048	58.11
2	0.4048	58.11
3	0.4048	58.11
4	0.4048	58.11
5	0.2093	56.197

Por tanto, los intervalos de tiempo menores a 56 s asegurarán la estabilidad. El procedimiento de cálculo se ve complicado por el hecho de que los elementos de resistencia de convección deberán calcularse de nuevo para cada paso de tiempo.
Escogiendo $\Delta\tau \simeq 50$ s, tenemos:

Nodo	$\Delta\tau/C_i$
1	2.1255
2	2.1255
3	2.1256
4	2.1255
5	4.251

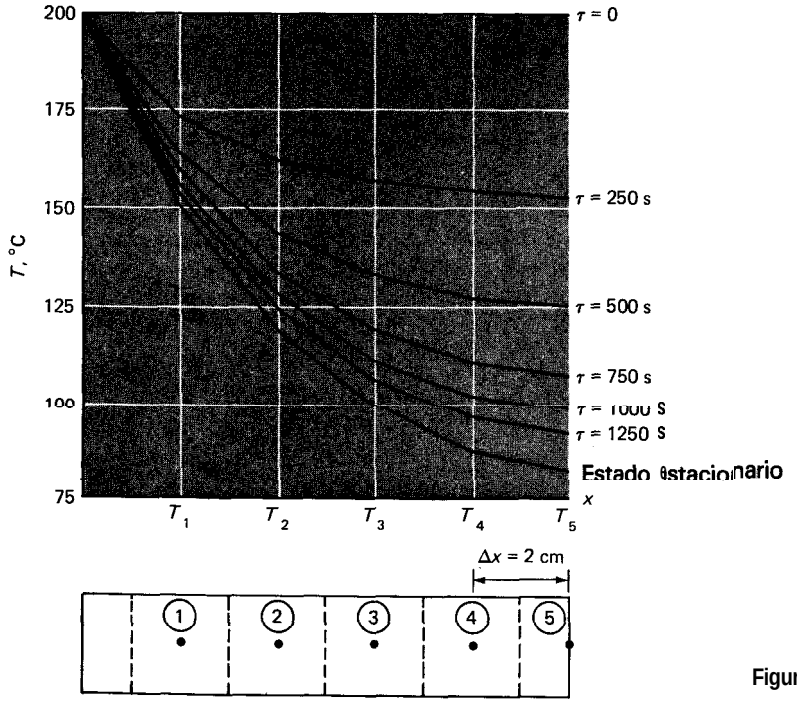


Figura Ejemplo 4-12

En seguida utilizamos la formulación explícita de la Ec. 4-45 sin generación de calor. El algoritmo de cálculo es entonces:

1. Calcule los valores R_∞ para las condiciones iniciales.
2. Calcule las temperaturas en el siguiente incremento de tiempo utilizando la Ec. 4-45.
3. Calcule de nuevo los valores R_∞ basándose en las nuevas temperaturas.
4. Repita los cálculos de temperatura hasta obtener las distribuciones de temperatura en los tiempos deseados.

En la figura anterior se muestran los resultados de estos cálculos.

Para determinar la distribución en estado estacionario podríamos llevar a cabo el método transitorio hasta un gran número de incrementos de tiempo, o utilizar el método para estado estacionario y un enfoque iterativo. Se necesita el enfoque iterativo porque las ecuaciones son no lineales, como resultado de las variaciones en el coeficiente de convección.

Seguimos utilizando el planteamiento de resistencia, que ahora se expresa como la Ec. 3-31:

$$\sum \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0$$

El procedimiento de cálculo es:

1. Calcule los valores R_∞ para todos los nodos suponiendo que todos los $T_i = 200$ °C.
2. Formule las ecuaciones nodales para los T_i.
3. Resuelva las ecuaciones por medio de un método adecuado.
4. Calcule de nuevo los valores R_∞ basándose en los valores de T_i obtenidos en el Paso 3
5. Repita el procedimiento hasta que sólo queden pequeños cambios en los T_i

Los resultados de esta iteración se muestran en la tabla siguiente:

Iteracción	T_1, °C	T_2, °C	T_3, °C	T_4, °C	T_5, °C
1	148.462	114.381	92.726	80.310	75.302
2	151.381	119.557	99.409	87.853	83.188
3	151.105	119.038	98.702	87.024	82.306
4	151.132	119.090	98.774	87.108	82.396

Esta distribución de temperatura en estado estacionario también está trazada con los perfiles transientes.

El valor de h para $T_i = 200$ °C es 22. ll W/m$^{2.}$°C, por tanto, los resultados de la primera iteración corresponden a una solución para una h constante con este valor. La solución analítica exacta se da en el Prob. 2-5 como

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh\, m(L-x) + [h/km]\, \text{senh}\, m(L-x)}{\cosh\, mL + [h/km]\, \text{senh}\, mL}$$

Las cantidades requeridas son

$$m = \left(\frac{hP}{kA}\right)^{1/2} = \left[\frac{(22.11)\pi(0.02)}{(12)\pi(0.01)^2}\right]^{1/2} = 19.1964$$

$$mL = (19.1964 \text{X} 0.1) = 1.91964$$

$$hlkm = \frac{22.11}{(12)(19.1964)} = 0.09598$$

Entonces se pueden calcular las temperaturas en los puntos nodales y compararlas con los resultados numéricos de la tabla siguiente. Como se puede observar, la concordancia es excelente.

Nodo	x, m	$(\theta/\theta_0)_{\text{Núm}}$	$(\theta/\theta_0)_{\text{anal}}$	Porcentaje de desviación
1	0.02	0.6968	0.6949	0.27
2	0.04	0.4964	0.4935	0.59
3	0.06	0.3690	0.3657	0.9
4	0.08	0.2959	0.2925	1.16
5	0.1	0.2665	0.2630	1.33

También podemos verificar la pérdida de calor con la que se predice por la relación analítica en el Prob. 2-15. Cuando se insertan valores numéricos obtenemos

$$q_{\text{anal}} = 11.874 \text{ W}$$

La pérdida de calor para el modelo numérico se calcula sumando la pérdida por convección de los seis nodos (incluyendo el nodo de base a 200 °C). Utilizando las temperaturas para la primera iteración que corresponde a $h = 22.11$ W/m^2·°C.

$$\begin{aligned} q = {} & (22.11)\pi(0.02)(0.02)[(200 - 30)(\tfrac{1}{2}) + (148.462 - 30) \\ & + (114.381 - 30) + (92.726 - 30) + (80.31 - 30) \\ & + (75.302 - 30)(\tfrac{1}{2})] + (22.11)\pi(0.01)^2(75.302 - 30) \\ = {} & 12.082 \text{ W} \end{aligned}$$

Podemos hacer una verificación más calculando la energía conducida en la base. Esto debe ser la energía conducida al nodo uno más la convección perdida por el nodo base o

$$q = (12)\pi(0.01)^2 \frac{(200 - 148.462)}{0.02} + (22.11)\pi(0.02)(0.01)(200 - 30)$$
$$= 12.076 \text{ W}$$

Esto concuerda muy bien con los cálculos por convección y ambos se encuentran dentro del 1.8% del valor analítico.

Los resultados de este ejemplo ilustran el poder del método numérico en la resolución de problemas que no podrían resolverse de ninguna otra manera. Es más, se requiere sólo de un número modesto de nodos, y por consiguiente, sólo de una pequeña computadora, para obtener una solución con suficiente exactitud. Por ejemplo, la exactitud típica a la que se conocerá h será ± 10 a 15%. Esto restará importancia a cualquier inexactitud introducida por el uso de nodos relativamente grandes, como se hizo aquí,

Ejemplo 4-13: Calentamiento y enfriamiento por radiación

La pared cerámica que mostramos está inicialmente a una temperatura uniforme de 20 °C y tiene un espesor de 3.0 cm. Se expone bruscamente su lado derecho a una fuente de radiación a 1000 °C. El lado izquierdo se expone al aire ambiente a 20 °C con una temperatura ambiente de radiación de 20 °C. Las propiedades de la cerámica son $k = 3.0$ W/m·°C, $\varrho = 1600$ kg/m^3 y $c = 0.8$ kJ/kg·°C. La transferencia de calor por radiación con el medio ambiente en T_r puede calcularse a partir de

$$q_r = \sigma\epsilon A(T^4 - T_r^4) \text{ W} \qquad (a)$$

donde $\sigma = 5.669 \times 10^{-8}$, $\epsilon = 0.8$ y T está en grados K. El coeficiente de transferencia de calor del lado izquierdo se expresa por

$$h = 1.92\Delta T^{1/4} \text{ W/m}^2\cdot\text{°C} \qquad (b)$$

La convección en el lado derecho es insignificante. Determine la distribución de temperatura en la placa después de 15, 30, 45, 60, 90, 120 y 150 s. Determine también las distribuciones de temperatura en estado estacionario. Calcule el calor total ganado por la placa para estos tiempos.

Solución

Dividimos la pared en cinco nodos, tal corno se muestra y debemos expresar las temperaturas en grados K, debido a las condiciones de frontera por radiación. Para el nodo 1, la ecuación de energía transiente es

$$\sigma\epsilon(293^4 - T_1^{p4}) \quad 1.92(T_1^p - 293)^{5/4} + \frac{k}{\Delta x}(T_2^p \quad T_1^p) = \rho c \frac{\text{Ax}}{2}\frac{T_1^{p+1} - T_1^p}{\Delta\tau} \tag{c}$$

De manera semejante para el nodo 5

$$\sigma\epsilon(1273^4 - T_5^{p4}) + \frac{k}{\Delta x}(T_4^p - T_5^p) = \rho c \frac{\text{Ax}}{2}\frac{T_5^{p+1} - T_5^p}{\Delta\tau} \tag{d}$$

En seguida podremos escribir las Ecs. (c) y (d)

$$T_1^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_1}\left[\sigma\epsilon(293^2 + T_1^{p2})(293 + T_1^p)(293) - 1.92(T_1^p - 293)^{1/4}(293) + \frac{k}{\Delta x}T_2^p\right] + \left\{1 - \frac{\Delta\tau}{C_1}\left[\sigma\epsilon(293^2 + T_1^{p2})(293 + T_1^p) - 1.92(T_1^p \quad 293)^{1/4} + \frac{k}{\Delta x}\right]\right\}T_1^p \tag{e}$$

$$T_5^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_5}\left[\sigma\epsilon(1273^2 + T_5^{p2})(1273 + T_5^p)(1273) + \frac{k}{\Delta x}T_4^p\right] + \left\{1 - \frac{\Delta\tau}{C_5}\left[\sigma\epsilon(1273^2 + T_5^{p2})(1273 + T_5^p) + \frac{k}{\Delta x_{II}}T_5^p\right.\right. \tag{f}$$

en donde $C_1 = C_5 = \rho_c \Delta x/2$. Para los otros tres nodos las expresiones son más simples:

$$T_2^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_2}\frac{k}{\Delta x}(T_1^p + T_3^p) + \left(1 - \frac{2k\,\Delta\tau}{C_2\,\Delta x}\right)T_2^p \tag{g}$$

$$T_3^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_3}\frac{k}{\Delta x}(T_2^p + T_4^p) + \left(1 - \frac{2k\,\Delta\tau}{C_3\,\Delta x}\right)T_3^p \tag{h}$$

$$T_4^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_4}\frac{k}{\text{AX}}(T_3^p + T_5^p) + \left(1 - \frac{2k\,\Delta\tau}{C_3\,\Delta x}\right)T_4^p \tag{i}$$

en donde $C_2 = C_3 = C_4 = \rho_c$ AX. De manera que para determinar la respuesta transiente, sencillamente seleccionamos un valor adecuado de $\Delta\tau$ y seguimos con los cálculos. El criterio de estabilidad es tal, que los coeficientes del último término en cada ecuación no pueden ser negativos. Para las Ecs. (g) (h) e (i) el máximo incremento de tiempo permitido es

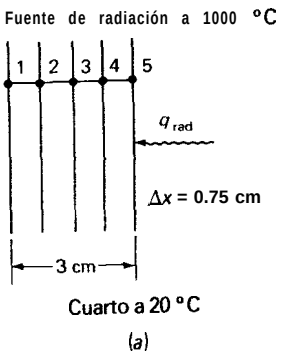
$$\Delta\tau_{\text{máx}} = \frac{C_3\,\Delta x}{2k} = \frac{(1600)(800)(0.0075)^2}{(2)(3)} = 12\ \text{s}$$

Para la Ec. (f) el peor caso se encuentra al comienzo cuando T_5^p = 20 °C = 293 K. Tenemos

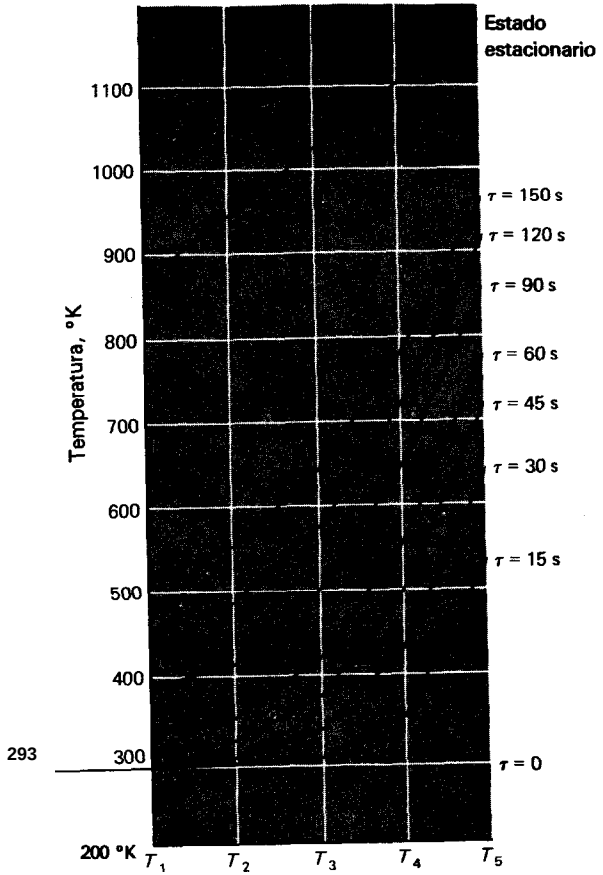
$$C_5 = \frac{(1600)(800)(0.0075)}{2} = 4800$$

de modo que

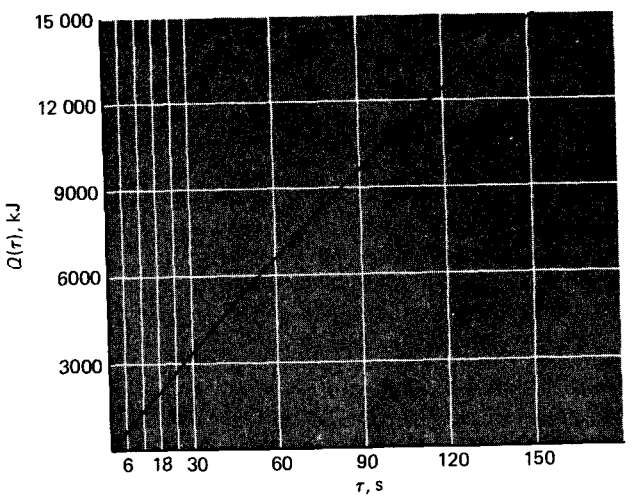
$$\Delta\tau_{\text{máx}} = \frac{4800}{(5.669 \times 10^{-8})(0.8)(1273^2 + 293^2)(1273 + 293) + 3.0/0.0075} = 9.43\ \text{s}$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. Ej. 4-13 (*a*) Sistema nodal, (*b*) respuesta transiente, (*c*) calor agregado.

Para el nodo 1 [Ec. (e)] la condición más restrictiva ocurre cuando $T_1^p = 293$. Tenernos

$$c, = C_5 = 4800$$

de modo que

$$\Delta\tau_{máx} = \frac{4800}{(5.669 \times 10^{-8})(0.8)(293^2 + 293^2)(293 + 293) - 0 - 3.0/0.0075}$$
$$= 11.86 \text{ s}$$

Por tanto, por los cálculos vemos que el nodo 5 es el más restrictivo y debemos seleccionar Ar < 9.43 s.

Estos cálculos fueron realizados con Ar = 3.0 s, y los resultados se encuentran en las figuras. Para calcular el calor adicionado en cualquier instante de tiempo, realizamos la suma:

$$Q(\tau) = \Sigma C_i(T_i - 293) \qquad (j)$$

y trazamos los resultados en la Fig. Ej. 4-13 (c).

4-8 Análisis gráfico -La gráfica de Schmidt

Para establecer distribuciones de temperatura transiente cuando el problema es unidimensional se puede utilizar una técnica gráfica muy útil. El método se basa en la selección del parámetro

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha \Delta\tau} = 2 \qquad (4\text{-}49)$$

de manera que la temperatura en cualquier nodo después de un incremento de tiempo Ares el promedio aritmético de las temperaturas de los nodos adyacentes al comienzo del incremento de tiempo. Como se ve en la Fig. 4-23, es muy fácil construir gráficamente este promedio aritmético. El valor de T_m^{p+1} se obtiene trazando una línea entre T_{m-1}^p y T_{m+1}^p. Por consiguiente, para encontrar la distribución de temperatura en un sólido después de un tiempo determinado, se divide el sólido en incrementos de Ax. En seguida se obtiene el valor de AT, utilizando la Ec. 4-49. Cuando se divide este valor de AT en el tiempo total, nos da el número de incrementos de tiempo necesarios para establecer la distribución de temperatura deseada. Se repite la construcción gráfica hasta obtener la distribución de temperatura final. Casi siempre se necesita un número no entero de incremento de tiempo y es muy probable que resulte necesario interpolar entre los dos últimos incrementos, a fin de obtener la distribución de temperatura final.

En la Fig. 4-24 se muestra un ejemplo de este método, en el que se da una distribución de temperatura y se realiza la construcción para cuatro incrementos de tiempo. Las temperaturas de frontera se mantienen a valores constantes a través del proceso de enfriamiento que se indicó en este ejemplo. Obsérvese que la construcción se aproxima a la línea recta de la distribución de temperatura en estado estacionario cuando se incrementa el tiempo.

Cuando se encuentra involucrada una condición de frontera por convección, la construcción deberá modificarse en la frontera. Al reescribir la Ec. 4-37, tenemos

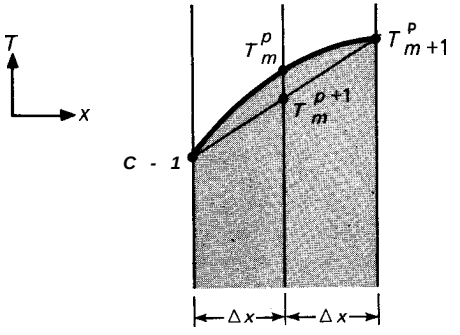


Fig. 4-23 Construcción gráfica para problemas unidimensionales de conducción en estado transitorio.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\text{pared}} = \frac{T_w - T_\infty}{klh} \tag{4-50}$$

y el gradiente de temperatura en la superficie se aproxima por la construcción que se muestra en la Fig. 4-25. Se traza una línea entre la temperatura T_{m+1} y la temperatura ambiente T_∞. La intersección de esta línea con la superficie determina la temperatura de superficie en el tiempo particular.

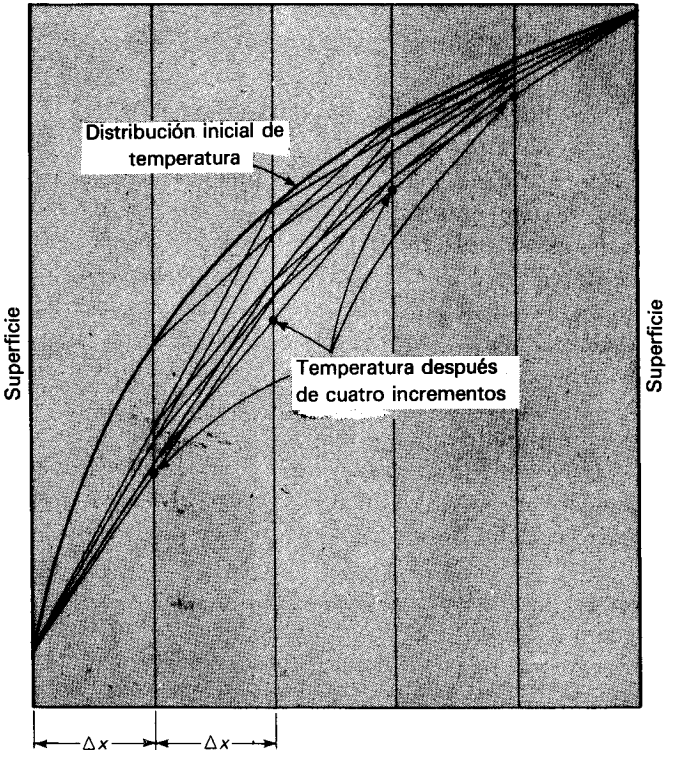


Fig. 4-24 Construcción de la gráfica de Schmidt para cuatro incrementos de tiempo.

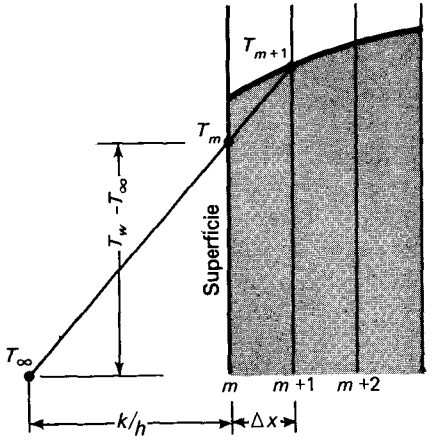


Fig. 4-25 Técnica gráfica para representar la condicción de frontera de convección con la gráfica de Schmidt.

Se utiliza este tipo de construcción en cada incremento de tiempo para establecer la temperatura de la superficie. Una vez que se ha establecido esta temperatura, la construcción para determinar las temperaturas internan del solido procede como se describió anteriormente.

En la Fig. 4-26 se muestra un ejemplo de la construcción para el problema de condición de frontera por convección con cuatro incrementos de tiempo. En este ejemplo se

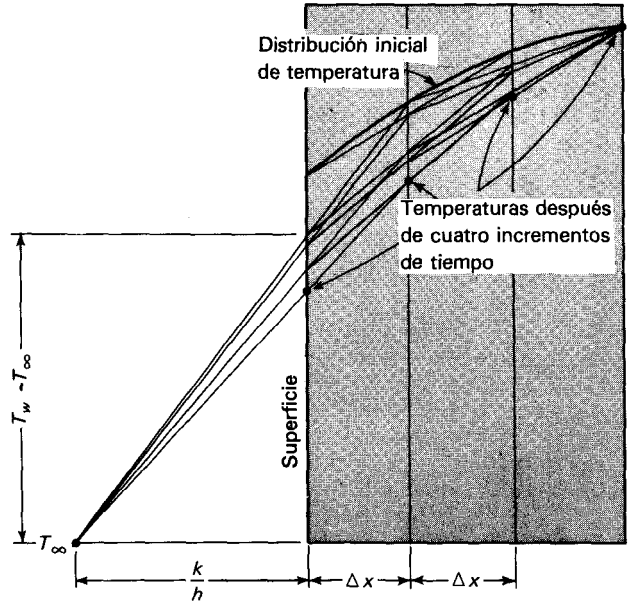


Fig. 4-26 Gráfica de Schmidt para cuatro incrementos de tiempo, incluyendo condición de frontera de convección.

mantienen constantes las temperaturas de la cara derecha y la del ambiente T_∞. Si la temperatura ambiente cambia con el tiempo de acuerdo con cierta variación conocida, este cambio se podrá incorporar con facilidad en la construcción por movimiento el punto T_∞ hacia arriba o hacia abajo según se requiera. De manera semejante, se podría considerar un coeficiente variable de transferencia de calor cambiando el valor de k/h, de acuerdo a cierta variación específica, y moviendo el punto del medio ambiente hacia adentro o fuera de una distancia correspondiente.

Jakob [5] presenta refinamientos al método gráfico de Schmidt, en particular las técnicas para mejorar la exactitud en la frontera por convección o en otras condiciones de frontera. La exactitud del método mejora cuando se toman incrementos menores de Ax, pero esto requiere un número mayor de incrementos de tiempo para obtener una distribución de temperatura después de un tiempo dado.

Preguntas de Repaso

1. ¿Qué quiere decir una capacidad global? ¿Cuáles son las suposiciones físicas necesarias para aplicar un análisis de capacidad global en estado transitorio?
2. ¿Qué significa un sólido semiinfinito?
3. ¿Cuáles son las condiciones iniciales impuestas a las soluciones transientes que se presentan en forma gráfica en este capítulo?
4. ¿Cuáles son las condiciones de frontera que se aplican a los problemas de este capítulo?
5. Defina la función de error.
6. Defina los números de Biot y Fourier.
7. Describa cómo pueden usarse las soluciones transientes unidimensionales para la resolución de problemas bi y tridimensionales.
8. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de las formulaciones progresiva y regresiva en el método numérico en estado transitorio? ¿Bajo qué condiciones preferiría usted un método al otro?

Problemas

4-1 Un cuerpo solido a una temperatura inicial T_0 se coloca repentinamente en una habitación en donde la temperatura del aire es T_∞ y las paredes de la habitación son muy grandes. El coeficiente de transferencia de calor para la pérdida de calor por convección es h y podemos suponer que la superficie del solido es negra. Suponiendo que la temperatura de superficie del solido es uniforme en cualquier instante, escriba la ecuación diferencial para la variación de la temperatura con el tiempo, tomando en cuenta tanto radiación como convección.

4-2 A una lámina de cobre de 30 por 30 cm, con 5 cm de espesor y a una temperatura uniforme de 260 °C, se le reduce bruscamente su temperatura de superficie a 35 °C. Utilizando los conceptos de resistencia y capacitancia térmicas y el análisis de capacidad global, determine el tiempo en que la temperatura del centro es 90 °C, ρ = 8900 kg/m³, c_p = 0.38 kJ/kg·°C, y k = 370 W/m·°C.

4-3 Un pedazo de aluminio con un peso de 5.5 kg y una temperatura inicial de 290 °C, se sumerge bruscamente en un fluido a 15 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 58 W/m²·°C. Tomando el aluminio como una esfera que tenga el mismo peso que la lamina, estime el tiempo requerido para enfriar el aluminio a 90 °C, utilizando el método de análisis de capacidad global.

4-4 Una esfera de cobre inicialmente a una tmperatura uniforme T_0 se sumerge en un fluido. Se colocan calentadores eléctricos en el fluido y se controlan de manera que la temperatura de éste sigue una variación periódica dada por

$$T_\infty - T_m = A \text{ sen } \omega\tau$$

en donde T_m = temperatura media del fluido promediada sobre el tiempo
A = amplitud de la onda de temperatura
ω = frecuencia

Derive una expresión para la temperatura de la esfera en función del tiempo y del coeficiente de transferencia de calor del fluido a la esfera. Suponga que las temperaturas de la esfera y del fluido son uniformes en cualquier momento, de manera que se pueda utilizar el método de análisis de capacidad global.

4-5 Dos cubos de cobre idénticos de 7.5 cm y a 425 y 90 °C se ponen en contacto. Suponiendo que los cubos sólo intercambian calor entre sí y que no existe resistencia al flujo de calor como resultado del contacto entre los cubos, trace la temperatura de cada cubo como una función del tiempo, utilizando el método de análisis de capacidad global. Es decir, suponga que la resistencia a la transferencia de calor es la resistencia de conducción de los dos cubos. Suponga que a excepción de las superficies en contacto, todas las demás están aisladas.

4-6 Repita el Prob. 4-5 para un cubo de cobre de 7.5 cm a 425 °C en contacto con un cubo de acero de 7.5 cm a 90 "C. Bosqueje el circuito térmico.

4-7 Cuando se ejerce una distribución de temperatura de onda sinusoidal sobre la superficie de un sólido semiinfinito, la distribución de temperatura se expresa por

$$T_{x,\tau} - T_m = A \exp\left(-x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right) \text{sen}\left(2\pi n\tau - x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)$$

en donde $T_{x\,\tau}$ = temperatura a la profundidad x y el tiempo τ después del comienzo de la onda de temperatura en la superficie
T_m = temperatura media en la superficie
n = frecuencia de la onda, ciclos por unidad de tiempo
A = amplitud de la onda de temperatura en la superficie

Si se imprime una distribución de temperatura de onda sinusoidal sobre la superficie de una lámina grande de concreto, de manera que la temperatura varíe de 35 a 90 °C y se realice un ciclo completo en 15 min, encuentre el flujo de calor a través de un plano a 5 cm de la superficie, después de 2 h del comienzo de la onda inicial.

4-g Utilizando la distribución de temperatura del Prob. 4-7 demuestre que el intervalo de tiempo entre los dos puntos máximos en la onda de temperatura en la superficie, y a una profundidad x se expresa por

$$\Delta\tau = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi n}}$$

4-9 Un pedazo de 5 lb de carne asada a una temperatura inicial de 70 °F se coloca en un horno a 350 °F. Suponiendo que el coeficiente de calor es 2.5 Btu/h· pie^2·°F y que las propiedades tér-

micas del asado pueden aproximarse por medio de las del agua, estime el tiempo requerído para que el centro del asado alcance una temperatura de 200 °F.

4-10 Una pared gruesa de concreto que tiene una temperatura uniforme de 54 °C se somete bruscamente a una corriente de aire a 10°C. El coeficiente de transferencia de calor es 2.6 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule la temperatura en la lámina de concreto a una profundidad de 7 cm después de 30 min.

4-11 Una esfera de acero de 10 cm de diámetro se sumerge bruscamente en un tanque de aceite a 10 "C. La temperatura inicial de la esfera es de 250 °C; h = 280 $W/m^2 \cdot °C$. ¿Cuánto tiempo tomará al centro de la esfera enfriarse a 150 °C?

4-12 Una lámina de cobre muy grande se encuentra inicialmente a una temperatura de 300 °C. Se reduce de manera brusca la temperatura de superficie a 35 °C. ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 7.5 cm, 4 min después que cambió la temperatura?

4-13 En un día caluroso de verano, un camino para coches hecho de concreto puede alcanzar una temperatura de 55 °C. Suponga que se le aplica un chorro de agua de manera que la temperatura de la superficie baje bruscamente a 15 °C. ¿Cuánto tiempo tomará enfriar el concreto a 25 °C a 5 cm de profundidad de la superficie?

4-14 Una barra larga de acero de 5 por 10 cm se mantiene inicialmente a una temperatura uniforme de 250 °C. Se le somete de repente a un cambio de manera que la temperatura ambiente baja a 35 °C. Suponiendo un coeficiente de transferencia de calor de 23 $W/m^2 \cdot °C$, utilice un método numérico para estimar el tiempo que se requiere para que la temperatura del centro alcance 90 °C. Verifique este resultado por medio de un cálculo utilizando las gráficas de Heisler.

4-15 Un cilindro de acero de 10 cm de diámetro y 10 cm de largo se encuentra inicialmente a 250 °C. Se le sumerge de rondón en un baño de aceite que se mantiene a 30 °C, con h = 280 $W/m^2 \cdot °C$. Encuentre (a) la temperatura en el centro del sólido después de pasados 2 min y (b) la temperatura en el centro de una de las caras circulares después de 2 min.

4-16 Una barra de acero de 2.5 cm^2 y 7.5 cm de longitud se encuentra a una temperatura inicial de 250 °C. Se le sumerge en un tanque de aceite que se mantiene a 30 °C. El coeficiente de transferencia de calor es 570 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule la temperatura en el centro de la barra después de 2 min.

4-17 Un cubo de aluminio de 10 cm de cada lado se encuentra inicialmente a una temperatura de 350 °C y se sumerge en un fluido de 90 °C. El coeficiente de transferencia de calor es de 1200 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule la temperatura en el centro de una de las caras después de 1 min.

4-18 Un cilindro corto de concreto cuyas dimensiones son 15 cm de diámetro y 30 cm de largo se encuentra inicialmente a 25 "C. Se le deja enfriar en un ambiente atmosférico en el que la temperatura es 0 °C. Calcule el tiempo requerido para que la temperatura del centro alcance 6 °C, si el coeficiente de transferencia de calor es 17 $W/m^2 \cdot °C$.

4-19 Resuelva el Prob. 4-13, utilizando el método numérico.

4-20 Resuelva el Prob. 4-10, utilizando el método numérico.

4-21 Una varilla de acero de 12.5 mm de diámetro y 20 cm de longitud, tiene conectado uno de susextremos a un depósito de calor a 250 °C. Inicialmente se mantiene toda la varilla a esta temperatura. En seguida se le somete de manera brusca a una corriente de aire a 30 °C de manera que el coeficiente de transferencia de calor es 35 $W/m^2 \cdot °C$. Estime el tiempo necesario para que la temperatura alcance un valor de 190 °C a la mitad de la longitud de la varilla.

4-22 Una lamina semiinfinita de cobre se expone a un flujo constante de calor de 0.32 MW/m^2 en su superficie. Suponga que la lámina se encuentra en el vacío, de manera que no existe convección en la superficie. ¿Cuál es la temperatura de la superficie después de 5 min, si la temperatura inicial de la lámina es de 30 °C? ¿Cuál es la temperatura a 15 cm de la superficie después de 5 min?

4-23 Resuelva el Prob. 4-13, utilizando la gráfica de Schmidt.

424 Resuelva el Prob. 4-10, utilizando la gráfica de Schmidt.

4-25 Una lámina de concreto de 15 cm de espesor tiene una conductividad térmica de 0.87 $W/m \cdot °C$; una de sus caras se encuentra aislada y la otra se expone al medio ambiente. La lámina tiene una temperatura inicial uniforme de 300 °C y la temperatura ambiente disminuye bruscamente a 90 °C. El coeficiente de transferencia de calor es proporcional a la raíz cuarta de la diferencia de temperaturas entre la superficie y el medio y tiene un valor de 11 $W/m^2 \cdot °C$ en el tiempo cero. La temperatura ambiente aumenta en forma lineal con el tiempo y tiene un valor de 200 °C después de 20 min. Utilizando la gráfica de Schmidt y el método numérico, obtenga la distribución de temperatura en la lámina después de 5, 10, 15 y 20 min.

426 Una placa infinita con un espesor de $2L$ se expone bruscamente a una fuente o sumidero de calor por radiación a temperatura constante T_s. La placa tiene una temperatura inicial uniforme de T_i. La pérdida de calor por radiación de cada lado de la placa se expresa por $q = \sigma \epsilon A (T^4 - T_s^4)$, en donde σ y ϵ son constantes y A es el área de la superficie. Suponiendo que la placa se comporta como una capacidad global, es decir k- ∞, derive una expresión para la temperatura de la placa como una función del tiempo.

427 Una varilla de acero inoxidable (18% Cr, 8% Ni) de 6.4 mm de diámetro se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 30 °C, y se sumerge de repente en un líquido a 150 °C con h = 140 $W/m^2 \cdot °C$. Utilizando el método de análisis de capacidad global, calcule el tiempo necesario para que la temperatura de la varilla alcance 120 °C.

428 Una lámina grande de cobre se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 90 °C. Se disminuye de rondón su temperatura de superficie a 30 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor a través de un plano de 7.5 cm de la superficie, 5 s después que se disminuyó la temperatura.

4-29 Una esfera de cobre de 5 cm de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 250 °C. Se le expone de manera brusca a un medio a 30 °C que tiene un coeficiente de transferencia de calor h = 28 $W/m^2 \cdot °C$. Utilizando el método de análisis de capacidad global, calcule el tiempo que se necesita para que la esfera alcance 90 °C.

4-30 La placa de acero inoxidable que se muestra se encuentra en primer lugar a una temperatura uniforme de 150 °C y se expone bruscamente a un medio de convección a 30 °C con h = 17 $W/m^2 \cdot °C$. Utilizando técnicas numéricas, calcule el tiempo necesario para que la temperatura alcance 65 °C a 6.4 mm de profundidad.

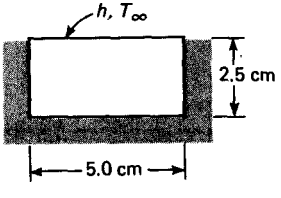


Figura Problema **4-30**

4-31 A una placa infinita de 2.5 cm de espesor que se encuentra inicialmente a una temperatura de 150 °C, se le reduce de manera brusca su temperatura de superficie a 30 "C. La difusividad térmica del material es 1.8 x 10^{-6} m^2/s. Calcule la temperatura del centro de la placa después de 1 min, sumando los cuatro primeros términos diferentes de cero de la Ec. 4-3. Verifique la respuesta utilizando las gráficas de Heisler.

4-32 ¿Qué error resultaría del uso de los primeros cuatro términos de la Ec. 4-3 para calcular la temperatura en $\tau = 0$ y $x = L$?

4-33 Una lámina grande de aluminio que se encuentra a una temperatura uniforme de 30 °C se expone de manera brusca a un flujo de calor superficial constante de 15 kW/m^2. ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 2.5 cm después de 2 min?

4-34 ¿Cuánto tiempo tardaría la temperatura en alcanzar 150 °C a una profundidad de 2.5 cm en la lámina del Prob. 4-33?

4-35 El cuerpo bidimensional de la Fig. 3-6 tiene las temperaturas inicial y de superficie tal como se calcularon y muestran en la Tabla 3-3. En un tiempo cero se reduce el calor de la cara de 250 °C a 30 °C. Tomando Δx = Ay = 15 cm y α = 1.29 x 10^{-5} m^2/s, calcule las temperaturas en los nodos 1, 2, 3, 4 después de 30 minutos. Realice los cálculos utilizando tanto el método de diferencia progresiva como el de diferencia regresiva. Para el método de diferencia regresiva utilice sólo dos incrementos de tiempo.

4-36 Desarrolle una formulación de diferencia regresiva para un nodo de frontera sujeto a un medio por convección. Verifique con la Tabla 4-3.

4-37 Una esfera de vidrio de cuarzo tiene una difusividad térmica de 9.5 X 10^{-7} m^2/s, un diámetro de 2.5 cm y una conductividad térmica de 1.52 $W/m\cdot°C$. La esfera está inicialmente a una temperatura de 25 °C y se somete de repente a un medio por convección a 200 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 110 $W/m^2\cdot°C$. Calcule las temperaturas en el centro y en un radio de 6.4 mm después de 4 min.

4-38 La franja de material que se muestra tiene una conductividad térmica de 20 $W/m\cdot°C$ y se le coloca firmemente sobre la superficie isotérmica que se mantiene a 50 °C. En un tiempo cero, la franja se expone de repente a una corriente de aire con T_∞ = 300 °C y h = 40 $W/m^2\cdot°C$. Utilizando una técnica numérica, calcule las temperaturas en los nodos 1 a 8 después de 1 s, 10 s, 1 min, y en estado estacionario; ρ = 7000 kg/m^3, y c = 0.5 $kJ/kg\cdot°C$

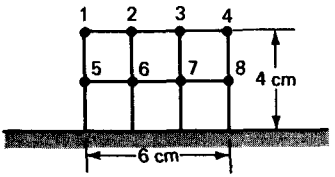


Figura Problema 4-38

4-39 Como se muestra en la figura, la placa de acero inoxidable está rodeada por un bloque aislante e inicialmente a una temperatura uniforme de 50 °C con un medio por convección a 50 °C. La placa se expone bruscamente a un flujo de calor radiante de 20 kW/m^2. Calcule las temperaturas en los nodos indicados después de 10 s, 1 min y 10 min Tome las propiedades del acero inoxidable como k = 16 $W/m\cdot°C$, ρ = 7800 kg/m^3 y c = 0.46 $kJ/kg\cdot°C$.

4-40 La placa compuesta que se muestra en la figura del problema 4-40 tiene una cara aislada y está inicialmente a una temperatura uniforme de 100 "C. En un tiempo cero la cara se expone

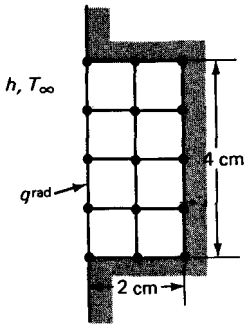


Figura Problema 4-39

de manera brusca a un medio por convección a 10 °C y $h = 70$ W/m²·°C. Determine las temperaturas en los nodos que se indican después de 1 s, 10 s, 1 min y 10 min.

Material	k, W/m·°C	ρ, kg/m³	c, kJ/kg·°C
A	20	7800	0.46
B	1.2	1600	0.85
C	0.5	2500	0.8

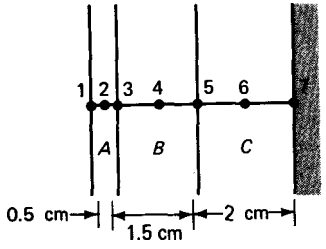


Figura Problema 4-40

4-41 El alambre de acero inoxidable de 4.0 mm de diámetro que mostramos, está inicialmente a 20 °C y se expone a un medio por convección a 20 °C, en donde h puede tomarse como 200 W/m²·°C. Se aplica una corriente eléctrica al alambre de manera que hay una generación de calor interna uniforme de 500 MW/m³. Tal como se muestra, el lado izquierdo del alambre está aislado. Establezca las ecuaciones nodales y el requerimiento de estabilidad para calcular la temperatura en el alambre como una función del tiempo, utilizando incrementos de $\Delta r = 0.5$ mm y $\Delta\phi = \pi/4$. Tómense las propiedades del acero inoxidable como $k = 16$ W/m·°C, $\rho = 7800$ kg/m³ y $c = 0.46$ kJ/kg·°C.

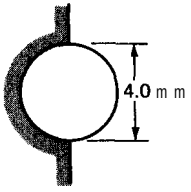


Figura Problema 4-41

4-42 Se pueden fabricar municiones de plomo dejando caer gotas de plomo fundido en agua. Suponiendo que las gotas de plomo tienen las propiedades del plomo sólido a 300 °C, calcule el tiempo necesario para que la temperatura del centro alcance 120 °C cuando el agua se encuentra 100 °C, con $h = 5000$ W/m²·°C, $d = 1.5$ mm.

4-43 Una pila de ladrillos comunes para la construcción de 1 m de alto, 3 m de largo y 0.5 m de espesor deja el horno en donde se le ha horneado a una temperatura uniforme de 300 °C. Se deja enfriar la pila en una habitación a 35 °C con un coeficiente de convección de aire de 15 W/m²·°C. La superficie inferior del ladrillo está sobre una base aislada. (Cuánto calor se habrá perdido cuando los ladrillos alcanzan la temperatura de la habitación? (Cuánto tiempo tardarán en perder la mitad de esta cantidad y cuál será la temperatura en el centro geométrico de la pila al llegar a ese momento?

4-44 Un pedazo de material cerámico [$k = 0.8$ W/m·°C, $\rho = 2700$ kg/m³, $c = 0.8$ kJ/kg·°C] es muy grueso y está inicialmente a una temperatura uniforme de 30 °C. La superficie del material se expone de manera brusca a un flujo de calor constante de 650 W/m²·°C. Trace la temperatura como una función del tiempo, a un centímetro de profundidad.

4-45 Un cubo de aluminio de 4.0 cm está inicialmente a 450 °C y se le expone de rondón a un medio por convección a 100 °C con $h = 120$ W/m²·°C. (Cuánto tiempo tardará el cubo en enfriarse hasta 200 °C?

4-46 Una lámina de cobre de 3.0 cm de espesor está inicialmente a una temperatura de 250 °C. Su superficie superior se expone bruscamente a un medio por convección de 100 °C mientras la superficie inferior esta aislada. La temperatura de la superficie disminuye en 6 min a 150 °C. Calcule el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección.

4-47 Una lámina grande de aluminio de 10 cm de espesor y está a una temperatura inicial uniforme de 400 °C. Se le expone bruscamente a un medio por convección a 90 °C con $h = 1400$ W/m²·°C. (Cuánto tiempo tardará la línea central de temperatura en disminuir a 180 °C?

4-48 Una capa de hielo grande y gruesa está inicialmente a una temperatura uniforme de − 20 °C. Si la temperatura se eleva de repente a − 1 °C, calcule el tiempo necesario para que la temperatura alcance ll °C a una profundidad de 1.5 cm. Las propiedades del hielo son $\rho = 57$ lb_m/pie^3, $C_p = 0.46$ Btu/lb_m, $k = 1.28$ Btu/h·pie·°F, $\alpha = 0.048$ pie²/h.

4-49 Una lata de aluminio con un volumen aproximado de 350 cm³ contiene cerveza a 1 °C. Utilizando el análisis de capacidad global, estime el tiempo requerido para que el contenido se caliente a 15 °C cuando se coloca la lata en una habitación a 22 °C, con un coeficiente de conveccidn de 15 W/m²·°C. Supóngase que la cerveza tiene las mismas propiedades que el agua.

4-50 El medio cilindro del Prob. 3-42 tiene inicialmente una temperatura uniforme de 300 °C y se le expone de manera brusca a una frontera por convección, mientras que su lado inferior se mantiene a 300 °C. Calcule las temperaturas nodales para varios incrementos de tiempo y calcule la pérdida de calor en cada periodo. Tome $\alpha = 0.5 \times 10^{-5}$ m²/s.

4-51 Una placa grande de ladrillo [$k = 1.07$ W/m·°C, $\alpha = 5.4 \times 10^{-7}$ m²/s] se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 20 °C. Una de sus superficies se expone de rondón a un flujo uniforme de calor de 4500 W/m². Calcule y haga una gráfica de la temperatura superficial en función del tiempo. Calcule también el flujo de calor a través del plano a 2 cm de profundidad cuando la temperatura superficial alcanza 150 °C.

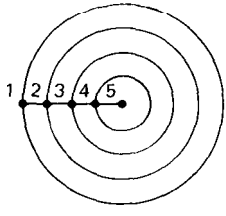
4-52 Una esfera de cobre de 3.0 cm de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 50 °C. Se le expone de repente a una corriente de aire a 10 °C con $h = 15$ W/m²·°C. {Cuánto tiempo tardará en disminuir a 25 °C la temperatura de la esfera?

4-53 Una esfera de aluminio de 5.0 cm de diámetro se encuentra al principio a una temperatura uniforme de 40 °C. Se le expone bruscamente a un medio de radiación en el espacio exterior a 0 K (no hay convección). Suponiendo que la superficie del aluminio esta ennegrecida y que puede aplicarse el análisis de capacidad global, calcule el tiempo requerido por la temperatura de la esfera para disminuir a -240 °C.

454 Una esfera cerámica ennegrecida de 10 cm de diámetro tiene al principio una temperatura uniforme de 1000 K y se le coloca bruscamente en el espacio exterior, en donde pierde calor por radiación (no hay convección) de acuerdo con

$$\dot{q}_{rad} = \sigma A T^4 \qquad T \text{ en grados K}$$
$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Calcule las temperaturas en los nodos que se muestran para varios incrementos de tiempo, y las pérdidas de calor correspondientes. Tome $k = 2$ W/m·K, $\alpha = 1.4 \times 10^{-6}$ m²/s.



455 Una caja fuerte a prueba de incendio está construida de asbesto de baja densidad ente hojas delgadas de acero inoxidable. La caja tiene la forma de un cubo con dimensiones interior y exterior de 0.5 m y 1 .0 m. Si la caja está inicialmente a una temperatura uniforme de 30 °C y el exterior se expone de manera brusca a un ambiente de convección a 600 "C, $h = 100$ W/m²·°C, calcule el tiempo necesario para que la temperatura en el interior alcance 150 "C. Suponga que la superficie interna está aislada y desprecie la resistencia y la capacitancia del acero inoxidable. Tome las propiedades del asbesto como $k = 0.16$ W/m·°C, $\alpha = 3.5 \times 10^{-7}$ m²/s.

4-56 La aleta que se muestra en el Prob. 3-41 está inicialmente a la temperatura uniforme de 300 °C y se expone de repente al medio de convección que se muestra. Calcule las temperaturas de los nodos para varios incrementos de tiempo, suponiendo que la base permanece a 300 °C. Tome $\alpha = 3 \times 10^{-7}$ m²/s.

457 Una esfera hueca de concreto [k = 1.3 W/m·°C, $\alpha = 7 \times 10^{-7}$ m²/s] tiene diámetro interior y exterior de 0.5 y 1.0 m y tiene inicialmente una temperatura uniforme de 200 "C. Se baja la temperatura de la superficie exterior a 20 °C. Calcule las temperaturas nodales que se muestran para diversos incrementos de tiempo. Suponga que la superficie interior actúa como si estuviera aislada.

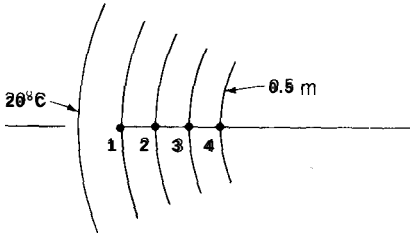


Figura Problema 4-57

4-58 Repita el **Prob. 4-30 con la superficie superior que también pierde calor por radiación de acuerdo con:**

$$q_{rad} = \sigma A \epsilon (T - T_\infty^4) \qquad Ten \text{ grados K}$$

$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

$$\epsilon = 0.7$$

4-59 Repita el Prob. 4-50, con la superficie superior que también pierde calor por radiación de acuerdo con

$$q_{rad} = \sigma A \epsilon (T - T_\infty^4) \qquad Ten \text{ grados K}$$

$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

$$\epsilon = 0.7$$

4-60 La esquina que mostramos se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 200 °C y se le expone entonces de rondón a una convección alrededor del borde con h = 50 W/m^2·°C y T = 30 °C. Suponga que el sólido tiene las propiedades del ladrillo refractario. Examine los nodos 1, 2, 3, 4 y determine el incremento de tiempo máximo que puede utilizarse para realizar un cálculo numérico transiente.

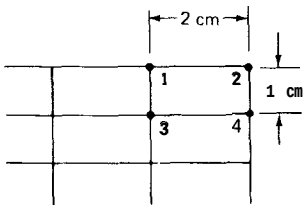


Figura Problema **4-60**

Referencias

1 **Schneider, P. J.:** "Conduction **Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading,** Mass., **1955.**

2 **Heisler, M. P.: Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating,** *Trans. ASME,* vol. *69,* **pp.** 227–236, **1947.**

3 **Jahnke, E., and F. Emde: "Tables of Functions," Dover Publications, Inc., New York, 1945.**

4 **Dusinberre, G. M.: "Heat Transfer** Calculations **by Finite Differences," Intemational Textbook Company, Scranton, Pa.,** 1961.

5 Jakob, **M.:** "Heat **Transfer."** vol. **1, John Wiley** & Sons, **Inc., New York, 1949.**

6 **Grober. H.. S. Erk, and U. Grigull: "Fundamentals of Heat Transfer,"** McGraw-Hill **Book Company, New York, 1961.**

7 **Schneider. P. J.: "Temperature Response** Charts," **John Wiley** & Sons, **Inc., New York,** 1963.

6 **Schenck.** H.: **"Fortran Methods** in **Heat** Flow," **The Ronald Press Company, New York,** 1963

9 **Richardson. P. D.. and Y. M. Shum: Use of** Finite-Element **Methods** in Solution of Transient Heat Conduction Problems. *ASME Pap.* 69-WA/HT-36.

10 Emery, A. F., and W. W. Carson: Evaluation of Use of the Finite Element Method in Computation of Temperature, *ASME Pap.* 69-WA/HT-38.
11 Wilson, E. L., and R. E. Nickell: Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, *Nucl. Eng. Des.*, vol. 4, pp. 276286, 1966.
12 Zienkiewicz, 0. C.: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
13 Myers, G. E.: "Conduction Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
14 Arpaci, V. S.: "Conduction Heat Transfer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
15 Ozisik, M. N.: "Boundary Value Problems of Heat Conduction," Intemational Textbook Company, Scranton, Pa., 1968

5
Principios de Convección

5-l Introducción

En los capítulos precedentes se consideraron el mecanismo y el cálculo de la transferencia de calor por conducción. La convección sólo se trató en la medida en que se refería a las condiciones de frontera impuestas a un problema de conducción. Ahora deseamos examinar los métodos para el cálculo de la transferencia de calor por convección y en especial, los modos para predecir el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección h. El tema de transferencia de calor por convección requiere un balance de energía, además de un análisis de la dinámica de fluidos de los problemas de interés. En este capítulo nuestro tratamiento versará primero sobre algunas de las relaciones sencillas de dinámica de fluidos y análisis de capa límite, los cuales son importantes en la comprensión básica de la transferencia de calor por convección. En seguida impondremos un balance de energía en el sistema de flujo y determinaremos la influencia del flujo sobre los gradientes de temperatura en el fluido. Finalmente, después de conocer la distribución de temperatura, se podrá determinar la rapidez de transferencia de calor de una superficie caliente hacia el fluido que se hace pasar sobre ella.

En este capítulo nuestro desarrollo es fundamentalmente de carácter analítico y versa sólo sobre sistemas de flujo con convección forzada. En capítulos subsecuentes se presentarán las relaciones empíricas para el cálculo de transferencia de calor por convección forzada, así como la transferencia de calor por convección natural, ebullición y condensación.

5-2 Flujo viscoso

Considérese el flujo sobre la placa plana que se muestra en las Figs. 5-1 y 5-2. Desde el comienzo del borde principal de la placa se desarrolla una región en donde se siente la

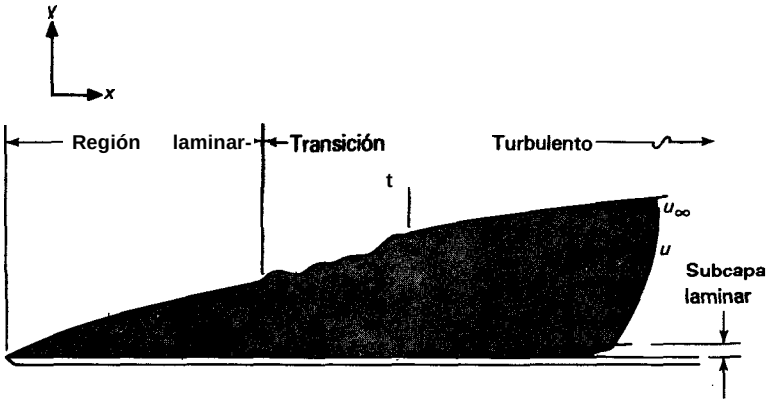


Fig. 5 1 Esquema que muestra diferentes regímenes de flujo de capa límite en una placa plana.

influencia de fuerzas viscosas. Estas fuenas viscosas se describen en términos de esfuerzos cortantes τ entre las capas de fluido. Si suponemos este esfuerzo como proporcional al gradiente de velocidad normal, tenemos la ecuación para definir la viscosidad.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{5-1}$$

A la constante de proporcionalidad μ se le llama la *viscosidad dinámica.* Un conjunto de unidades típico es el newton-segundo por metro cuadrado; sin embargo, se utilizan muchos conjuntos de unidades para la viscosidad, y deberá tenerse cuidado a fin de seleccionar el conjunto apropiado que sea consistente con la formulación que se tiene.

A la región de flujo que se desarrolla a partir del borde Principal de la placa en el que se observan los efectos de viscosidad se le llama la capa **límite**. Se utiliza un punto arbitrario para designar la posición y, en donde termina la capa; este punto se selecciona casi siempre como la coordenada y en donde la velocidad adquiere el 99% del valor de corriente libre.

Inicialmente, el desarrollo de la capa límite es laminar, pero a una distancia crítica del borde principal, dependiendo del campo de flujo y las propiedades del fluido, comienzan a amplificarse pequeñas perturbaciones en el fluido y tiene lugar un proceso de transición hasta que el flujo se vuelve turbulento. Podemos pensar en la región de flujo turbulento como en una agitación aleatoria en la que partes del fluido se

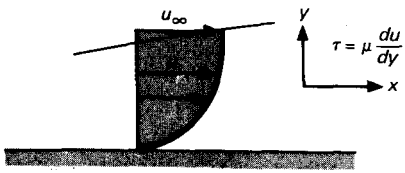


Fig. 52 Perfil de velocidad laminar en una placa plana.

mueven de aquí para allá, en todas direcciones. La transición de flujo turbulento a laminar ocurre cuando

$$\frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > 5 \times 10^5$$

donde u_∞ = velocidad de corriente libre
x = distancia desde el borde principal
$\nu = \mu/\rho$ = viscosidad cinética

A esta agrupación particular de términos se le llama número de Reynolds y es adimensional cuando se utiliza un conjunto de unidades consistente para todas las propiedades:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \tag{5-2}$$

A pesar de que para la mayor parte de los propósitos analíticos el número de Reynolds crítico se toma generalmente como 5×10^5 para transición en una placa plana, el valor crítico en una situación práctica depende en gran parte de las condiciones de rugosidad de la superficie y del "nivel de turbulencia" de la corriente libre. El intervalo normal para el comienzo de la transición se encuentra entre 5×10^5 y 10^6. Cuando existen perturbaciones muy grandes en el flujo, la transición puede comenzar en números tan bajos como 10^5 y para flujos casi libres de fluctuaciones, ésta no comenzará hasta $\mathrm{Re} = 2 \times 10^6$ o más. En realidad el proceso de transición es uno que cubre un intervalo de números de Reynolds en el que tenemos transiciones completas y desarrollo de flujo turbulento en números de Reynolds del doble del valor en que comenzó la transición.

Las formas relativas para los perfiles de velocidad en flujos laminar y turbulento se muestran en la Fig. 5-1. El perfil laminar es aproximadamente parabólico, mientras que el perfil turbulento tiene una porción cerca a la pared que es casi lineal. Se dice que esta porción lineal se debe a una subcapa laminar que se adhiere con fuerza a la superficie. Fuera de esta subcapa, el perfil de velocidad es relativamente plano comparado con el perfil laminar.

El mecanismo físico de la viscosidad es de intercambio de momento. Considérese la situación de flujo laminar. Las moléculas se pueden mover de una lámina a otra, llevando consigo un momento que corresponde a la velocidad del flujo. Existe un momento de transporte neto desde las regiones de alta velocidad hacia aquellas de baja velocidad, creando así una fuerza en la dirección del flujo. Esta fuerza es el esfuerzo cortante viscoso que se calcula con la Ec. 5-l.

La rapidez a la que toma lugar la tranferencia de momento depende de la rapidez a la que se muevan las moléculas a través de las capas del fluido. En un gas, las moléculas se moverán a una cierta velocidad promedio proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, ya que en la teoría cinética de los gases identificamos la temperatura con la enegía cinética media de una molécula. A mayor rapidez de las moléculas, mayor será el momento que transportarán. Por tanto deberemos esperar que el

momento de un gas sea aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, y los experimentos corroboran bastante bien esta expectativa. En el Apéndice A se proporcionan las viscosidades de algunos fluidos típicos.

En la región de flujo turbulento ya no se observan capas precisas de fluido y nos vemos forzados a buscar un concepto un poco diferente para la acción viscosa. Se puede obtener una idea cualitativa del proceso de flujo turbulento imaginando porciones macroscópicas de fluido que transportan energía y momento, en lugar del transporte microscópico en base de moléculas individuales. Es evidente que deberemos esperar que estas masas más grandes de elementos macroscópicos de fluido transportarán más energía y momento que las moléculas individuales, y también deberemos esperar en flujo turbulento una fuerza cortante viscosa mayor que en flujo laminar (así como también una mayor conductividad térmica). Esta expectativa se verifica por medio de experimentos y es esta acción viscosa más elevada en el flujo turbulento la causa del perfil de velocidad plano que se muestra en la Fig. 5-1.

Considérese el flujo en un tubo, tal como se muestra en la Fig. 5-3. Como se muestra, se forma una capa límite en la entrada. Tal vez la capa límite llena la totalidad del tubo, y se dice que el flujo se encuentra totalmente desarrollado. Si el flujo es laminar, se observa un perfil de velocidad parabólico, tal como se muestra en la Fig. 5-3*a*. Cuando el flujo es turbulento se observa un perfil un poco más obtuso, como el de la Fig. 5-3*b*. Para un tubo, se utiliza nuevamente el número de Reynolds como criterio para el flujo laminar y turbulento. Para

$$\mathrm{Re}_d = \frac{u_m d}{\nu} > 2300 \tag{5-3}$$

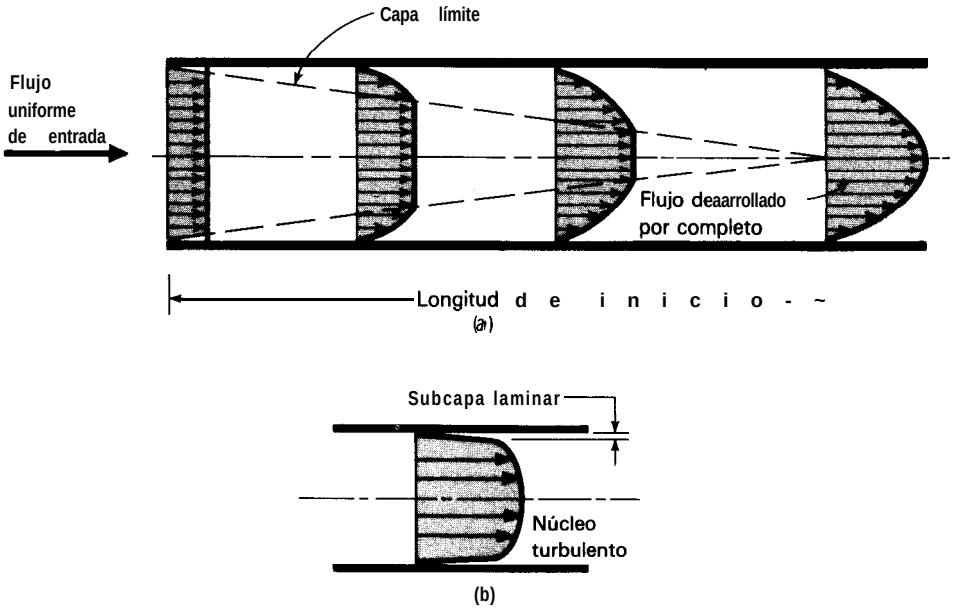


Fig. 5-3 Perfil de velocidad para flujo (*a*) laminar (*b*) turbulento en un tubo.

se observa casi siempre que el flujo es turbulento.

Una vez más se puede observar un intervalo de números de Reynolds para la transición, de acuerdo con la rugosidad del tubo y la uniformidad del flujo. El intervalo para la transición aceptado en genera! es

$$2000 < \mathrm{Re}_d < 4000$$

a pesar de que en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas se ha mantenido flujo laminar hasta números de Reynolds de 25 000.

La relación de continuidad para flujo unidimensional en un tubo es

$$\dot{m} = \rho u_m A \tag{5-4}$$

donde $\dot{m}$ = rapidez de masa de flujo
u_m = velocidad media
A = área de sección transversal

Definimos la masa velocidad como

$$\text{Masa velocidad} = G = \frac{m}{A} = pu_{,,,} \tag{5-5}$$

de manera que los números de Reynolds pueden escribirse

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu} \tag{5-6}$$

En ocasiones es más conveniente usar la Ec. 5-6 en lugar de la Ec. 5-3.

5-3 Flujo no viscoso

Aunque no existe un fluido real no viscoso, en algunas circunstancias se puede considerar el fluido como tal y es conveniente presentar algunas ecuaciones que se aplican en estas circunstancias. Por ejemplo, en el problema de la placa plana precedente, a una distancia de la placa suficientemente amplia el flujo se comportará como un sistema de flujo no viscoso. La razón de este comportamiento es que los gradientes de velocidad normales para la dirección de flujo son muy pequeños y por consiguiente, las fuerzas cortantes viscosas son pequeñas.

Si se realiza un equilibrio de fuerzas sobre un elemento de fluido incompresible y estas fuerzas se hacen iguales al cambio en momento del elemento, la ecuación de Bernoulli para flujo a lo largo de una línea de corriente resulta:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{g_c} = \text{constante} \tag{5-7a}$$

o en forma diferencial

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{V\,dV}{g_c} = 0 \tag{5-7b}$$

donde ρ = densidad del fluido
p = presión en un punto particular del fluido
V = velocidad del flujo en ese punto

La ecuación de Bernoulli se considera algunas veces una ecuación de energía debido a que el término $V^2/2g_c$ representa energía cinética y la presión representa energía potencial; sin embargo, debe recordarse que estos términos se derivan en base a un análisis dinámico, de modo que la ecuación es fundamentalmente una ecuación dinámica. De hecho, el concepto de energía cinética está basado en un análisis dinámico.

Cuando el fluido es compresible, debe escribirse una ecuación de energía que tome en cuenta cambios en energía térmica interna del sistema y los cambios correspondientes en temperatura. Para un sistema de flujo unidimensional esta ecuación es la ecuación de energía de flujo estacionario para un volumen de control,

$$i_1 + \frac{1}{2g_c} V_1^2 + Q = i_2 + \frac{1}{2g_c} V_2^2 + Wk \tag{5-8}$$

donde i es la entalpía definida por

$$i = e + pv \tag{5-9}$$

y donde e = energía interna
Q = calor agregado al volumen de control
Wk= trabajo externo neto efectuado en el proceso
v = volumen específico del fluido

(El símbolo i se usa para designar la entalpía en lugar de la acostumbrada h para evitar confusión con el coeficiente de transferencia de calor.) Los sufijos 1 y 2 se refieren a las condiciones de entrada y salida del volumen de control. Para calcular la caída de presión en flujo compresible, es necesario especificar la ecuación de estado del fluido, esto es, para un gas ideal,

$$p = \rho RT \qquad \Delta e = c_v\,\mathrm{AT} \qquad \Delta i = c_p\,\mathrm{AT}$$

La constante de los gases para un gas particular se da en términos de la constante universal $\mathcal{R}$ como

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M}$$

donde M es el peso molecular y $\mathcal{R}$ = 8314.5 J/kg·mol·K. Para aire, las propiedades de gas ideal adecuadas son

$R_{aire} = 287\ \mathbf{J/kg \cdot K}$ $\quad c_{p,aire} = 1.005\ \mathbf{kJ/kg \cdot °C}$ $\quad c_{v,aire} = 0.718\ \mathbf{kJ/kg \cdot °C}$

Para resolver un problema particular, también debemos especificar el proceso. Por ejemplo, el flujo adiabático reversible a través de una boquilla da las siguientes expresiones conocidas que relacionan las propiedades en algún punto en el flujo con el número Mach y las propiedades de estancamiento, es decir, las propiedades donde la velocidad es ***cero:***

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

donde T_0, p_0, ρ_0 = propiedades de estancamiento
γ = razón de calores específicos c_p / c_v
M = número de Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

donde a es la velocidad local del sonido, que puede calcularse a partir de

$$a = \sqrt{\gamma g_c R T} \tag{5-10}$$

para un gas ideal. * Para aire que se comporta como un gas ideal, esta ecuación se reduce a

$$a = 20.045 \sqrt{T} \quad \text{m/s} \tag{5-11}$$

donde T está en grados K.

Ejemplo 5-I

Fluye agua a 20 °C y 8 kg/s a través del arreglo difusor que se muestra en la figura adjunta. El diámetro en la Sec. 1 es 3.0 cm yen la Sec. 2 es 7.0 cm. Determine el aumento en presión estática entre las Secs. 1 y 2. Suponga el flujo sin fricción.

Solución

Las áreas de sección transversal de flujo son

* Las fórmulas de flujo isoentrópico se derivan en la Ref. 7. Pág. 629.

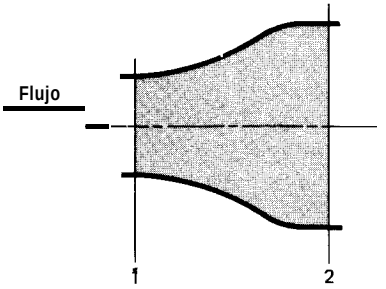


Figura Ejemplo 51

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(0.03)^2}{4} = 7.069 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(0.07)^2}{4} = 3.848 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

La densidad del agua a 20 °C es 1000 kg/m³, por lo que podemos calcular las velocidades a partir de la relación de continuidad de masa

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$u_1 = \frac{8.0}{(1000)(7.069 \times 10^{-4})} = 11.32 \text{ m/s} \quad [37.1 \text{ pies/s}]$$

$$u_2 = \frac{8.0}{(1000)(3.848 \times 10^{-3})} = 2.079 \text{ m/s} \quad [6.82 \text{ pies/s}]$$

La diferencia de presión se obtiene de la Ec. 5-7a Bernoulli

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2g_c}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1000}{2}[(11.32)^2 - (2.079)^2]$$

$$= 61.91 \text{ kN/m}^2 \quad [8.98 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs}]$$

Ejemplo 5-2

Se expande isotrópicamente aire a 300 °C y una presión de 0.7 MN/m² de un tanque, hasta que la velocidad es 300 m/s. Determine la temperatura y presión estáticas, así corno el número de Mach del aire a la condición de alta velocidad. γ = 1.4 para el aire.

Solución

Podemos escribir la ecuación de energía de flujo estacionario como

$$i_1 = i_2 + \frac{u_2^2}{2g_c}$$

debido a que la velocidad inicial es pequeña y el proceso es adiabático. En términos de temperatura,

$$c_p(T_1 - T_2) = \frac{u_2^2}{2g_c}$$

$$(1005)(300 - T_2) = \frac{(300)^2}{(2)(1.0)}$$

$$T_2 = 2552°C = 528.2 \text{ K} \quad [491.4 °\text{F}]$$

Podemos calcular la presión a partir de la relación isoentrópica

$$\frac{p_2}{PI} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$p_2 = (0.7)\left(\frac{528.2}{573}\right)^{3.5} = 0.526 \text{ MN/m}^2 \ [76.3 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs}]$$

La velocidad del sonido en la condición 2 es:

$$a_2 = (20.045)(528.2)^{1/2} = 460.7 \text{ m/s} \quad [1511 \text{ pies/s}]$$

de modo que el número de Mach es

$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{300}{460.7} = 0.651$$

5 4 Capa límite laminar en una placa plana

Considérese el volumen de control elemental que se muestra en la Fig. 5-4. Derivamos la ecuación de movimiento para la capa límite haciendo un balance de fuerzas y momentos en este elemento. Para simplificar el análisis suponemos:

1. **El fluido es incompresible y el flujo es estacionario.**
2. **No hay variaciones de presión en la dirección perpendicular a la placa.**
3. **La viscosidad es constante.**
4. **Las fuerzas cortantes viscosas en la dirección y son despreciables.**

Aplicamos la segunda ley de movimiento de Newton,

$$\sum F_x = \frac{d(mV)_x}{d\tau}$$

Esta forma de la segunda ley de movimiento de Newton se aplica a un sistema de masa constante. En dinámica de fluidos no es conveniente, en general, trabajar con elementos de masa; mas bien, trataremos con volúmenes de control elementales tales como el que se muestra en la Fig. 5-4, en donde la masa puede fluir hacia dentro o hacia fuera de los diferentes lados del volumen, que está fijo en el espacio. Para este sistema el balance de fuerzas se escribe entonces

$$\Sigma F_x = \text{aumento en flujo de momento en la dirección x}$$

El flujo de momento en la dirección x es el producto del flujo de masa a través de un lado particular del volumen de control y el componente x de la velocidad en ese punto.

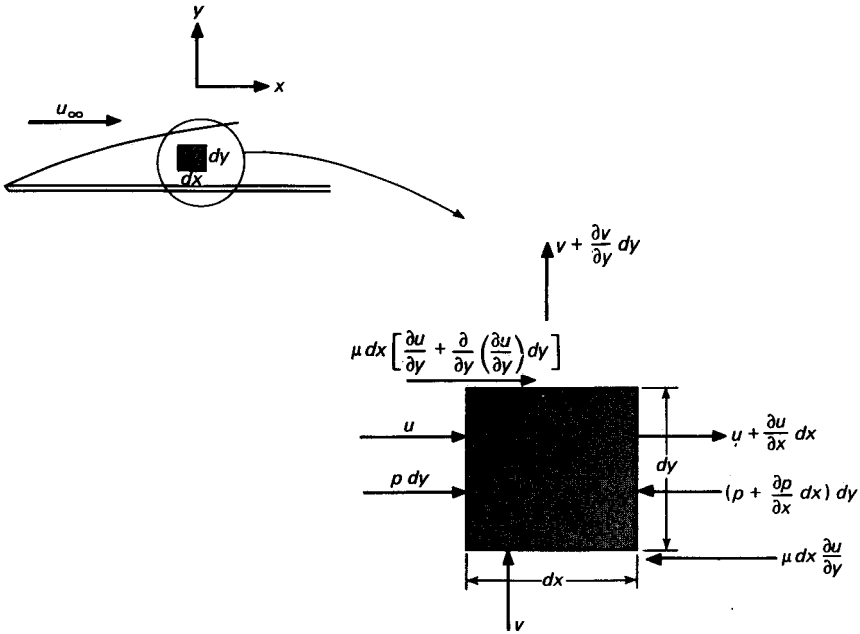


Fig. 5-4 Volumen de control elemental para el balance de fuerzas en capa límite laminar.

La masa que entra por la cara izquierda del elemento, por unidad de tiempo es

$$\rho u\, dy$$

si suponemos profundidad unitaria en la dirección z. Así, el momento que entra a la cara izquierda por unidad de tiempo es

$$pu\, dy\, u = \rho u^2\, dy$$

El flujo de masa que sale de la cara derecha es

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy$$

y el momento que sale de la cara derecha es

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 d\ y$$

El flujo de masa que entra por la cara inferior es

$$\rho v\, dx$$

y el flujo de masa que sale por la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dx$$

Un balance de masa en el elemento da

$$\rho u\,dy + \rho v\,dx = \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy + \rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5\text{-}12)$$

Esta es la ecuación de continuidad de masa para la capa límite.

Regresando al análisis de momentos y fuerzas, el momento en *la dirección x* que entra por la cara inferior es

$$\rho v u\,dx$$

y el momento *en la dirección* x que sale por la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$

Nos interesa sólo el momento en la dirección x debido a que las fuerzas que se consideran en el análisis son aquellas en la dirección x. Estas fuerzas *son* las originadas por las fuerzas cortantes viscosas y fuerzas de presión en el elemento. La fuerza de presión en la cara izquierda es $p\,dy$ y aquella en la derecha es $-[p + (\partial p/\partial x)dx]dy$, de modo que la fuerza de presión neta en la dirección del movimiento es

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy$$

La fuerza de corte viscosa en la cara inferior es

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

y la fuerza cortante en la superior es

$$\mu\,dx\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]$$

La fuerza cortante viscosa neta en la dirección de movimiento es la suma de lo anterior:

$$\text{Fuerza cortante viscosa neta} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\text{dx}\,dy$$

Igualando la suma de las fuerzas cortante viscosa y de presión a la transferencia de momento neta en la dirección x, tenemos

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx\, dy - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 dy - \rho u^2 dy + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx - \rho v u\, dx$$

Clarificando términos, hacemos uso de la relación de continuidad (5-12) y despreciamos diferenciales de segundo orden, para obtener

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{5-13}$$

Esta es la ecuación de momento de capa límite laminar con propiedades constantes. La ecuación puede resolverse exactamente para muchas condiciones de frontera, y el lector deberá dirigirse al tratado de Schlichting [1] para detalles sobre los diversos métodos empleados en las soluciones. En el Apéndice B hemos incluido el método clásico para obtener una solución exacta de la Ec. 5-13 para flujo laminar sobre una placa plana. Para el desarrollo en este capítulo, nos damos por satisfechos con un análisis aproximado que proporciona una solución más sencilla, sin pérdida en la comprensión física de los procesos involucrados. El método aproximado se debe a von **Kármán** [2].

Considérese el sistema de flujo de capa límite que se muestra en la Fig. 5-5. La velocidad de corriente libre fuera de la capa límite es u_∞, y el espesor de la capa límite es 6. Deseamos hacer un balance de fuerzas y momentos en el volumen de control acotado por los planos 1, 2, *A-A* y la pared solida. Los componentes de velocidad normales a la pared se desprecian y sólo se consideran aquellos en la dirección x. Suponemos que

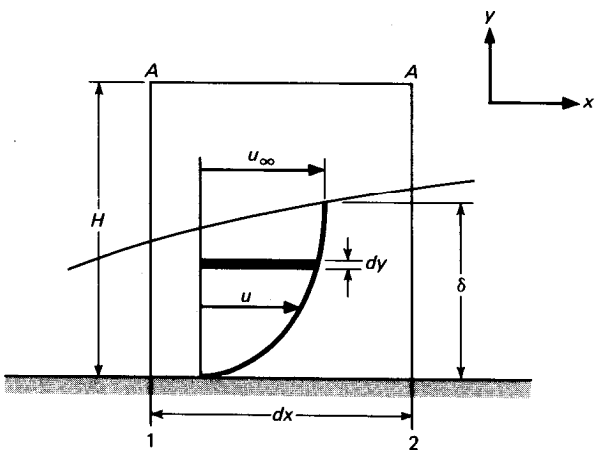


Fig. 55 **Volumen de control elemental para el análisis integral de momento de la capa límite laminar.**

el volumen de control es lo bastante alto para que siempre incluya la capa límite; es decir, $H > \delta$.

El flujo de masa a través del plano 1 es

$$\int_0^H \rho u \, dy \tag{a}$$

y el flujo de momento a través del plano 1 es

$$\int_0^H \rho u^2 \, dy \tag{b}$$

El flujo de momento a través del plano 2 es

$$\int_0^H \rho u^2 \, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2 \, dy\right) dx \tag{c}$$

y el flujo de masa a través del plano 2 es

$$\int_0^H \rho u \, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u \, dy\right) dx \tag{d}$$

Considerando la conservación de masa y el hecho de que no puede entrar masa al volumen de control a través de la pared sólida, el flujo de masa adicional en la expresión (d) sobre aquella en (a) debe entrar a través del plano A-A. Este flujo de masa transporta con ella un momento en la dirección x igual a

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u \, dy\right) dx$$

El flujo neto de momento que sale del volumen de control es por tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2 \, dy\right) dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u \, dy\right) dx$$

Esta expresión puede ponerse en una forma un poco más útil recordando la fórmula de producto del cálculo diferencial:

$$d(\eta\phi) = \eta \, d\phi + \phi \, d\eta$$

$$\eta \, d\phi = d(\eta\phi) - \phi \, d\eta$$

En la expresión de momento expresada antes, la integral

$$\int_0^H \rho u \, dy$$

es la función ϕ y u_∞ es la función η. Así

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx = \frac{d}{dx}\left(u_\infty \int_0^H \rho u\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u u_\infty\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H pu\, dy)\, dx \right. \qquad (5\text{-}14)$$

La u_∞ puede colocarse en el interior de la integral ya que no es una función de y y puede entonces tratarse como una constante de aquí en adelante, por lo que concierne a una integral con respecto a y.

Regresando al análisis, la fuerza en el plano 1 es la fuerza de presión pH y la del plano 2 es $[p + (dp/dx)dx]H$. La fuerza cortante en la pared es

$$-\tau_w\, dx = -\mu\, dx \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

No hay fuerza cortante en el plano A-A ya que el gradiente de velocidad es cero fuera de la capa límite. Haciendo las fuerzas en el elemento iguales al aumento neto en momento y agrupando términos tenemos

$$-\tau_w - \frac{dp}{dx}H = -\rho \frac{d}{dx}\int_0^H (u_\infty - u)u\, dy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^H \rho u\, dy \qquad (5\text{-}15)$$

Esta es la ecuación integral de momento de la capa límite. Si la presión es constante a través del flujo,

$$\frac{dp}{dx} = 0 = -\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \qquad (5\text{-}16)$$

ya que la presión y la velocidad de corriente libre están relacionadas por la ecuación de Bernoulli. Para la condición de presión constante la ecuación integral de capa límite se convierte en

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)u\, dy = \tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5\text{-}17)$$

El límite superior en la integral se ha cambiado a δ debido a que el integrando es cero para $y > \delta$ ya que $u = u_\infty$ para $y > 6$.

Si se conociese el perfil de velocidad, se podría insertar la función apropiada en la Ec. 5-17 para obtener una expresión para el espesor de capa límite. Para nuestro análisis aproximado, primero escribimos algunas condiciones que la función de velocidad debe satisfacer:

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0 \qquad (a)$$

$$u = u_\infty \qquad \text{en } y = \delta \qquad (b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta \tag{c}$$

Para una condición de presión constante, la **Ec.** (5-13) da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{d}$$

ya que las velocidades u y v son cero en y = 0. Suponemos que los perfiles de velocidad en diversas posiciones x son similares; es decir, tienen la misma dependencia funcional con la coordenada y. Hay que satisfacer cuatro condiciones. La función más sencilla que podemos seleccionar para satisfacer estas condiciones es un polinomio con cuatro constantes arbitrarias. Así

$$u = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3 \tag{5-18}$$

Aplicando las cuatro condiciones (a) a (d),

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{5-19}$$

Insertando la expresión para la velocidad dentro de la **Ec.** 5-17 da

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho u_\infty^2 \int_0^\delta \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\} = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

Efectuando la integración se llega a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho u_\infty^2 \delta\right) = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

Como ρ y u_∞ son constantes, se pueden separar las variables para obtener

$$\delta\, d\delta = \frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho u_\infty} dx = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty} dx$$

y

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13}\frac{\nu x}{u_\infty} + \text{const}$$

En $x = 0$, $\delta = 0$, de modo que

$$\delta = 4.64\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{5-20}$$

Esto puede escribirse en términos del número de Reynolds como

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{5-21}$$

donde $$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

La solución exacta de las ecuaciones de capa límite tal como se da en el Apéndice B da

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad (5\text{-}21a)$$

Ejemplo 5-3

Sobre una placa plana, fluye aire a 27 °C, 1 atm y a la velocidad de 2 m/s. Calcule el espesor de la capa límite a de distancias de 20 y 40 cm del borde principal de la placa. Calcule el flujo de masa que entra en la capa límite entre $x = 20$ cm y $x = 40$ cm. La viscosidad del aire a 27 °C es 1.98 x 10^{-5} kg/m·s. Suponga profundidad unitaria en la dirección z.

Solución

La densidad del aire se calcula de

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(300)} = 1.177 \text{ kg/m}^3 \text{ [0.073 lb}_m\text{/ pies}^3\text{]}$$

El número de Reynolds se calcula como

En $x = 20$ cm: $$\mathrm{Re} = \frac{(1.177)(2.0)(0.2)}{1.98 \times 10^{-5}} = 23\,770$$

En $x = 40$ cm: $$\mathrm{Re} = \frac{(1.177)(2.0)(0.4)}{1.98 \times 10^{-5}} = 47\,540$$

El espesor de la capa límite se calcula a partir de la Ec. 5-21:

En $x = 20$ cm: $$\delta = \frac{(4.64X0.2)}{(23\,770)^{1/2}} = 0.00602 \text{ m } [0.24 \text{ plg}]$$

En $x = 40$ cm: $$\delta = \frac{(4.64X0.4)}{(47\,540)^{1/2}} = 0.00851 \text{ m } [0.34 \text{ plg}]$$

Para calcular el flujo de masa que entra a la capa límite de la corriente libre entre $x = 20$ cm y $x = 40$ cm, simplemente tomamos la diferencia entre el flujo de masa en la capa límite entre esas dos posiciones x. En cualquier posición x el flujo de masa en la capa límite está expresado por la integral

$$\int_0^\delta \rho u \, dy$$

donde la velocidad se da por la Ec. 5-19,

$$u = u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

Evaluando la integral con esta distribución de velocidad, tenemos

$$\int_0^\delta \rho u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy = \tfrac{5}{8}\rho u_\infty \delta$$

Por tanto, el flujo de masa que entra a la rapa límite es

$$\Delta m = \tfrac{1}{8}\rho u_\infty(\delta_{44} - \delta_{20})$$
$$= (\tfrac{1}{8})(1.177)(2.0)(0.00851 - 0.00602)$$
$$= 3.663 \times 10^{-3}\ \text{kg/s} \quad [8.08 \times 10^{-3}\ \text{lb}_m/\text{s}]$$

5-5 Ecuación de energía de la capa límite

El análisis anterior consideraba la dinámica de fluidos de un sistema de flujo de capa límite laminar. Desarrollaremos ahora la ecuación de energía para este sistema y procederemos así a un método integral de solución.

Cónsidérese el volumen de control elemental que se muestra en la Fig. 5-6. Para simplificar el análisis suponemos

1. Flujo estacionario incompresible.
2. Viscosidad, conductividad térmica y calor especifico constantes.
3. Conducción de calor despreciable en la dirección del flujo (dirección x).

Así, para el elemento mostrado, el balance de energía puede escribirse

Energía de convección que entra por la cara izquierda + energía de convección que entra por la cara inferior + calor por conducción que entra en la cara inferior + tra-

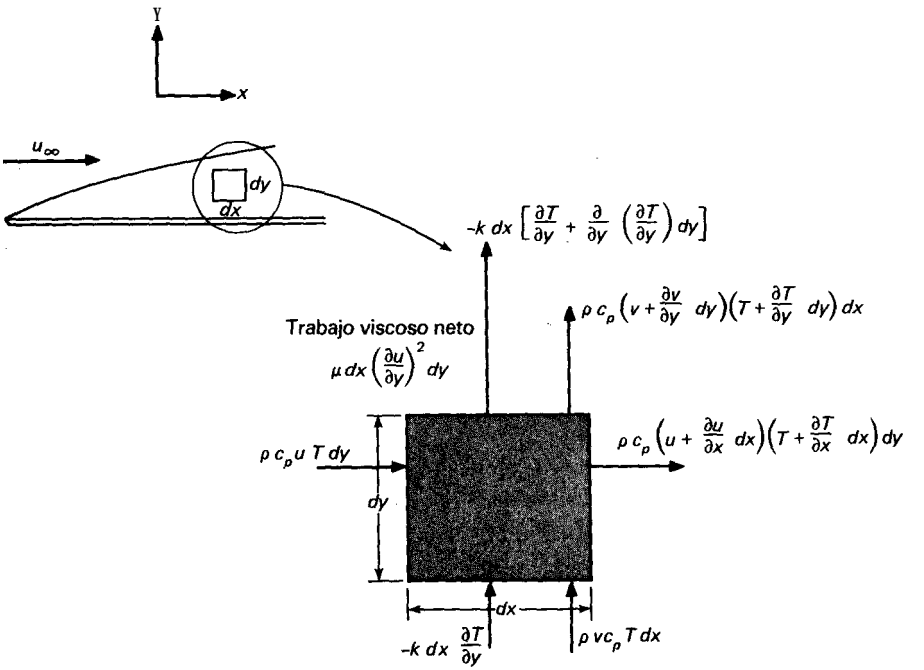


Fig. 5-6 Volumen elemental para análisis de energía de capa límite laminar.

bajo viscoso neto hecho en el elemento = energía por convección que sale por la cara derecha + energía por convección que sale por la cara superior + calor por conducción que sale por la cara superior.

Las cantidades de energía por convección y conducción se indican en la Fig. 5-6, y el término de energía para el trabajo viscoso puede derivarse como sigue; el trabajo viscoso puede calcularse como un producto de la fuerza de corte viscosa neta y la distancia que se mueve esta fuerza en la unidad de tiempo. La fuerza cortante viscosa es el producto del esfuerzo cortante y el área dx,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

y la distancia a través de la cual se mueve por unidad de tiempo con respecto al volumen de control elemental $dx\ dy$ es

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy$$

de modo que la energía viscosa neta proporcionada al elemento es

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\, dy$$

Escribiendo el balance de energía correspondiente a las cantidades mostradas en la Fig. 5-6, suponiendo profundidad unitaria en la dirección z y despreciando diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx\, dy + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\, dy$$

Usando la relación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5-12}$$

y dividiendo entre ρc_p da

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-22}$$

Esta es la ecuación de energía de la capa límite laminar. El lado izquierdo representa el transporte neto de energía hacia el volumen de control, y el lado derecho representa la suma del calor neto conducido hacia afuera del volumen de control y el trabajo viscoso neto hecho sobre el elemento. El término de trabajo viscoso es importante sólo a altas velocidades, ya que su magnitud será pequeña comparada con los otros términos cuando se estudia flujo a baja velocidad. Esto puede mostrarse con un análisis de

orden de magnitud de los dos términos en el lado derecho de la Ec. 5-22. Para este análisis podemos considerar la velocidad como si tuviese el orden de magnitud de la velocidad de corriente libre u_∞ y la dimensión y del orden de δ. Entonces

$$u \sim u_\infty \qquad \text{y} \qquad y \sim \delta$$

de modo que

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \alpha \frac{T}{\delta^2}$$

$$\frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{\mu}{\rho c_p} \frac{u_\infty^2}{\delta^2}$$

Si la relación de estas cantidades es pequeña, esto es,

$$\frac{\mu}{\rho c_p \alpha} \frac{u_\infty^2}{T} \ll 1 \tag{5-23}$$

entonces la disipación viscosa es pequeña en comparación con el término de conducción. Rearreglemos la Ec. 5-23 introduciendo

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k}$$

donde Pr se llama el número de Prandtl, del cual trataremos más adelante. La Ec. 5-23 se convierte en

$$\text{Pr} \frac{u_\infty^2}{c_p T} \ll 1 \tag{5-24}$$

Como un ejemplo, considérese el flujo de aire en

$$u_\infty = 70 \text{ m/s} \quad T = 20 \text{ °C} = 293 \text{ K} \qquad p = 1 \text{ atm}$$

Para estas condiciones, $c_p = 1005 \text{ J/kg·°C}$ y Pr = 0.7, de modo que

$$\text{Pr} \frac{u_\infty^2}{c_p T} = \frac{(0.7)(70)^2}{(1005)(293)} = 0.012 \ll 1.0$$

indicando que la disipación viscosa es pequeña. Así, para flujo incompresible a baja velocidad, tenemos

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5-25}$$

En realidad, nuestra derivación de la ecuación de energía es una simplificada, y varios términos se han dejado fuera del análisis debido a que son pequeños en comparación con otros. De esta manera llegamos de inmediato a la aproximación de la capa límite,

sin recurrir a un engorroso proceso de eliminación para obtener la relación simplificada final. La derivación general de la ecuación de energía de capa límite es muy laboriosa y por encima del alcance de nuestro estudio. El lector interesado debería consultar los libros de Schlichting [1] y White [5] para mayor información.

Hay una similitud sorprendente entre la Ec. 5-25 y la ecuación de momento para presión constante,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-26}$$

La solución de las dos ecuaciones tendrá exactamente la misma forma cuando $\alpha = \nu$. Deberíamos entonces esperar que las magnitudes relativas de la difusividad térmica y la viscosidad cinemática tuviesen una influencia importante en la transferencia de calor por convección, ya que estas magnitudes relacionan la distribución de velocidad con la distribución de temperatura. Este es exactamente el caso, y veremos el papel que juegan estos parámetros en el tratamiento subsecuente.

56 La capa límite térmica

Precisamente como la capa límite hidrodinámica se definió como la región del flujo en donde se sienten las fuerzas viscosas, una capa límite térmica puede definirse como aquella región en donde los gradientes de temperatura están presentes en el flujo. Estos gradientes de temperatura serían el resultado de un proceso de intercambio de calor entre el fluido y la pared.

Considérese el sistema que se muestra en la Fig. 5-7. La temperatura de la pared es T_w, la temperatura del fluido fuera de la capa límite térmica es T_∞ y el espesor de la capa límite térmica se designa con δ_t. En la pared, la velocidad es cero, y la transferencia de calor hacia el fluido tiene lugar por conducción. Así, el flujo local de calor por unidad de área, q'' es

$$q'' = -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{\text{pared}} \tag{5-27}$$

De la ley de Newton de enfriamiento Ec. 1-8

$$q'' = h(T_w - T_\infty) \tag{5-28}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Combinando estas ecuaciones tenemos

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_{\text{pared}}}{T_w - T_\infty} \tag{5-29}$$

de tal modo que sólo necesitamos encontrar el gradiente de temperatura en la pared para evaluar el coeficiente de transferencia de calor. Esto significa que debemos obte-

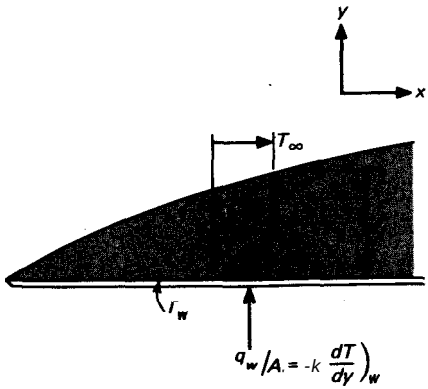


Fig. 57 Perfil de temperatura en la capa limite térmica.

ner una expresión para la distribución de temperatura. Para hacerlo, se sigue un enfoque similar al que se usó en el análisis de momento de la capa límite.

Las condiciones que la distribución de temperatura debe satisfacer son

$$T = T_w \quad \text{en } y = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{en y} = \delta_t \tag{b}$$

$$T = T_\infty \quad \text{en } y = \delta_t \tag{c}$$

y escribiendo la Ec. 5-25 en $y = 0$ sin calentamiento viscoso,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } y = 0 \tag{d}$$

ya que las velocidades deben ser cero en la pared.

Las condiciones (Q) a (d) pueden satisfacerse con un polinomio cúbico como en el caso del perfil de velocidad, de modo que

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{Tm - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{5-30}$$

donde $\theta = T - T_w$. Ahora subsiste el problema de encontrar una expresión para δ_t, el espesor de la capa límite térmica. Esta puede obtenerse por medio de un análisis integral de la ecuación de energía para la capa límite.

Considérese el volumen de control acotado por los planos 1, 2, *A-A* y la pared, como se muestra en la Fig. 5-8. Se supone que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica, tal como se muestra. La temperatura de la pared es T_w, la temperatura de corriente libre es T_∞ y el calor suministrado al fluido a lo largo de dx es dq_w. Deseamos hacer un balance de energía

Energia que entra por convección + trabajo viscoso dentro del elemento + transferencia de calor en la pared = energía que sale por convección (5-31)

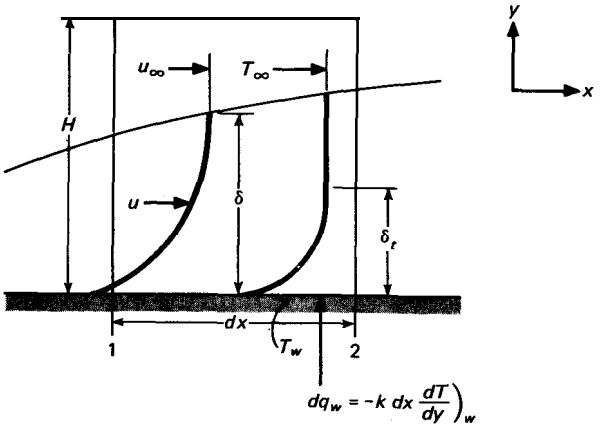


Fig. 58 Volumen de control para análisis integral de energia de la capa límite laminar.

La energía que entra por convección a través del plano 1 es

$$\rho c_p \int_0^H uT\,dy$$

y la energía que sale por convección a través del plano 2 es

$$\rho c_p \left(\int_0^H uT\,dy\right) + \frac{d}{dx}\left(\rho c_p \int_0^H uT\,dy\right)dx$$

El flujo de masa a través del plano A-A es

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right)dx$$

y transporta con ella una energía igual a

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right)dx$$

El trabajo viscoso neto hecho dentro del elemento es

$$\mu\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right]dx$$

y la transferencia de calor en la pared es

$$dq_w = -k\,dx\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big]_w$$

Combinando estas cantidades de energía de acuerdo con la Ec. 5-31 y agrupando términos da

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] + \frac{\mu}{\rho c_p}\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right] = \alpha\left.\frac{\partial T}{dy}\right]_w \qquad (5\text{-}32)$$

Esta es la ecuación integral de energía de la capa límite para propiedades constantes y temperatura de corriente libre constante T_∞.

Para calcular la transferencia de calor en la pared, necesitamos derivar una expresión para el espesor de la capa límite térmica que debe usarse en combinación con las Ecs. 5-29 y 5-30 para determinar el coeficiente de transferencia de calor. Por el momento, despreciamos el término de disipación viscosa; este término es muy pequeño a menos que la velocidad del campo de flujo sea muy grande, y trataremos más adelante el cálculo de la transferencia de calor a alta velocidad.

La placa que estamos considerando no necesita calentarse sobre toda su longitud. La situación que analizaremos se presenta en la Fig. 5-9, donde la capa límite hidrodinámica se desarrolla a partir del borde principal de la placa, mientras que el calentamiento no comienza sino hasta que $x = x_0$.

Insertando la distribución de temperatura, Ec. 5-30 y la distribución de velocidad, Ec. 5-19 dentro de la Ec. 5-32 y despreciando el término de disipación viscosa tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^H (\theta_\infty - \theta)u\,dy\right] \\ &= \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_0^H \left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\} \\ &= \alpha\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t}\end{aligned}$$

Supongamos que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica. Así sólo necesitamos llevar a cabo la integración a $y = \delta_t$, ya que el integrando es cero para $y > \delta_t$. Efectuando el manejo algebraico necesario, llevando a cabo la integración y haciendo la sustitución $\zeta = \delta_t/\delta$ obtenemos

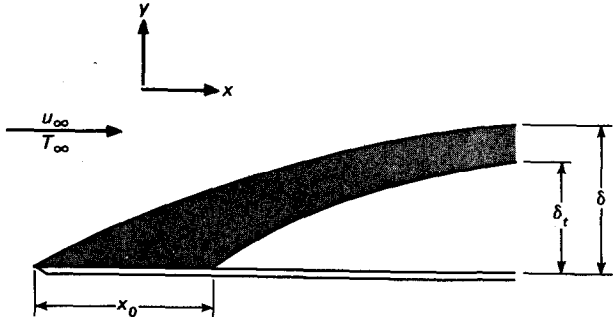


Fig. 5-9 Capas limite hidrodinámica y térmica en una placa plana. El calentamiento se inicia cuando $x = x_0$.

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{3}{280}\zeta^4\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\zeta} \tag{5-33}$$

Como $\delta_t < \delta$, $\zeta < 1$, y el término que involucra a ζ^4 es pequeño comparado con el término ζ^2, despreciamos el término ζ^4 y escribimos

$$\frac{3}{20}\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}(\delta\zeta^2) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\zeta\delta} \tag{5-34}$$

Efectuando la diferenciación se obtiene

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\delta\zeta\frac{d\zeta}{dx} + \zeta^2\frac{d\delta}{dx}\right) = \frac{\alpha}{\delta\zeta}$$

o

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\delta^2\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} + \zeta^3\delta\frac{d\delta}{dx}\right) = \alpha$$

Pero

$$\delta\, d\delta = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}dx$$

Y

$$\delta^2 = \frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_\infty}$$

de modo que tenemos

$$\zeta^3 + 4x\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{14}\frac{3}{\nu}\frac{a}{} \tag{5-35}$$

Observando que

$$\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\zeta^3$$

vemos que la Ec. 5-35 es una ecuación diferencial lineal de primer orden en ζ^3, y la solución es

$$g'' = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14}\frac{a}{\nu}$$

Cuando la condición de frontera

$$\delta_t = 0 \qquad \text{en } x = x_0$$
$$\zeta = 0 \qquad \text{en } x = x_0$$

se aplica, la solución final se convierte en

$$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1.026}\,\mathrm{Pr}^{-1/3}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \tag{5-36}$$

donde

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \tag{5-37}$$

se ha introducido. La relación ν/α se llama el número de Prandtl según Ludwig Prandtl, el científico alemán que introdujo los conceptos de la teoría de capa límite.

Cuando la placa se caliente en toda su longitud, $x_0 = 0$ y

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \zeta = \frac{1}{1.026}\,\mathrm{Pr}^{-1/3} \tag{5-38}$$

En el análisis anterior se supone que $\zeta < 1$. Esta suposición es satisfactoria para fluidos que poseen números de Prandtl mayores que aproximadamente 0.7. Por fortuna, la mayor parte de los gases y los líquidos caen dentro de esta categoría. Los metales líquidos son una excepción notable, ya que tienen números de Prandtl del orden de 0.01.

Se ha encontrado que el numero de Prandtl ν/α es un parámetro que relaciona los espesores relativos de las capas límite hidrodinámicas y térmicas. La viscosidad cinemática de un fluido transporta información acerca de la rapidez a la que el momento puede difundir a través del fluido debido a movimiento molecular. La difusividad térmica nos dice la misma cosa en lo que concierne a la difusión de momento y calor en el fluido. Pero estas rapideces de difusión son precisamente las cantidades que determinan cuán gruesas serán las capas límite para un campo de flujo externo dado; difusividades grandes significan que la influencia viscosa o de la temperatura se sienten a gran distancia en el campo de flujo. El número de Prandtl es así el lazo de unión entre el campo de velocidad y el campo de temperatura.

El numero de Prandtl es adimensional cuando se utiliza un conjunto de unidades consistente:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \tag{5-39}$$

En el SI, un conjunto típico de unidades para los parámetros sería μ en kilogramos por segundo por metro, c_p en kilojoules por kilogramo por grado Celsius, y k en kilowatts por metro por grado Celsius. En el sistema inglés, un conjunto típico sería μ en libras masa por hora por pie, c_p en Btu por libra masa por grado Fahrenheit, y k en Btu por hora por pie por grado Fahrenheit.

Regresando ahora al análisis, tenemos

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\zeta\delta} \tag{5-40}$$

Sustituyendo para el espesor de capa límite hidrodinámica de la Ec. 5-21 y utilizando la Ec. 5-36 se obtiene

$$h_x = 0.332k\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \tag{5-41}$$

La ecuación puede hacerse adimensional multiplicando ambos lados por x/k, produciendo el grupo adimensional en el lado izquierdo

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} \tag{5-42}$$

llamado el número de Nusselt en honor de Wilhelm Nusselt, quien hizo contribuciones significativas a la teoría de transferencia de calor por convección. Finalmente,

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\mathrm{Re}_x^{1/2}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \tag{5-43}$$

o para la placa calentada en toda su longitud, $x_0 = 0$ y

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{5-44}$$

Las Ecs. 5-41, 5-43 y 5-44 expresan los valores locales del coeficiente de transferencia de calor en términos de distancia a partir del borde principal de la placa y las propiedades del fluido. Para el caso en el que $x_0 = 0$, el coeficiente de transferencia de calor promedio y el número de Nusselt pueden obtenerse integrando sobre la longitud de la placa:

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x\,dx}{\int_0^L dx} = 2h_{x=L} \tag{5-45}$$

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 2\,\mathrm{Nu}_{x=L} \tag{5-46}$$

El lector debería llevar a cabo las integraciones para verificar estos resultados.

El análisis precedente se baso en la suposición de que las propiedades del fluido eran constantes a través del flujo. Cuando hay una variación apreciable entre las condiciones de pared y de corriente libre, se recomienda que las propiedades del fluido se evalúen a la llamada *temperatura de película* T_f, definida como la media aritmética entre la temperatura de pared y la de corriente libre,

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} \tag{5-47}$$

Se da una solución exacta a la ecuación de energía en el Apéndice B. Los resultados del análisis exacto son los mismos que los del análisis aproximado anterior.

Flujo de calor constante

El análisis precedente consideró la transferencia de calor laminar a partir de una superficie isotérmica. En muchos problemas prácticos el *flujo de* calor de la superficie es esencialmente constante, y el objetivo es encontrar la distribución de temperatura de la superficie de la placa para condiciones especificadas de flujo del fluido. Para el caso

de flujo de calor constante puede mostrarse que el número local de Nusselt se expresa por

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = 0.453\ \mathrm{Re}_x^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5-48}$$

lo cual puede ponerse en términos del flujo de calor de la pared y la diferencia de temperatura como

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{q_w x}{k(T_w - T_\infty)} \tag{5-49}$$

La diferencia promedio de temperatura a lo largo de la placa puede obtenerse efectuando la integración

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{1}{L}\int_0^L (T_w - T_\infty)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{q_w x}{k\ \mathrm{Nu}_x}\,dx$$
$$= \frac{q_w \mathrm{L/k}}{0.6795\ \mathrm{Re}_L^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3}} \tag{5-50}$$

La Ec. 5-44 se aplica a fluidos que poseen números de Prandtl entre 0.6 y 50. No se aplicaría a fluidos con número de Prandtl muy bajo, tales como metales líquidos o con número de Prandtl elevado, tales como aceites pesados o silicones. Churchill y Ozoe [9] han correlacionado una amplia cantidad de datos para un intervalo muy grande de números de Prandtl, para proporcionar la siguiente relación en el caso de flujo laminar en una placa plana isotérmica:

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{0.3387\ \mathrm{Re}_x^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.468}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \quad \text{para } \mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr} > 100 \tag{5-51}$$

Para el caso de flujo de calor constante, 0.3387 se cambia por 0.4637 y 0.468 se cambia por 0.02052. Las propiedades también se evalúan a la temperatura de la película.

Ejemplo 5-4

Para el sistema de flujo en el Ej. 5-3 suponga que la placa se calienta sobre toda su longitud a una temperatura de 60 °C. Calcule el valor transferido en (a) los primeros 20 cm de la placa, y(b) los primeros 40 cm de la placa.

Solución

Se desea la transferencia de calor total sobre una cierta longitud de la placa; así, deseamos calcular los coeficientes promedio de transferencia de calor. Para ello usamos las Ecs. 5-44 y 5-45, evaluando las propiedades a la temperatura de la película:

$$T_f = \frac{27 + 60}{2} = 43.5\,^\circ\mathrm{C} = 316.5\ \mathrm{K}\ \ [110.3\,^\circ\mathrm{F}]$$

Del Apéndice A las propiedades son

$$\nu = 17.36 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}\ \ [1.87 \times 10^{-4}\ \text{Pies}^2]$$
$$k = 0.02749\ \text{W/m}\cdot°\text{C}\ \ [0.0159\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot°\text{F}]$$
$$\text{Pr} = 0.7$$
$$c_p = 1.006\ \text{kJ/kg}\cdot°\text{C}\ \ [0.24\ \text{Btu/lb}_m\cdot°\text{F}]$$

En $x = 20$ cm

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0.2)}{17.36 \times 10^{-6}} = 23\ 041$$

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\ \text{Re}_x^{1/2}\ \text{Pr}^{1/3}$$
$$= (0.332)(23\ 041)^{1/2}\ (0.7)^{1/3} = 44.74$$

$$h_x = \text{Nu}_x = \frac{k}{x} = \frac{(44.74)(0.02749)}{0.2}$$
$$= 6.15\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C}\ [1.083\ \text{Btu/h}\cdot\text{pies}^2\cdot°\text{F}]$$

El valor promedio del coeficiente de transferencia de calor es el doble de este valor, o sea

$$\bar{h} = (2)(6.15) = 12.3\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C}\ \ [2.17\ \text{Btu/h}\cdot\text{pies}^2\cdot°\text{F}]$$

El flujo de calor es

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty)$$

Si suponemos profundidad unitaria en la dirección z,

$$q = (12.3)(0.2)(60 - 27) = 81.18\ \text{W}\ \ [277\ \text{Btu/h}]$$

En $x = 40$ cm

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0.4)}{17.36 \times 10^{-6}} = 46\ 082$$

$$\text{Nu}_x = (0.332)(46\ 082)^{1/2}\ (0.7)^{1/3} = 63.28$$

$$h_x = \frac{(63.28)(0.02749)}{0.4} = 4\ 349\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C}$$

$$\bar{h} = (2)(4.349) = 8.698\ \text{W/m}^2\cdot°\text{C}\ \ [1.53\ \text{Btu/h}\cdot\text{pies}^2\cdot°\text{F}]$$

$$q = (8.698)(0.4)(60 - 27) = 114.8\ \text{W}\ \ [392\ \text{Btu/h}]$$

Ejemplo 55

Un calentador de 1 .0 kW se construye con una placa de vidrio que tiene una película conductora eléctrica que produce un flujo de calor constante. La placa tiene 60 por 60 cm y está colocada en una corriente de aire a 27 °C, 1 atm y con $u_\infty = 5$ m/s. Calcule la diferencia promedio de temperatura a lo largo de la placa y la diferencia de temperatura en el borde de salida.

Solución

Las propiedades deberían evaluarse a la temperatura de la película, pero no conocemos la temperatura de la placa. así que para un calculo inicial tomamos las propiedades en las condiciones de corriente libre de

$$T_\infty = 27\ °\text{C} = 300\ \text{K}$$

$$\nu = 16.84 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0.708 \qquad k = 0.02624\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}$$

$$\text{Re}_L = \frac{(0.6)(5)}{16.84 \times 10^{-6}} = 1.78 \times 10^5$$

De la Ec. 5-50 la diferencia promedio de temperatura es

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{[1000/(0.6)^2](0.6)/0.02624}{0.6795(1.78 \times 10^5)^{1/2}(0.708)^{1/3}} = 248.6\ ^\circ\text{C}$$

Ahora regresamos y evaluamos las propiedades en

$$T_f = \frac{248.6 + 27}{2} = 137.8\ ^\circ\text{C} = 410.8\ \text{K}$$

y obtenemos

$$\nu = 27.18 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0.687 \qquad k = 0.0344\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C}$$

$$\text{Re}_L = \frac{(0.6)(5)}{27.18 \times 10^{-6}} = 1.10 \times 10^{\text{n}}$$

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{[1000/(0.6)^2](0.6)/0.0344}{0.6795(1.1 \times 10^5)^{1/2}(0.687)^{1/3}} = 243.6\ ^\circ\text{C}$$

Al final de la placa ($x = L = 0.6$ m), se obtiene la diferencia de temperatura de las Ecs. 5-48 y 5-50 con la constante 0.455 para dar

$$(T_w - T_\infty)_{x=L} = \frac{(243.6)(0.6795)}{0.453} = 365.4\ ^\circ\text{C}$$

Una solución alternativa sería basar el número de Nusselt en la Ec. 5-51.

57 La relación entre fricción del fluido y transferencia de calor

Acabamos de ver que los campos de temperatura y de flujo están relacionados. Ahora buscamos una expresión por medio de la cual pueda relacionarse directamente la resistencia de fricción a la transferencia de calor.

El esfuerzo cortante en la pared puede expresarse en términos de un coeficiente de fricción C_f

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_\infty^2}{2} \tag{5-52}$$

La Ec. 5-52 es la ecuación de definición para el coeficiente de fricción. El esfuerzo cortante también puede calcularse de la relación

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_w$$

Usando la distribución de velocidad expresada por la Ec. 5-19, tenemos

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

y haciendo uso de la relación para el espesor de capa límite da

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4.64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} \tag{5-53}$$

Combinando las Ecs. 5-52 y 5-53 se llega a

$$\frac{C_{fx}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4.64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}\frac{1}{\rho u_\infty^2} = 0.323\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \tag{5-54}$$

La Ec. 5-44 puede reescribirse en la forma siguiente:

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr}} = \frac{h}{\rho c_p u_\infty} = 0.332\,\mathrm{Pr}^{-2/3}\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

El grupo del lado izquierdo se llama el número de Stanton,

$$\mathrm{St}_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

de modo que

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{2/3} = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \tag{5-55}$$

Por comparación entre las Ecs. 5-54 y 5-55 observamos que los miembros del lado derecho son semejantes excepto por la diferencia de alrededor de 3% en la constante, que es el resultado de la naturaleza aproximada del análisis integral de capa límite. Reconocemos esta aproximación y escribimos

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2} \tag{5-56}$$

La Ec. 5-56 se llama la *analogía de Reynolds-Colburn* y expresa la relación entre la fricción del fluido y la transferencia de calor para flujo laminar sobre una placa plana. El coeficiente de transferencia de calor puede así determinarse haciendo mediciones del arrastre por fricción sobre una placa bajo condiciones, *en* las cuales no se involucra transferencia de calor,

Resulta que la Ec. 5-56 también puede aplicarse a flujo turbulento sobre una placa plana y en una forma modificada, a flujo turbulento en un tubo. Esto no se aplica a flujo laminar en tubos. En general, es necesario un tratamiento más riguroso de las ecuaciones que controlan cuando se emprenden nuevas aplicaciones de la analogía entre transferencia de calor y flujo de fluidos, y los resultados no siempre toman la forma sencilla de la Ec. 5-56. El lector interesado puede consultar el libro de Knudsen y

Katz [6] para mayor información en este tema importante. En este punto, la analogía sencilla desarrollada antes ha servido para ampliar nuestra comprensión de los procesos físicos en convección y para reforzar la noción de que los procesos de transferencia de calor y transporte viscoso están relacionados tanto en el nivel microscópico como en el macroscópico.

Ejemplo 5-5

Para el sistema de flujo en el Ej. 5-4 calcule la fuerza de arrastre que se ejerce en los primeros 40 cm de la placa, usando la analogía entre fricción de fluidos y transferencia de calor.

Solución

Usamos la Ec. 5-56 para calcular el coeficiente de fricción y después calculamos la fuerza de arrastre. Se desea un coeficiente de fricción promedio; así

$$\overline{\mathrm{St}}\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{\bar{C}_f}{2} \qquad (a)$$

La densidad a 316.5 K es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(316.5)} = 1.115 \text{ kg/m}^3$$

Para 40 cm de longitud

$$\overline{\mathrm{St}} = \frac{h}{\rho c_p u_\infty} = \frac{8.698}{(1.115)(1006)(2)} = 3.88 \times 10^{-3}$$

Entonces, de la Ec. a

$$\frac{\bar{C}_f}{2} = (3.88 \times 10^{-3})(0.7)^{2/3} = 3.06 \times 10^{-3}$$

El esfuerzo cortante promedio en la pared se calcula de la Ec. 5-52

$$\bar{\tau}_w = \bar{C}_f \rho \frac{u_\infty^2}{2}$$
$$= (3.06 \times 10^{-3})(1.115)(2)^2$$
$$= 0.0136 \text{ N/m}^2$$

La fuerza de arrastre es el producto de este esfuerzo cortante y el área.

$$D = (0.0136)(0.4) = 5.46 \text{ mN} \quad 11.23 \times 10^{-3} \text{ lb}_f$$

5 8 Transferencia de calor en capa límite turbulenta

Considérese una porción de una capa límite turbulenta como se muestra en la Fig. 5-10. Una región muy delgada cerca de la superficie de la placa tiene un carácter laminar, y la acción viscosa y la transferencia de calor tienen lugar bajo circunstancias como las que existen en flujo laminar. Más lejos, a distancias y mayores de la placa, se

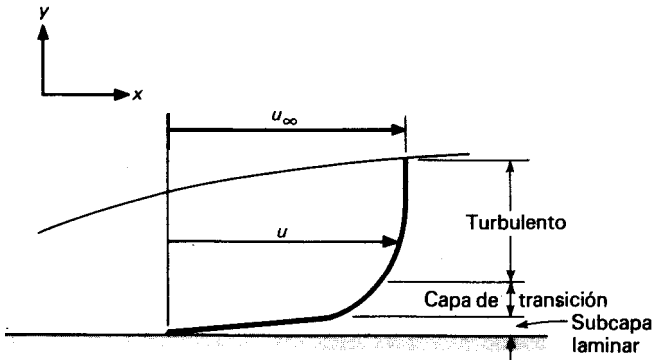


Fig. 510 Perfil de velocidad en capa límite turbulenta en una placa plana.

observa alguna acción turbulenta, pero la acción viscosa molecular y la conducción de calor son aún importantes. Esta región se llama la capa de transición. Aún más lejos, el flujo es por completo turbulento, y el mecanismo principal de intercambio de momento y calor, es uno que involucra porciones macroscópicas de fluido moviéndose alrededor en el flujo. En esta región por completo turbulenta hablamos de *viscosidad turbulenta y conductividad térmica turbulenta.* Estas propiedades turbulentas pueden ser 10 veces mayores que los valores moleculares.

El mecanismo típico de transferencia de calor en flujo turbulento es bastante similar al de flujo laminar; la diferencia básica es que uno debe tratar con propiedades turbulentas en lugar de la viscosidad y la conductividad térmicas ordinarias. La dificultad principal en el tratamiento analítico es que estas propiedades turbulentas varían a través de la capa límite, y la variación específica sólo puede determinarse a partir de datos experimentales. Este es un punto importante. Todos los análisis de flujo turbulento deben basarse eventualmente en datos experimentales, debido a que no hay una teoría adecuada por completo para predecir el comportamiento de flujo turbulento.

Si uno observa la velocidad macroscópica instantánea en un sistema de flujo turbulento, como se mide con un anemómetro de cable caliente u otro dispositivo sensible, se observan fluctuaciones significativas alrededor de la velocidad media de flujo, como se indica en la Fig. 5-11, en donde $\bar{u}$ es la velocidad media y u' es la fluctuación a partir de la media. La velocidad instantánea es por tanto

$$u = \bar{u} + u' \tag{5-57}$$

El valor medio de la fluctuación, u', debe ser cero sobre un periodo largo para condiciones de flujo estacionario. También hay fluctuaciones en el componente y de la velocidad, así que escribiríamos

$$v = \bar{v} + v' \tag{5-58}$$

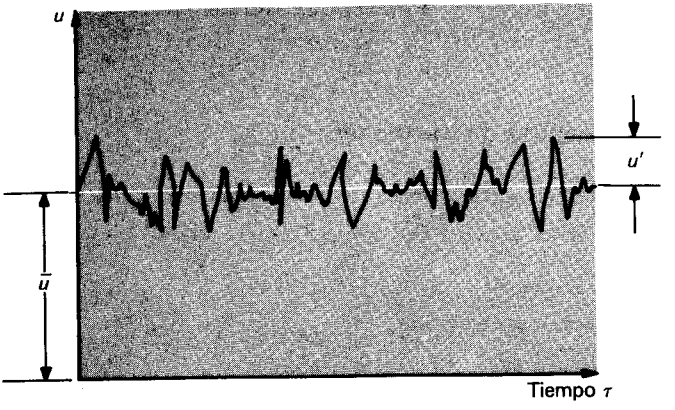


Fig. 511 Fluctuaciones turbulentas en el tiempo.

Las fluctuaciones dan lugar a un esfuerzo de corte turbulento que puede analizarse refiriéndose a la Fig. 5-12.

Para un área unitaria del plano *P-P*, la rapidez instantánea en el transporte de masa a través del plano es $\varrho v'$. Con este transporte de masa, está asociado un cambio en el componente x de la velocidad u'. El flujo neto de momento por unidad de área en la dirección x representa el esfuerzo de corte turbulento en el plano *P-P*, o $\varrho v' u'$. Cuando una porción turbulenta se mueve hacia arriba ($v' > 0$), entra en una región de u superior y por tanto, debe efectuar una fluctuación de disminución en u', esto es, $u' < 0$. Se puede manejar un argumento similar para $v' < 0$, de modo que el esfuerzo cortante turbulento promedio se expresará por

$$\tau_t = -\rho v' u' \tag{5-59}$$

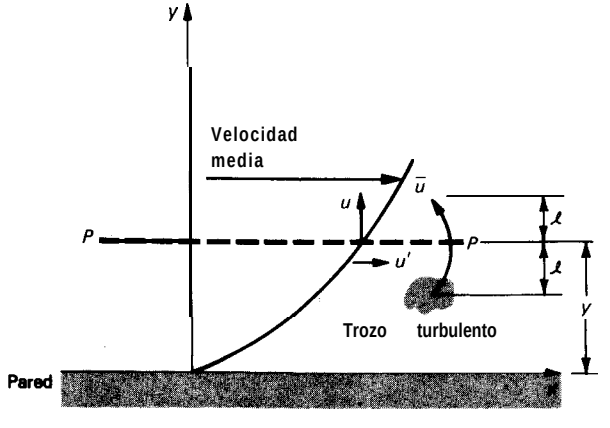


Fig. 512 Esfuerzo cortante turbulento y longitud de mezclado.

Debemos observar que aun cuando $\overline{v'} = \overline{u'} = 0$, el promedio del *producto de fluctuación* $\overline{u'v'}$ *no es* cero.

Viscosidad turbulenta y la longitud de mezclado

Definamos una viscosidad turbulenta o difusividad turbulenta para el momento ϵ_M tal que

$$\tau_t = -\overline{\rho v' u'} = \rho \epsilon_M \frac{d\,u}{dy} \tag{5-60}$$

Acabamos de comparar el transporte macroscópico de calor y momento en flujo turbulento a sus contrapartes moleculares en flujo laminar, de modo que la definición en la Ec. 5-60 es una consecuencia natural de esta analogía. Para analizar problemas de transporte molecular, normalmente se introduce el concepto de *trayectoria libre media* o la distancia promedio que viaja una partícula entre colisiones. Prandtl introdujo un concepto similar para describir fenómenos de flujo turbulento. *Lu longitud de mezclado de Prandtl* es la distancia recorrida, en promedio, por las porciones turbulentas de fluido en una dirección normal al flujo medio.

Imaginemos una porción turbulenta que se encuentra a una distancia Ppor encima o por abajo del plano P-P, como aparece en la Fig. 5-12. Estas porciones de fluido se mueven hacia delante y hacia atrás a través del plano y originan el efecto de esfuerzo cortante turbulento o de contracorriente. En y + ℓ la velocidad sería, aproximadamente

$$u(y + \ell) \approx u(y) + \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

mientras que en y − ℓ,

$$u(y - \ell) \approx u(y) - \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

Prandtl postuló que la fluctuación u' es proporcional a la media de las dos cantidades anteriores, 0

$$u' \approx \ell \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5-61}$$

La distancia ℓ se llama la longitud de mezclado de Prandtl. Este también postuló que v' sería del mismo orden de magnitud que u', de modo que el esfuerzo cortante turbulento de la Ec. 5-60 podría escribirse

$$\tau_t = -\overline{\rho u' v'} = \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \rho \epsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5-62}$$

La viscosidad turbulenta ϵ_M se convierte así en

$$\epsilon_M = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5-63}$$

Ya hemos observado que las propiedades turbulentas, y por tanto, la longitud de mezclado, varían notablemente a través de la capa límite. Durante muchos años, se han aplicado un gran número de técnicas de análisis para tomar en cuenta esta variación. La hipótesis de Prandtl fue que la longitud de mezclado es proporcional a la distancia de la pared, o sea

$$\ell = Ky \tag{5-64}$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Se hizo la suposición adicional de que en la región cercana a la pared, el esfuerzo cortante es aproximadamente constante de modo que $\tau_t \approx \tau_w$. Cuando se usa esta suposición junto con la Ec. 5-64, la Ec. 5-62 conduce a

$$\tau_w = \rho K^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Tomando la raíz cuadrada e integrando con respecto a y, se obtiene

$$u = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C \tag{5-65}$$

donde C es la constante de integración. La Ec. 5-65 coincide muy bien con datos experimentales excepto en la región muy cercana a la pared, donde la subcapa laminar está presente. En la subcapa, la distribución de velocidad es esencialmente lineal.

Cuantifiquemos ahora nuestra descripción cualitativa anterior de una capa límite turbulenta expresando el esfuerzo cortante como la suma de una parte molecular y una turbulenta:

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \epsilon_M) \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5-66}$$

El llamado perfil universal de velocidad se obtiene introduciendo dos coordenadas adimensionales

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \tag{5-67}$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}\, y}{\nu} \tag{5-68}$$

Usando estos parámetros y suponiendo $\tau \approx$ constante, podemos reescribir la Ec. 5-66 como

$$du^+ = \frac{dy^+}{1 + \epsilon_M/\nu} \tag{5-69}$$

En términos de nuestro tratamiento cualitativo anterior, la subcapa laminar es la región en donde $\epsilon_M \sim 0$, la capa de transición tiene $\epsilon_M \sim \nu$ y la capa turbulenta tiene $\epsilon_M \gg \nu$. Por tanto, tomando $\epsilon_M = 0$ en la Ec. 5-69 e integrando produce

$$u^+ = y^+ + c$$

En la pared $u^+ = 0$ para $y^+ = 0$ de modo que $c = 0$ y

$$u^+ = y^+ \tag{5-70}$$

es la relación de velocidad (una lineal) para la subcapa laminar. En la región turbulenta por completo $\epsilon_M/\nu \gg 1$. De la Ec. 5-65

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\frac{1}{y}$$

Sustituyendo esta relación junto con la Ec. 5-64 en la Ec. 5-63 se obtiene

$$\epsilon_M = K\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}y$$

$$\frac{\epsilon_m}{\nu} = Ky^+ \tag{5-71}$$

Sustituyendo esta relación en la Ec. 5-69 para $\epsilon_M/\nu \gg 1$ e integrando da

$$u^+ = \frac{1}{K}\ln y^+ + c \tag{5-72}$$

Se obtendrá la misma *forma* de la ecuación para la región de transición. Los límites de cada región se obtienen comparando las ecuaciones anteriores con mediciones experimentales de velocidad, con las siguientes constantes, comúnmente aceptadas:

Subcapa laminar: $0 < y^+ < 5$	$u^+ = y^+$
Capa de transición: $5 < y^+ < 30$	$u^+ = 5.0 \ln y^+ - 3.05$
Capa turbulenta: $30 < y^+ < 400$	$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$

(5-73)

El conjunto de las Eco. 5-73 se llama ***el perfil universal de velocidad*** y concuerda muy bien con datos experimentales; sin embargo, deberíamos observar de nuevo que las constantes en tas ecuaciones deben determinarse a partir de mediciones experimentales de velocidad. El punto de satisfacción es que el modelo sencillo de longitud de mezclado de Prandtl proporcione una forma de ecuación que concuerde tan bien con los datos.

La transferencia de calor turbulenta es análoga a la transferencia de momento turbulenta. El flujo turbulento de momento postulado por la Ec. 5-59 implica con él una fluctuación turbulenta de energía proporcional al gradiente de temperatura. Tenemos entonces, en analogía con la Ec. 5-62,

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{turb}} = -\rho c_p \epsilon_H \frac{\partial T}{\partial y} \tag{5-74}$$

o bien, para regiones en las que tanto el transporte de energía molecular como el turbulento son importantes,

$$\frac{q}{A} = -\rho c_p (\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \tag{5-75}$$

Se han efectuado diversos análisis similares al de perfil universal de velocidad anterior, para predecir la transferencia de calor en la capa límite turbulenta. Estos análisis han sido exitosos, pero para nuestros propósitos, la analogía de Colbum entre fricción del fluido y transferencia de calor es más fácil de aplicar, y proporciona resultados que están en acuerdo con el experimento y de forma más sencilla.

En la región de flujo turbulento, en donde $\epsilon_M \gg \nu$ y $\epsilon_H \gg \alpha$, definimos el número turbulento de Prandtl como

$$\text{Pr}_t = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_H} \tag{5-76}$$

Si podemos esperar que el transporte turbulento de momento y energía aumenten en la misma proporción comparados con sus valores moleculares, podemos anticipar que los coeficientes de transferencia de calor se pueden calcular por medio de la Ec. 5-56 con el número de Prandtl molecular ordinario que se usa en la computación. Resulta que la suposición de que $\text{Pr}_t \approx \text{Pr}$ es buena debido a que cálculos de transferencia de calor basados en la analogía de fricción de fluido concuerda muy bien con datos experimentales. Para este cálculo, necesitamos valores experimentales de C_f para flujo turbulento.

Schlichting [1] ha examinado mediciones experimentales de coeficientes de fricción para flujo turbulento en placas planas. Presentamos los resultados de este examen para que puedan emplearse en el cálculo de la transferencia de calor turbulenta con la analogía de fricción del fluido y transferencia de calor. El coeficiente de fricción superficial *local* se expresa por

$$C_{fx} = 0.0592\, \text{Re}_x^{-1/5} \tag{5-77}$$

para números de Reynolds entre 5×10^5 y 10^7. Para números de Reynolds superiores de 10^7 a 10^9, se recomienda la fórmula de Schultz-Grunow [8]:

$$C_{fx} = 0.370\, (\log \text{Re}_x)^{-2.584} \tag{5-78}$$

El *coeficiente de fricción promedio* para una placa plana con una capa límite laminar hasta $Re_{crít}$ y turbulenta después, se puede calcular a partir de:

$$\bar{C}_f = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.584}} - \frac{A}{Re_L} \qquad Re_{crít} < Re_L < 10^9 \tag{5-79}$$

donde la constante A depende de $Re_{crít}$ de acuerdo con la Tabla 5-l. Puede obtenerse una fórmula un poco más sencilla para números de Reynolds inferiores como

$$\bar{C}_f = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{A}{Re_L} \qquad Re_{crít} < Re_L < 10^7 \tag{5-80}$$

Las Ecs. 5-79 y 5-80 están en buen acuerdo dentro de su intervalo común de aplicación, y cuál se usará en la práctica depender& de la comodidad de computación.

Tabla 5-1

$Re_{crít}$	A
3×10^5	1050
5×10^5	1700
10^6	3300
3×10^6	8700

Aplicando la analogía de fricción del fluido (Ec. 5-56) obtenemos el coeficiente local de transferencia de calor como

$$St_x Pr^{2/3} = 0.0296\ Re_x^{-1/5} \qquad 5 \times 10^5 < Re_x < 10^7 \tag{5-81}$$

o

$$St_{PP} = 0.185(\log Re_x)^{-2.584} \qquad 10^7 < Re_x < 10^9 \tag{5-82}$$

La transferencia de calor promedio sobre la capa límite laminar-turbulenta completa es

$$\overline{St}\ Pr^{2/3} = \frac{\bar{C}_f}{2} \tag{5-83}$$

Para $Re_{crít} = 5 \times 10^5$ y $Re_L < 10^7$, puede usarse la Ec. 5-80 para obtener

$$\overline{St}\ Pr^{2/3} = 0.037\ Re_L^{-1/5} - 850\ Re_L^{-1} \tag{5-84}$$

Recordando que $\overline{St} = \overline{Nu}/(Re_L\ Pr)$, podemos reescribir la Ec. 5-84 como

$$\overline{Nu}_L = \frac{hL}{k} = Pr^{1/3}(0.037\ Re_L^{0.8} - 850) \tag{5-85}$$

Para números de Reynolds superiores a 10^7, la Ec. 5-83 puede usarse en combinación con $\bar{C}_f$ obtenido de la Ec. 5-79. El lector debería observar que si se escoge un número

de Reynolds de transición diferente de 500 000, entonces las Ecs. 5-84 y 5-85 deben cambiar en conformidad. Whitaker [10] sugiere una ecuación alterna que puede dar mejores resultados con algunos líquidos debido al término de razón de viscosidad:

$$\mathrm{Nu}_L = 0.036\mathrm{Pr}^{0.43}(\mathrm{Re}_L^{0.8} - 9200)\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{1/4} \tag{5-86}$$

Cuando la ecuación se utiliza para gases, se elimina el término de razón de viscosidad. Todas las propiedades excepto μ_∞ y μ_w se evalúan a la temperatura de la película.

Churchill [ll] ha dado algunos métodos más completos para correlacionar la transferencia de calor de la capa límite turbulenta.

Ejemplo 5-7

El aire a 20 °C y 1 atm fluye sobre una placa plana a 35 m/s. La placa tiene 75 cm de largo y se mantiene a 60 °C. Suponiendo profundidad unitaria en la dirección z, calcule la transferencia de calor a partir de la placa.

Solución

Evaluamos las propiedades a la temperatura de la película:

$$T_f = \frac{20 + 60}{2} = 40°\mathrm{C} = 313\ \mathrm{K}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(313)} = 1.128\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\mu = 2.007 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s}$$

$$\mathrm{Pr} = 0.7 \qquad k = 0.02723\ \mathrm{W/m \cdot °C} \qquad c_p = 1.007\ \mathrm{kJ/kg \cdot °C}$$

El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(1.128)(35)(0.75)}{2.007 \times 10\text{-}5} = 1.475 \times 10^6$$

y la capa limite es turbulenta debido a que el número de Reynolds es mayor que 5×10^5. Por tanto, usamos la Ec. 5-85 para calcular la transferencia de calor promedio sobre la placa:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \mathrm{Pr}^{1/3}(0.037\ \mathrm{Re}_L^{0.8} - 850)$$
$$= (0.7)^{1/3}[(0.037)(1.475 \times 10^6)^{0.8} - 8501 = 2074$$

$$\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}_L \frac{k}{L} = \frac{(2074)(0.02723)}{0.75} = 75.3\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}\ \ [13.27\ \mathrm{Btu/h \cdot pies^2 \cdot °F}]$$

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (75.3)(0.75)(60 - 20) = 2259\ \mathrm{W}\ \ [7708\ \mathrm{Btu/h}]$$

5-9 Espesor de la capa límite turbulenta

Una cantidad de investigaciones experimentales han mostrado que el perfil de velocidad en una capa límite turbulenta, fuera de la subcapa laminar puede describirse por una relación a la potencia de un séptimo

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{5-87}$$

donde δ es el espesor de la capa límite como antes. Para propósitos de un análisis integral, la integral de momento puede evaluarse con la Ec. 5-87 debido a que la subcapa laminar es tan delgada. Sin embargo, el esfuerzo cortante de la pared no puede calcularse de la Ec. 5-87 porque da un valor infinito a $y = 0$.

Para determinar el espesor de la capa límite turbulenta empleamos la Ec. 5-17 para la relación integral de momento y evaluamos el esfuerzo cortante en la pared a partir de las relaciones empíricas para fricción superficial que presentamos anteriormente.

De acuerdo con la Ec. 5-52,

$$\tau_w = \frac{C_f \rho u_\infty^2}{2}$$

y así para Re, $< 10^7$ obtenemos de la Ec. 5-77

$$\tau_w = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5} \rho u_\infty^2 \tag{5-88}$$

Ahora, usando la ecuación integral de momento para gradiente de presión cero (Ec. 5-17) junto con el perfil de velocidad y el esfuerzo cortante en la pared, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy = 0.0296 \left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5}$$

Integrando y eliminando términos da

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7}(0.0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5} x^{-1/5} \tag{5-89}$$

Integraremos esta ecuación para dos situaciones físicas

1. La capa límite es turbulenta por completo a partir del borde principal de la placa.
2. La capa límite sigue un patrón de crecimiento laminar hasta $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$ y un crecimiento turbulento en seguida.

Para el primer caso integramos la Ec. 5-89 con la condición que $\delta = 0$ en $x = 0$, para obtener

$$\frac{\delta}{x} = 0.381\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} \tag{5-90}$$

Para el caso 2 tenemos la condición

$$\delta = \delta_{lam} \qquad \text{en } x_{crít} = 5 \times 10^5 \frac{\nu}{u_\infty} \tag{5-91}$$

Ahora, δ_{lam} se calcula de la relación exacta de la Ec. 5-21*a*:

$$\delta_{lam} = 5.0 x_{crít,} (5 \text{ x } 10^5)^{-1/2} \tag{5-92}$$

Integrando la Ec. 5-89 da

$$\delta - \delta_{lam} = \frac{72}{7}(0.0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5}\frac{5}{4}(x^{4/5} - x_{crít}{}^{4/5}) \tag{5-93}$$

Combinando las diversas relaciones precedentes se obtiene

$$\frac{\delta}{x} = 0.381\ \text{Re}_x^{-1/5} - 10{,}256\ \text{Re}_x^{-1} \tag{5-94}$$

Esta relación se aplica solamente para la región 5 X 10^5 C Re, C 10^7

Ejemplo 58

Calcule el espesor de capa límite turbulenta al final de la placa del Ej. 5-7, suponiendo que se desarrolla (*a*) a partir del borde principal de la placa y (b) a partir del punto de transición en $\text{Re}_{crít} = 5 \times 10^5$.

Solución

Como ya calculamos el número de Reynolds como $\text{Re}_L = 1.475 \times 10^6$, es fácil insertar este valor en las Ecs. 5-90 y 5-94 junto con $x = L = 0.75$ para dar

(*a*) $\delta = (0.75)(0.381)(1.475 \times 10^6)^{-0.2} = 0.0167$ m = 16.7 mm [0.657 plg]
(*b*) $\delta = (0.75)[(0.381)(1.475 \times 10^6)^{-0.2} - 10{,}256(1.475 \times 10^6)^{-1}]$
= 0.0115 m = 11.5 mm [0.453 plg]

Los dos valores difieren por 31%.

510 Transferencia de calor de flujo laminar en tubos

Considérese el sistema de flujo en un tubo de la Fig. 5-13. Deseamos calcular la transferencia de calor bajo condiciones de flujo desarrolladas cuando el flujo permanece laminar. La temperatura de la pared es T_w, el radio del tubo es r_0 y la velocidad en el centro del tubo es u_0. Se supone que la presión es uniforme en cualquier sección transversal. La distribución de velocidad puede determinarse considerando el elemento de fluido mostrado en la Fig. 5-14. Las fuerzas de presión están balanceadas por las fuerzas viscosas de corte de modo que

$$\pi r^2\, dp = \tau 2\pi r\, dx = 2\pi r \mu\, dx \frac{du}{dr}$$

$$du = \frac{1}{2\mu} r \frac{dp}{dx} dr$$

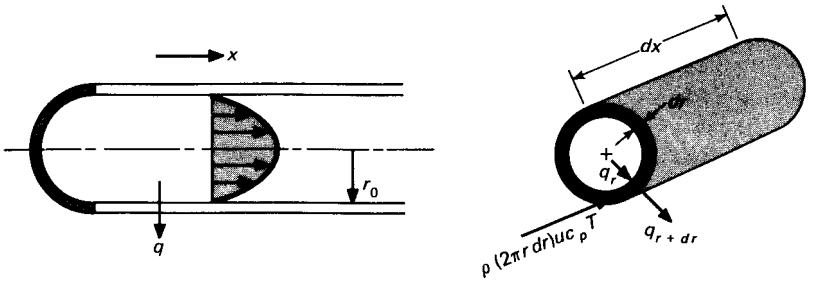


Fig. 5-13 Volumen de control para análisis de energía en flujo en tubos.

Y
$$u = \frac{I}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + \text{constante} \qquad (5\text{-}95)$$

Con la condición de frontera

$$u = 0 \qquad \text{en } r = r_o$$

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(r^2 - r_o^2)$$

la velocidad en el centro del tubo está expresada por

$$u_0 = -\frac{r_o^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (5\text{-}96)$$

de modo que la distribución de velocidad puede escribirse

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \qquad (5\text{-}97)$$

que es la conocida distribución parabólica para flujo laminar en tubos. Ahora considérese el proceso de transferencia de calor para este sistema de flujo. Para simplificar el análisis, suponemos que hay un flujo de calor constante en la pared del tubo; esto es,

$$\frac{dq_w}{dx} = \text{constante}$$

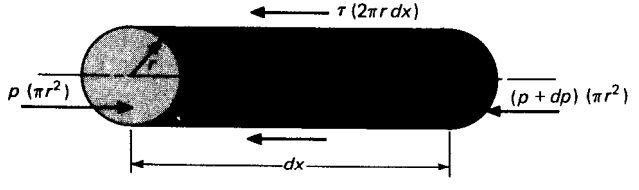


Fig. 514 Balance de fuerzas en un elemento de fluido en flujo en tubos.

El flujo de calor conducido hacia el elemento anular es

$$dq_r = -k2\pi r\, dx \frac{\partial T}{\partial r}$$

y el calor conducido hacia el exterior es

$$dq_{r+dr} = -k2\pi(r + dr)\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} dr\right)$$

El calor neto que sale del elemento por convección es

$$2\pi r\, dr\, \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

El balance de energía es

Energía neta que sale por convección = calor neto que entra por-conducción

o despreciando diferenciales de segundo orden

$$r\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} dx\, dr = k \left(\frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right) dx\, dr$$

lo cual puede reescribirse

$$\frac{1}{ur} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-98}$$

Suponemos que el flujo de calor en la pared es constante, de tal modo que la temperatura promedio del fluido debe aumentar linealmente con x, o sea

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{constante}$$

Esto significa que los perfiles de temperatura serán similares a diversas distancias *x* a lo largo del tubo. Las condiciones de frontera en la Ec. 5-98 son

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad en\ r = 0$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_o} = q_w = \text{constante}$$

Para obtener la solución a la Ec. 5-98, debe insertarse la distribución de velocidad expresada por la Ec. 5-97. Se supone que los campos de temperatura y velocidad son independientes; es decir, un gradiente de temperatura no afecta el cálculo del perfil

de velocidad. Esto es equivalente a especificar que las propiedades del fluido permanecen constantes en el flujo. Con la sustitución del perfil de velocidad, la Ec. 5-98 se convierte en

$$\frac{\mathrm{a}}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(1-\frac{r^2}{r_o^2}\right)r$$

La integración produce

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4r_o^2}\right)+C_1$$

y una segunda integración da

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16r_o^2}\right)+C_1\ln r + C_2$$

Aplicando la primera condición de frontera, encontramos que

$$C_1 = 0$$

La segunda condición de frontera se ha satisfecho observando que el gradiente de temperatura axil $\partial T/\partial x$ *es* constante. Finalmente, la distribución de temperatura puede escribirse en términos de la temperatura en el centro del tubo:

$$T = T_c \quad \text{en } r = 0 \quad \text{de modo que } C_2 = T_c$$

$$T - T_c = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{u_0 r_o^2}{4}\left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_o}\right)^4\right] \tag{5-99}$$

La temperatura global

El coeficiente de transferencia de calor por convección de flujo en tubos se define por lo general como

$$\text{Flujo de calor local} = q'' = h(T_w - T_b) \tag{5-100}$$

donde T_w es la temperatura de pared y T_b *es* la llamada temperatura global o temperatura de energía promedio del fluido a través del tubo, la cual puede calcularse a partir de

$$T_b = \overline{T} = \frac{\int_0^{r_o}\rho 2\pi r\,dr\,uc_pT}{\int_0^{r_o}\rho 2\pi r\,dr\,uc_p} \tag{5-101}$$

La razón para usar la temperatura global en la definición de coeficientes de transferencia de calor puede explicarse de la siguiente manera. En flujo en tubos, no hay una

condición de corriente libre fácilmente perceptible como está presente en flujo sobre una placa plana. Aun la temperatura de la línea central T_c no puede expresarse con facilidad en términos de las variables de flujo en la entrada y la transferencia de calor. Para la mayor parte de problemas de transferencia de calor para flujo en canales o tubos, el tema de interés central es la energía total transferida al fluido, ya sea, en una longitud elemental del tubo o bien, sobre la longitud total del canal. En cualquier posición x, la temperatura que es indicativa de la energía total del flujo es una temperatura promedio de masa-energía integrada sobre el área total del flujo. El numerador de la **Ec.** 5-101 representa el flujo total de energía a través del tubo, y el denominador representa el producto de flujo de masa y el calor específico integrado sobre el área de flujo. La temperatura global es así representativa de la energía total del flujo en el lugar particular. Por esta razón, a veces se hace referencia a la temperatura global como la temperatura de "taza mezcladora", ya que es la temperatura que adquiriría el fluido si se le colocara en una cámara de mezclado y se le permitiese llegar al equilibrio. Para la distribución de temperatura expresada en la **Ec.** 5-99, la temperatura global es una función lineal de x ya que el flujo de calor en la pared del tubo es constante. Calculando la temperatura global a partir de la **Ec.** 5-101, tenemos

$$T_b = T_c + \frac{7}{96}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-102}$$

y para la temperatura de pared

$$T_w = T_c + \frac{3}{16}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-103}$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula de

$$q = hA(T_w - T_b) = kA\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_o}$$

$$h = \frac{k(\partial T/\partial r)_{r=r_o}}{T_w - T_b} \tag{5-104}$$

El gradiente de temperatura está expresado por

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=r_o} = \frac{u_0}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4r_o^2}\right)_{r=r_o} = \frac{u_0 r_o}{4\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-105}$$

Sustituyendo las Ecs. 5-102, 5-103 y 5-105 en la **Ec.** 5-104 se obtiene

$$h = \frac{24}{11}\frac{k}{r_o} = \frac{48}{11}\frac{k}{d_o}$$

o expresando el resultado en términos del número de **Nusselt**,

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{hd_o}{k} = 4.364 \tag{5-106}$$

en acuerdo con un cálculo exacto por Sellars, Tribus y Klein [3], los cuales consideran el perfil de temperatura a medida que se desarrolla. En el Cap. 6 se presentarán algunas relaciones empíricas para calcular transferencia de calor en flujo laminar en tubos.

Podemos notar en este momento que cuando se establece que un fluido entra a un tubo a cierta temperatura, nos referimos a la temperatura global. Esta se usa para balances globales de energía en sistemas.

511 Flujo turbulento en un tubo

El perfil de velocidad desarrollado para flujo turbulento en un tubo aparecerá como se muestra en la Fig. 5-15. Una subcapa laminar o "película", ocupa el espacio cerca de la superficie, mientras el núcleo central del flujo es turbulento. Para determinar analíticamente la transferencia de calor para esta situación, necesitamos, como siempre, conocer la distribución de temperatura en el flujo. Para obtener esta distribución de temperatura, el análisis debe tomar en consideración el efecto de contracorrientes turbulentas en la transferencia de calor y momento. Usaremos un análisis aproximado que relaciona la conducción y el transporte de calor al transporte de momento en el flujo, es decir, efectos viscosos.

El flujo de calor a través de un elemento de fluido en flujo laminar puede expresarse por

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dy}$$

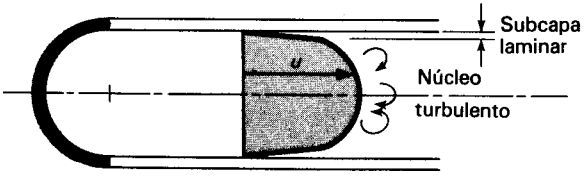
Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre ρc_p,

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -\alpha\frac{dT}{dy}$$

Deberá recordarse que α es la difusividad molecular del calor. En flujo turbulento, uno debe suponer que el transporte de calor podría representarse por

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -(\alpha + \epsilon_H)\frac{dT}{dy} \tag{5-107}$$

donde ϵ_H es una difusividad turbulenta de calor.



Rg. 815 Perfil de velocidad en flujo turbulento en tubos.

La Ec. 5-107 expresa la conducción total de calor como una suma de la conducción molecular y la conducción turbulenta macroscópica. De manera similar, el esfuerzo cortante en flujo turbulento podría escribirse

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \epsilon_M\right)\frac{du}{dy} = (\nu + \epsilon_M)\frac{du}{dy} \tag{5-108}$$

donde ϵ_M es la difusividad turbulenta para momento. Ahora suponemos que el calor y el momento se transportan a la misma rapidez; esto es, $\epsilon_M = \epsilon_H$ y $\nu = \alpha$, o Pr = 1.

Dividiendo la Ec. 5-107 entre la Ec. 5-108 da

$$\frac{q}{c_p A \tau} du = -dT$$

Una suposición adicional es que la razón de la transferencia de calor por unidad de área y el esfuerzo cortante es constante a través del campo de flujo. Esto es congruente con la suposición de que el calor y el momento se transportan a la misma rapidez. Así

$$\frac{q}{A\tau} = \text{constante} = \frac{q_w}{A_w \tau_w} \tag{5-109}$$

Integrando en seguida la Ec. 5-109 entre condiciones de pared y condiciones promedio da

$$\frac{q_w}{A_w \tau_w c_p}\int_{u=0}^{u=u_m} du = \int_{T_w}^{T_b} -dT$$

$$\frac{q_w u_m}{A_w \tau_w c_p} = T_w - T_b \tag{5-110}$$

Pero la transferencia de calor en la pared puede expresarse por

$$q_w = hA_w(T_w - T_b)$$

y el esfuerzo de corte puede calcularse de

$$\tau_w = \frac{\Delta p(\pi d_o^2)}{4\pi d_o L} = \frac{\Delta p\, d_o}{4\quad L}$$

La caída de presión puede expresarse en términos de un factor de fricción f por

$$\Delta p = f\frac{L}{d}\rho\frac{u_m^2}{2} \tag{5-111}$$

de modo que

$$\tau_w = \frac{f}{8}\rho u_m^2 \tag{5-112}$$

Sustituyendo las expresiones para τ_w y q_w en la Ec. 5-110 produce

$$\mathrm{St} = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}} = \frac{f}{8} \tag{5-113}$$

La Ec. 5-l 13 se llama la analogía de Reynolds para flujo en tubos, Relaciona la rapidez de transferencia de calor a las pérdidas por fricción en flujo en tubos y está en buen acuerdo con experimentos cuando se usa con gases cuyos números de Prandtl están cerca de la unidad. (Recuérdese que Pr = 1 fue una de las suposiciones del análisis.)

Una fórmula empírica para el factor de fricción turbulento hasta números de Reynolds de alrededor de 2 X 10^5 para flujo en tubos lisos es

$$f = \frac{0.316}{\mathrm{Re}_d^{1/4}} \tag{5-l 14}$$

Insertando esta expresión en la Ec. 5-113 se obtiene

$$\frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr}} = 0.0395\ \mathrm{Re}_d^{-1/4}$$

$$\mathrm{Nu}_d = 0.0395\ \mathrm{Re}_d^{3/4} \tag{5-115}$$

ya que supusimos que el número de Prandtl era la unidad. La derivación de esta relación para transferencia de calor turbulenta en tubos lisos es muy restrictiva debido a la suposición de Pr $\sim$ 1 .O. La analogía entre fricción de fluido y transferencia de calor de la Sec. 5-7 indicaba una dependencia con el número de Prandtl de $\mathrm{Pr}^{2/3}$ para el problema de placa plana y resulta que esta dependencia funciona bastante bien para flujo turbulento *en* tubos. Las Ecs. 5-l 13 y 5-115 pueden modificarse por este factor para producir

$$\mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{5-113a}$$

$$\mathrm{Nu}_d = 0.0395\ \mathrm{Re}_d^{3/4}\ \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5-115a}$$

Como veremos en el Cap. 6, la Ec. 5-115*a* predice coeficientes de transferencia de calor que son un poco superiores a los que se observan en los experimentos. El propósito del estudio en este punto ha sido mostrar que uno puede llegar a una relación para transferencia de calor turbulenta de una manera analítica bastante sencilla. Como lo indicamos antes, un desarrollo riguroso de la analogía de Reynolds entre transferencia de calor y fricción del fluido involucra consideraciones que desbordan el alcance de nuestro tratamiento, y la trayectoria de razonamiento simple que escogimos aquí se proporciona con el propósito de indicar la naturaleza general de los procesos físicos.

Para propósitos de cálculo, la relación correcta que debe usarse para flujo turbulento en un tubo liso es la Ec. 6-4, la **cual** *escribimos aquí para comparación:*

$$\mathrm{Nu}_d = 0.023\ \mathrm{Re}^{0.8}\ \mathrm{Pr}^{0.4} \tag{6-4}$$

Todas las propiedades en la Ec. 6-4 se evalúan a la temperatura promedio.

512 Transferencia de calor en flujo a alta velocidad

Nuestro análisis anterior de la transferencia de calor en la capa límite (Sec. 5-6) despreció los efectos de la disipación viscosa dentro de la capa límite. Cuando la velocidad de corriente libre es muy alta, como en los aviones de alta velocidad, deben considerarse estos efectos disipativos. Iniciamos nuestro análisis considerando el caso adiabático, es decir, una pared con aislante perfecto. En este caso la temperatura de pared puede ser considerablemente superior que la temperatura de corriente libre aun cuando no tenga lugar la transferencia de calor. Esta alta temperatura resulta de dos situaciones: (1) el aumento en temperatura del fluido cuando se lleva al reposo en la superficie plana mientras la energía cinética del flujo se convierte en energía térmica interna, y (2) el efecto de calentamiento debido a la disipación viscosa. Considérese la primera situación. La energía cinética del gas se convierte en energía térmica cuando se lleva el gas al reposo, y este proceso se describe por la ecuación de energía en flujo estacionario para un proceso adiabático:

$$i_0 = i_\infty + \frac{1}{2g_c} u_\infty^2 \tag{5-116}$$

donde i_0 es la entalpía de estancamiento del gas. Esta ecuación puede escribirse en términos de temperatura como

$$c_p(T_0 - T_\infty) = \frac{1}{2g_c} u_\infty^2$$

donde T_0 es la temperatura de estancamiento y T_∞ es la temperatura estática de corriente libre. Expresado en términos del número de Mach de corriente libre esto es

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \tag{5-117}$$

donde M_∞ es el número de Mach, que se define como $M_\infty = u_\infty/a$, y a es la velocidad acústica, la cual puede calcularse para un gas perfecto con

$$a = \sqrt{\gamma g_c R T} \tag{5-118}$$

donde R es la constante de los gases.

En el caso real de un problema de flujo de capa límite, el fluido no se lleva al reposo en forma reversible ya que la acción viscosa es fundamentalmente un proceso irreversible en el sentido termodinámico. Además, no toda la energía cinética de corriente libre se convierte en energía térmica -en parte se pierde como calor y en parte se disipa en forma de trabajo viscoso-. Para tomar en cuenta las irreversibilidades en el sistema de flujo de capa límite, se define un ***factor*** de ***recuperación*** como

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{5-119}$$

donde T_{aw} es la temperatura adiabática real y T_∞ es la temperatura estática de la corriente libre. El factor de recuperación puede determinarse experimentalmente, o para algunos sistemas de flujo, pueden hacerse cálculos analíticos.

La ecuación de energía de capa límite

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-22}$$

se ha resuelto para la situación de flujo a alta velocidad tomando en cuenta el término de calentamiento viscoso. Aunque la solución completa es un poco tediosa, los resultados finales son notablemente sencillos. Para nuestros propósitos presentamos sólo los resultados e indicamos cómo pueden aplicarse. Se remite al lector al Apéndice B para una solución exacta a la Ec. 5-22. En un informe de Eckert [4] se proporciona un resumen excelente del problema de transferencia de calor a alta velocidad. En la Fig. B-3 se dan algunos perfiles típicos de temperatura de capa límite para una pared adiabática en flujo a alta velocidad.

El resultado esencial del análisis de la transferencia de calor a alta velocidad, es que las rapideces de transferencia de calor pueden calcularse, en general, con las mismas relaciones que se usan para flujo incompresible a baja velocidad, cuando el coeficiente promedio de transferencia de calor se redefine con la relación

$$q = \bar{h}A(T_w - T_{aw}) \tag{5-120}$$

Obsérvese que la diferencia entre la temperatura de pared adiabática y la temperatura de pared real se usa en la definición, de modo que la expresión dará un valor de flujo de calor cero cuando la pared está a la temperatura de pared adiabática. Para gases con números de Prandtl cerca de la unidad, se han derivado las siguientes relaciones para el factor de recuperación:

flujo laminar: $$r = \mathrm{Pr}^{1/2} \tag{5-121}$$

jlujo turbulento: $$r = \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5-122}$$

Estos factores de recuperación pueden usarse en conjución con la Ec. 5-119 para obtener la temperatura de pared adiabática.

En capas límite a alta velocidad pueden ocurrir gradientes de temperatura considerables y habrá variaciones correspondientes grandes a través de la capa límite. Las ecuaciones de transferencia de calor de propiedades constantes pueden usarse aún si se introducen las propiedades a la temperatura de referencia T* como lo recomienda Eckert:

$$T^* = T_\infty + 0.50(T_w - T_\infty) + 0.22(T_{aw} - T_\infty) \tag{5-123}$$

La analogía entre transferencia de calor y fricción de fluido (Ec. 5-56) también puede usarse cuando se conoce el coeficiente de fricción. Resumiendo las relaciones usadas para cálculos de transferencia de calor a alta velocidad:

Capa limite laminar ($\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0.332 \, \mathrm{Re}_x^{*-1/2} \tag{5-124}$$

Capa *límite turbulenta* ($5 \times 10^5 < Re, < 10^7$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0.0296 \, \mathrm{Re}_x^{*-1/5} \tag{5-125}$$

Capa *límite turbulenta* ($10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0.185 \, (\log \mathrm{Re}_x^*)^{-2.584} \tag{5-126}$$

El índice superior* en las ecuaciones anteriores indica que las propiedades se evalúan a la temperatura de referencia expresada por la Ec. 5-123.

Para obtener un coeficiente promedio de transferencia de calor, las expresiones anteriores deben integrarse sobre la longitud de la placa. Si el número de Reynolds cae en un intervalo tal que la Ec. 5-126 deba usarse, la integración no se puede expresar en forma cerrada y debe usarse una integración numérica. Debe tenerse cuidado al efectuar la integración para el problema de transferencia de calor a alta velocidad, ya que la temperatura de referencia es diferente para porciones laminar y turbulenta de la capa límite. Esto resulta del valor diferente del factor de recuperación usado para flujo laminar y turbulento, como lo expresan las Ecs. 5-121 y 5-122.

Cuando se encuentran velocidades de flujo muy elevadas, la temperatura de pared adiabática puede ser tan alta que tenga lugar la disociación del gas y habrá una variación muy amplia en las propiedades en la capa límite. Eckert [4] recomienda que estos problemas se traten en base a un coeficiente de transferencia de calor definido en términos de diferencia de *entalpía*

$$q = h_i A \, (i_w - i_{aw}) \tag{5-127}$$

El factor de recuperación de entalpía se define entonces como

$$r_i = \frac{i_{aw} - i_\infty}{i_0 - i_\infty} \tag{5-128}$$

donde i_{aw} es la entalpía en las condiciones de la pared adiabática. Se usan las mismas relaciones que antes para calcular el factor de recuperación y la transferencia de calor, excepto que todas las propiedades se evalúan a la entalpía de referencia i* expresada por

$$i^* = i_\infty + 0.5(i_w - i_\infty) + 0.22(i_{aw} - i_\infty) \tag{5-129}$$

El número de Stanton se redefine como

$$\mathrm{St}_i = \frac{h_i}{\rho u_\infty} \tag{5-130}$$

Este número de Stanton se usa en seguida en la Ec. 5-124, 5-125 o 5-126 para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Cuando se calculan las entalpías que se usan

en las relaciones anteriores, debe usarse la entalpía total; es decir, debe incluirse la energía química de disociación así como la energía interna térmica. El método de la entalpía de referencia ha resultado exitosa para calcular la transferencia de energía a alta velocidad con una exactitud superior al 4%.

Ejemplo 5-9

Una placa plana de 70 cm de largo y 1.0 m de ancho se coloca en un túnel de viento en el que las condiciones de flujo son $M = 3$, $p = \frac{1}{20}$ atm y $T = -40$ °C. ¿Qué enfriamiento debe usarse pal-a mantener la placa a 35 °C?

Solución

Debemos considerar separadamente las porciones laminar y turbulenta de la capa límite, debido a que los factores de recuperación, y por tanto, las temperaturas de pared adiabática usadas para establecer el flujo de calor, serán diferentes para cada régimen de flujo. Resulta que la diferencia es bastante pequeña en este problema, pero seguiremos el procedimiento que se usaría si la diferencia fuera apreciable, de modo que pueda indicarse el método general de solución. La velocidad acústica de corriente libre se calcula a partir de

$$a = \sqrt{\gamma g_c R T_\infty} = [(1.4)(1.0)(287)(233)]^{1/2} = 306 \text{ m/s} \quad [1003 \text{ pies/s}]$$

de modo que la velocidad de corriente libre es

$$u_\infty = (3)(306) = 918 \text{ m/s} \quad [3012 \text{ pies/s}]$$

El número máximo de Reynolds se estima haciendo un cálculo basado en las propiedades evaluadas en condiciones de corriente libre

$$\rho_\infty = \frac{(1.0132 \times 10^5)(\frac{1}{20})}{(287)(233)} = 0.0758 \text{ kg/m}^3 \quad [4.73 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{pie}^3]$$

$$\mu_\infty = 1.434 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \quad [0.0347 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{pies}]$$

$$\text{Re}_{L,\infty} = \frac{(0.0758)(918)(0.70)}{1.434 \times 10^{-5}} = 3\,395 \times 10^6$$

Concluimos así que la transferencia de calor en la capa límite tanto laminar como turbulenta debe considerarse. Primero determinamos las temperaturas de referencia para los dos regímenes y en seguida evaluamos las propiedades a esas temperaturas.

PORCION LAMINAR

$$T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) = (233)[1 + (0.2)(3)^2] = 652 \text{ K}$$

Suponiendo un número de Prandtl alrededor de 0.7, tenemos

$$r = \text{Pr}^{1/2} = (0.7)^{1/2} = 0.837$$

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{aw} - 233}{652 - 233}$$

y $T_{aw} = 584 \text{ K} = 311$ °C [592 °F]. Entonces la temperatura de referencia de la Ec. 5-123 es

$$T^* = 233 + (0.5)(35 + 40) + (0.22)(584 - 233) = 347.8 \text{ K}$$

Verificando el número de Prandtl a esta temperatura tenernos

$$Pr'' = 0.697$$

de modo que el cálculo es válido. Si hubiese una diferencia apreciable entre el valor de Pr* y el valor usado para determinar el factor de recuperación, el cálculo tendría que repetirse hasta llegar a un acuerdo.

Las otras propiedades que se usan en el análisis de transferencia de calor laminar son

$$\rho^* = \frac{(1.0132 \times 10^5)(1/20)}{(287X347.8)} = 0.0508 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu^* = 2.07 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k^* = 0.03 \text{ W/m} \cdot °\text{C} \quad [0.0173 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie} \cdot °\text{F}]$$

$$c_p^* = 1.009 \text{ kJ/kg} \cdot °\text{C}$$

PORCION TURBULENTA

Suponiendo Pr = 0.7,

$$r = \text{Pr}^{1/3} = 0.888 \approx \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{aw} - 233}{652 - 233}$$

$$T_{aw} = 605 \text{ K} = 332°\text{C}$$

$$T^* = 233 + (0.5)(35 + 40) + (0.22)(605 - 233) = 352.3 \text{ K}$$

$$\text{Pr}^* = 0.695$$

El acuerdo entre Pr* y el valor supuesto es lo suficientemente cercano. Las otras propiedades que se usan en el análisis de transferencia de calor turbulenta son

$$\rho^* = \frac{(1.0132 \times 10^5)(1/20)}{(287X352.3)} = 0.0501 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu^* = 2.09 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k^* = 0.0302 \text{ W/m} \cdot °\text{C} \qquad c_p^* = 1.009 \text{ kJ/kg} \cdot °\text{C}$$

TRANSFERENCIA DE CALOR LAMINAR

Suponemos

$$\text{Re}^*_{crit} = 5 \times 10^5 = \frac{\rho^* u_\infty x_c}{\mu^*}$$

$$x_c = \frac{(5 \times 10^5)(2.07 \times 10^{-5})}{(0.0508)(918)} = 0.222 \text{ m}$$

$$\overline{\text{Nu}}^* = \frac{\bar{h} x_c}{k^*} = 0.664 (\text{Re}^*_{crit})^{1/2} \text{Pr}^{*1/3}$$

$$= (0.664)(5 \times 10^5)^{1/2}(0.697)^{1/3} = 416.3$$

$$\bar{h} = \frac{(416.3X0.03)}{0.222} = 56.26 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \quad [9.91 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot °\text{F}]$$

Este es el coeficiente de transferencia de calor promedio para la porción laminar de la capa límite, y la transferencia de calor se calcula a partir de

$$q = \bar{h} A (T_w - T_{aw})$$
$$= (56.26)(0.222)(35 - 311)$$
$$= -3445 \text{ W} \quad [-11{,}750 \text{ Btu/h}]$$

de modo que se requieren 3445 W de enfriamiento en la región laminar de la placa, por metro de profundidad en la dirección z.

TRANSFERENCIA DE CALOR TURBULENTA

Para determinar la transferencia de calor turbulenta debemos obtener una expresión para el coeficiente local de transferencia de calor a partir de

$$St_x^* \, Pr^{*2/3} = 0.0296 \, Re_x^{*-1/5}$$

y en seguida integrar de $x = 0.222$ m a $x = 0.7$ m para determinar la transferencia de calor total

$$h_x = Pr^{*-2/3} \rho^* u_\infty c_p (0.0296) \left(\frac{\rho^* u_\infty x}{\mu^*} \right)^{-1/5}$$

Insertando los valores numéricos para las propiedades se obtiene

$$h_x = 94.34 x^{-1/5}$$

El coeficiente promedio de transferencia de calor en la región turbulenta se determina a partir de

$$\bar{h} = \frac{\int_{0.222}^{0.7} h_x \, dx}{\int_{0.222}^{0.7} dx} = 111.46 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad [19.6 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

Usando este valor podemos calcular la transferencia de calor en la región turbulenta de la placa plana

$$\begin{aligned} q &= \bar{h} A (T_w - T_{aw}) \\ &= (111.46)(0.7 - 0.222)(35 - 332) \\ &= -15{,}823 \text{ W} \quad [-54{,}006 \text{ Btu/h}] \end{aligned}$$

La cantidad total de enfriamiento que se requiere es la suma de las transferencias de calor para las porciones laminar y turbulenta

$$\text{Enfriamiento total} = 3445 + 15\,823 = 19\,268 \text{ W} \quad [65\,761 \text{ Btu/h}]$$

Estos cálculos suponen profundidad unitaria de 1 m en la dirección z.

Preguntas de Repaso

1. ¿Qué significa una capa límite hidrodinámica?
2. Defina el número de Reynolds. ¿Por qué es importante?
3. ¿Cuál es el mecanismo físico de la acción viscosa?
4. Haga la distinción entre flujo laminar y turbulento en un sentido físico.
5. ¿Cuál es la ecuación de momento para la capa límite laminar en una placa plana?
6. ¿Cómo se define el espesor de capa límite?
7. ¿Cuál es la ecuación de energía para la capa límite laminar en una placa plana? ¿Qué suposiciones están involucradas en la derivación de esta ecuación?
8. ¿Qué significa capa límite térmica?
9. Defina el número de Prandtl. ¿Por qué es importante?
10. Describa el mecanismo físico de la convección. ¿Cómo se relaciona el coeficiente de transferencia de calor por convección con este mecanismo?

11. Describa la relación entre fricción del fluido y transferencia de calor.
12. Defina la temperatura global. ¿Cómo se usa?
13. ¿Cómo se define el coeficiente de transferencia de calor para cálculos de transferencia de calor a alta velocidad?

Problemas

5-l Se diseña una boquilla para expander aire a partir de condiciones de estancamiento de 1.38 MN/m^2 y 200 °C a 0.138 MN/m^2. La rapidez de flujo de masa se diseña a 4.5 kg/s. Suponga que la boquilla se usa en conjunto con una instalación de túnel de viento de expansión, de modo que la boquilla puede descargar bruscamente en un tanque evacuado por completo. ¿Qué temperatura tendrá el aire en el tanque cuando la presión en el tanque es igual a 0.138 MN/m^2? Suponga que el tanque tiene un aislante perfecto y que el aire se comporta como un gas ideal. Suponga que la expansión en la boquilla es isoentrópica.

5-2 Sobre una placa plana, fluye agua a 15 °C y 3 m/s; calcule el flujo de masa a través de la capa límite a una distancia de 5 cm del borde principal de la placa.

5-3 Sobre una placa plana, fluye aire a 90 °C, 1 atm y con una velocidad de 30 m/s. ¿Qué espesor tiene la capa límite a una distancia de 2.5 cm del borde principal de la placa?

5-4 Usando un perfil de velocidad lineal

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta}$$

para un flujo sobre una placa plana, obtenga una expresión para el espesor de la capa límite en función de x.

5-5 Usando la relación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

junto con la distribución de velocidad

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

y la expresión para el espesor de capa límite

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

derive una expresión para la componente y de la velocidad v en función de x y y. Calcule el valor de v en el borde externo de la capa límite a distancias de 6 y 12 plg del borde principal para las condiciones del Ej. 5-3.

5-6 Repita el Prob. 5-5 para el perfil de velocidad lineal del Prob. 5-4.

5-7 Sobre una placa plana fluye aire a una velocidad constante de 30 m/s y las condiciones ambientales de 20 kN/m^2 y 20 °C. La placa se calienta a una temperatura constante de 65 °C, co-

menzando a una distancia de 7.5 cm del borde principal. ¿Cuál es la transferencia de calor total a partir del borde principal hasta un punto de 30 cm del borde?

5-8 Usando el perfil de velocidad lineal en el Prob. 5-4 y una distribución de temperatura de parábola cúbica [(Ec. 5-30)] obtenga una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en función del número de Reynolds, para una capa límite laminar en una placa plana.

5-9 Entra aire a 20 kN/m^2 y 5 °C a un tubo de 2.5 cm de diámetro, a una velocidad de 1.5 m/s. Usando el análisis de placa plana, estime la distancia a partir de la entrada a la cual el flujo se desarrolla por completo.

5-10 Un fluido fluye entre dos placas grandes paralelas. Desarrolle una expresión para la distribución de velocidad, en función de la distancia de la línea central entre las dos placas bajo condiciones de flujo desarrolladas.

5-11 Fluye agua a 15 °C entre dos placas planas grandes a una velocidad de 1.5 m/s. Las placas están separadas por una distancia de 15 mm. Estime la distancia del borde principal hasta donde el flujo se desarrolla por completo.

5-12 Sobre una placa plana, fluye aire en condiciones estándar de 1 atm y 20 °C, a una velocidad de 30 m/s. La placa tiene 60 cm por lado y se mantiene a 90 °C. Calcule la transferencia de calor de la placa.

5-13 El aire a 20 °C y 14 kN/m^2, fluye a una velocidad de 150 m/s sobre una placa plana de 1 m de largo, la cual se mantiene a una temperatura constante de 150 °C. ¿Cuál es la rapidez promedio de transferencia de calor por unidad de área de la placa?

5-14 El aire a 7 kN/m^2 y 35 °C fluye a través de una placa plana de 30 cm por lado a 7.5 m/s. La placa se mantiene a 65 °C. Estime la pérdida de calor de la placa.

5-15 El aire a 90 °C y presión atmosférica fluye sobre una placa plana horizontal a 60 m/s. La placa tiene 60 cm por lado y se mantiene a una temperatura uniforme de 10 °C. ¿Cuál es la transferencia de calor total?

5-16 Bosqueje el coeficiente de transferencia de calor contra la longitud para flujo sobre una placa plana de 1 m de largo, bajo las siguientes condiciones: (a) helio a 1 lb/plg^2 abs, 80 °F, u_∞ = 10 pie/s [3.048 m/s], (b) hidrógeno a 1 lb/plg^2 abs, 80 °F, u_∞ = 10 pies/s; (c) aire a 1 lb/plg^2 abs, 80 °F y u_∞ = 10 pies/s; (d) agua a 80 °F, u_∞ = 10 pies/s; (e) helio a 20 lb/plg^2 abs, 80 °F, u_∞ = 10 pies/s.

5-17 Calcule la fuerza de arrastre que ejerce sobre la placa cada uno de los sistemas en el Prob. 5-16.

518 Sobre una placa plana de 30 cm por lado, fluye glicerina a 30 °C y una velocidad de 1.5 m/s. La fuerza de arrastre se determina y resulta 8.9 N (en ambos lados de la placa). Calcule el coeficiente de transferencia de calor para este sistema de flujo.

5-19 Usando la distribución de velocidad para flujo laminar desarrollado en un tubo, derive una expresión para el factor de fricción tal como se define en la Ec. 5-111.

5-20 El flujo "lento" en un tubo puede describirse como el flujo en el que la velocidad es constante a través de toda el área de flujo del tubo. Obtenga una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en este tipo de flujo, con una condición de flujo de calor constante mantenido en la pared. Compare los resultados con los de la Sec. 5-10. Explique la razón para la diferencia en respuetas sobre una base física.

5-21 **Suponga** que la distribución de velocidad en el núcleo turbulento para flujo en tubos puede representarse por

$$\frac{u}{u_c} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{1/7}$$

donde u_c es la velocidad en el centro del tubo y r_0 es el radio del tubo. Puede suponerse que la velocidad en la subcapa laminar varía linealmente con el radio. Usando el factor de fricción expresado por la Ec. 5-114, derive una ecuación para el espesor de la subcapa laminar. Para este problema, la velocidad promedio de flujo puede calcularse usando solamente la distribución de velocidad turbulenta.

5-22 Usando el perfil de velocidad en el Prob. 5-21, obtenga una expresión para la difusividad turbulenta de momento en función del radio.

5-23 En aplicaciones a cambiadores de calor, con frecuencia es importante llenar requisitos de transferencia de calor con limitaciones en caída de presión. Suponiendo un requerimiento de transferencia de calor total fija y una diferencia de temperatura fija entre las condiciones de pared y globales, así como una caída de presión fija a través del tubo, derive expresiones para la longitud y el diámetro del tubo, suponiendo flujo turbulento de un gas con el número de Prandtl cercano a la unidad.

5-24 El aire a 50 °C y 70 kN/m² fluye a través de una tubería de 5 cm de diámetro a una velocidad de 3.6 m/s. Estime el coeficiente de transferencia de calor para este sistema de flujo. Suponga flujo desarrollado por completo y use la Ec. 6-4.

5-25 El aire a Mach 4 y 3 lb/plg² abs, 0 °F, fluye sobre una placa plana. La placa se mantiene a temperatura constante de 200 °F. Si la placa tiene 18 plg de largo, {cuánto enfriamiento se requerirá para mantener esta temperatura?

5-26 El aire fluye sobre una placa plana isotérmica que se mantiene a la temperatura constante de 65 °C. La velocidad del aire es 600 m/s a las propiedades estáticas de 15 °C y 7 kN/m². Calcule el coeficiente promedio de transferencia de calor para una placa de 1 m de largo.

5-27 Calcule la transferencia de calor de una placa de 30 cm por lado sobre la cual fluye aire a 35 "C-y 14 kN/m². La temperatura de la placa es de 250 °C, y la velocidad de corriente libre es 6 m/s.

5-28 Calcule la fuerza de arrastre (fricción viscosa) sobre la placa del Prob. 5-27 bajo condiciones sin transferencia de calor. No use la analogía entre fricción del fluido y transferencia de calor para este cálculo, es decir, calcule el arrastre directamente evaluando el esfuerzo cortante viscoso en la pared.

629 El agua fluye en una tubería de 2.5 cm de diámetro, de modo que el número de Reynolds basado en el diámetro es 1500 (se supone flujo laminar). La temperatura global promedio es de 35 "C. Calcule la velocidad máxima del agua en el tubo. (Recuerde que $u_m = 0.5\ u_0$) ¿Cuál sería el coeficiente de transferencia de calor para tal sistema si la pared del tubo estuviera sujeta a un flujo de calor constante, y los perfiles de velocidad y temperatura estuvieran desarrollados por completo? Evalúe las propiedades a la temperatura global.

5-30 Se encuentra un flujo lento en un sistema de flujo anular, que esta sujeto a un flujo de calor constante tanto en la superficie interna como la externa. La temperatura es la misma tanto en la superficie interna como externa en localidades idénticas x. Derive una expresión para la distribución de temperatura en este sistema de flujo, suponiendo propiedades constantes y flujo laminar.

531 Usando la ecuación de energía expresada por la Ec. 5-32. determine una expresión para el coeficiente de transferencia de calor bajo las condiciones

$$u = u_x = \text{constante}\ \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{y}{\delta_t}$$

donde δ_t es el espesor de capa límite térmica.

5-32 El aire a 7 kN/m^2 y -40 °C fluye sobre una placa plana a Mach 4. La temperatura de la placa es 35 °C y su longitud es 60 cm. Calcule la temperatura de pared adiabática para la porción laminar de la capa límite.

5-33 Derive una expresión para la transferencia de calor en una capa límite laminar en una placa plana bajo la condición $u = u_\infty$ = constante. Suponga que la distribución de temperatura está expresada por la relación de parábola cúbica en la Ec. 5-30. Esta solución aproxima la condición observada en el flujo de un metal líquido sobre una placa plana.

5-34 El aire a 20 kN/m^2 y 20 °C fluye a través de una placa plana de 60 cm de largo. La velocidad de corriente libre es 30 m/s, y la placa se calienta sobre su longitud total a una temperatura de 56 °C. Para $x = 30$ cm calcule el valor de y para el que u será igual a 22.5 m/s.

5-35 Para el sistema de flujo en el Prob. 5-34 calcule el valor del coeficiente de fricción a una distancia de 15 cm del borde principal.

5-36 El aire a 5 °C y 70 kN/m^2 fluye sobre una placa plana a 6 m/s. Se coloca una franja calefactora de 2.5 cm de largo sobre la placa, a una distancia de 15 cm del borde principal. Calcule el calor perdido por la franja por unidad de profundidad de la placa, para una temperatura de superficie de calefactor de 65 °C.

5-37 Demuestre que $\partial^3 u/\partial y^3 = 0$ en $y = 0$ para una capa límite laminar incompresible en una placa plana con gradiente de presión cero.

5-38 Revise los desarrollos analíticos de este capítulo y enliste las restricciones que se aplican a las siguientes Ecs. 5-25, 5-26, 5-44, 5-46, 5-85 y 5-106.

5-39 Derive ecuaciones equivalentes a la Ec. 5-85 para números de Reynolds críticos de 3×10^5, 10^6 y 3×10^6.

5-40 El helio a 1 atm y 30 °C se usa para enfriar una placa de 1 m por lado que se mantiene a 250 °C. La velocidad de flujo es 50 m/s. Calcule la pérdida de calor total de la placa. ¿Cuál es el espesor de capa límite cuando el flujo deja la placa?

5-41 Para el sistema de flujo del Prob. 5-40 calcule la posición y en la capa límite en el borde de salida en donde $u = 25$ m/s.

5-42 Se diseñará un túnel de aire a baja velocidad para estudiar las capas límite hasta $Re_x = 10^7$ con aire a 1 atm y 25 °C. La velocidad de flujo máxima que se puede esperar de un sistema de ventilador existente es de 100 pies/s. ¿Qué longitud deberá tener la sección de prueba de placa plana para obtener los números de Reynolds requeridos? ¿Cuál será el espesor máximo de capa límite bajo estas condiciones? ¿Cuál será el espesor máximo de capa límite para velocidades de flujo de 25 y 50 pies/s?

5-43 Durante el verano sopla una brisa ligera a 10 mi/h sobre una construcción metálica. La altura de la pared de la construcción es 12 pies, y su ancho es 20 pies. Un flujo neto de energía solar de 100 $Btu/h \cdot pie^2$ se absorbe por la pared y subsecuentemente se disipa hacia el aire que la rodea, por convección. Suponiendo que el aire se encuentra a 80 °F, a 1 atm y que sopla sobre la pared como ocurriría sobre una placa plana, estime la temperatura promedio que alcanzará la pared en condiciones de equilibrio.

5-44 El fondo de una freidora de papas es de 10 pies de largo por 3 pies de ancho y se le mantiene a 420 °F de temperatura. El aceite fluye en esta superficie a una velocidad de 1 pie/s y tiene una temperatura de corriente libre de 400 °F. Calcule la transferencia de calor hacia el aceite y estime el espesor máximo de capa límite. Las propiedades del aceite pueden tomarse como $\nu = 2 \times 10^{-6}$ m²/s, $k = 0.12$ W/m·°C y Pr = 40.

5-45 Utilizando el coeficiente de fricción promedio expresado por la Ec. 5-79 y un análisis numérico adecuado, obtenga una relación equivalente a las Ecs. 5-84 y 5-85 para los números de Reynolds hasta 10^9.

5-46 Suponiendo que el coeficiente de transferencia de calor local para el flujo sobre una placa plana puede representarse por la Ec. 5-81 y que la capa frontera comienza en el borde principal de la placa, determine una expresión para el coeficiente de transferencia de calor promedio.

5-47 Se hace soplar nitrógeno a 1 atm y 20 °C sobre una placa plana de 130 cm por lado y a una velocidad de 3.0 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 100 °C. Calcule el coeficiente de fricción promedio y la transferencia de calor de la placa.

5-48 Sobre una placa plana de 4.0 m por lado, sopla aire a 27 °C, 1 atm y a una velocidad de 40 m/s. La temperatura de la placa es de 70 °C. Calcule la transferencia de calor total.

5-49 Sobre una placa de 15 cm por lado sobre la que se impone un flujo constante de 10 kW/m², fluye aceite automotriz a 20 °C. Determine (a) la diferencia de temperatura promedio, (b) la diferencia de temperatura en el borde de salida, y (c) el coeficiente de transferencia de calor promedio. Utilice la relación de Churchill Ec. 5-51.

5-50 Resuelva el Prob. 5-49 para una placa con temperatura de superficie constante igual a la del borde de salida y determine la transferencia de calor total.

5-51 El techo de un edificio tiene 30 por 60 m y debido al calor que recibe del Sol alcanza una temperatura de 20 °C, cuando la temperatura del aire es de 0 °C. Calcule el calor perdido por el techo cuando sopla sobre él un viento ligero a 5 mi/h. ($L = 30$ m).

5-52 Sobre una amplia superficie de concreto de 15 m de ancho y que se mantiene a 55 °C, sopla aire a 1 atm y a 27 °C. La velocidad de flujo es 4.5 m/s. Calcule el calor perdido por convección en esta superficie.

Referencias

1 Schlichting, H.: "Boundary Layer Theory," 7th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

2 von Kármán, T.: über laminaire und turbulente Reibung, *Angew. Math. Mech.*, vol. 1. pp. 233-252, 1921; also *NACA Tech. Mem.* 1092, 1946.

3 Sellara, J. R., M. Tribus, and J. S. Klein: Heat Transfer to Laminar Flows in a Round Tube or Flat Conduit: The Graetz Problem Extended, *Trans. ASME*, *vol. 78,* p. 441, 1956.

4 Eckert, E. R. G.: Survey of Boundary Layer Heat Transfer at High Velocities and High Temperatures, *WADC Tech. Rep.* 59-624, April 1960.

5 White, F. M.: "Viscous Fluid Flow," McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

6 Knudsen, J. D., and D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer." McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

7 Holman, J. P.: "Thermodynamics," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

8 Sehultz-Grunow, F.: Neues Widerstandsgesetz für glatte Platten. *Luftfahrtforschung*, vol. 17, p. 239, 1940; also *NACA Tech. Mem. '986,* 1941.

9 Churchill, S. W., and H. Ozoe: Correlations for Laminar Forced Convectión in Flow over an Isothermal Flat Plate and in Developing and Fully Developed Flow in an Isothermal Tube, *J. Heat Transfer,* vol. 95, p. 78, 1973.

10 Whitaker, S.: Forced Convection Heat Transfer Correlation for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and for Flow in Packed Beds and Tube Bundles, *AIChE J.* vol. 18, p. 361, 1972.

11 Churchill, S. W.: A Comprehensive Correlating Equation for Forced Convection from Flat Plates, *AIChE J.* vol. 22, p. 264, 1976.

6
Relaciones Empíricas y Prácticas para Transferencia de Calor por Convección Forzada

6-I Introducción

La exposición y los análisis del Cap. 5 han mostrado cómo se puede calcular la transferencia de calor por convección forzada para diversos casos de interés práctico; sin embargo, los problemas considerados fueron aquellos que podían resolverse de manera analítica. De este modo, se demostraron los principios del proceso de convección y su relación con la dinámica de fluidos, haciendo énfasis en la comprensión clara del mecanismo físico. Por desgracia, no siempre es posible obtener soluciones analíticas para problemas de convección, y la persona se ve forzada a recurrir a métodos experimentales para obtener información para el diseño, así como para garantizar los datos más evasivos que aumenten la comprensión física de los procesos de transferencia de calor.

Los resultados de datos experimentales se expresan casi siempre en forma de fórmulas empíricas o gráficas, de manera que puedan utilizarse con un máximo de carácter general. Es en este proceso que se intentan generalizar los resultados de nuestros propios experimentos en la forma de alguna correlación empírica, donde se encuentran las dificultades. Si existe una solución analítica para un problema similar, la correlación de datos es mucho más fácil, ya que podemos suponer la forma funcional de los resultados, y en consecuencia, utilizar los datos experimentales para obtener valores de constantes o exponentes de algunos parámetros significativos, tales como los números de Reynolds o de Prandtl. Si no existe una solución analítica para un problema similar, la persona deberá recurrir a la intuición, basándose en la comprensión física del problema o a deducciones perspicaces, que tal vez pueda inferir de las ecuaciones diferenciales de los procesos de flujo basadas en estimadas dimensionales o de orden de magnitud. De cualquier modo, para la comprensión y el discernimiento físico del problema no hay sustituto.

A fin de mostrar cómo podemos proceder en el análisis de un nuevo problema para obtener una relación funcional importante de las ecuaciones diferenciales, considérese el problema de la determinación del espesor de la capa límite hidrodinámica para flu-

jo sobre una placa plana. En el Cap. 5 resolvimos este problema, pero ahora deseamos realizar un análisis de orden de magnitud de las ecuaciones diferenciales, para obtener la forma funcional de la solución. La ecuación de momento

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

debe resolverse conjuntamente con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Dentro de la capa límite podemos decir que la velocidad u es del orden de la velocidad de corriente libre u_∞. De manera semejante, la dimensión y es del orden del espesor δ de la capa límite. Así

$$u - u_\infty$$
$$y \sim \delta$$

y podríamos escribir la ecuación de continuidad en una forma aproximada como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \approx 0$$

0

$$v \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$$

En seguida, utilizando este orden de magnitud para v, el análisis de la ecuación de momento dará:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_\infty\frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x}\frac{u_\infty}{\delta} \approx \nu\frac{u_\infty}{\delta^2}$$

0

$$\delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

Dividiendo entre x para expresar el resultado en una forma adimensional nos da

$$\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Esta variación funcional del espesor de la capa límite con el número de Reynolds y la posición x es exactamente la que se obtuvo en la Sec. 5-4. Aunque este análisis es bastante directo y de hecho nos proporciona resultados correctos, el análisis de orden de magnitud no siempre proporciona tan buenos resultados cuando se le aplica a problemas más complejos, en especial aquellos que involucran regiones turbulentas o de flujo separado. No obstante, con frecuencia podremos obtener información valiosa y conocimiento físico examinando el orden de magnitud de diversos términos en una ecuación diferencial predominante para el problema particular a resolver.

Una técnica convencional que se usa en la correlación de datos experimentales es el análisis dimensional, en el que se deducen grupos adimensionales adecuados, tales como los números de Reynolds y Prandtl, a partir de consideraciones exclusivamente dimensionales y funcionales. Por supuesto, existe la suposición de similitud de campo de flujo y perfil de temperatura, para superficies de calentamiento geométricamente similares. En general, la aplicación del análisis dimensional a cualquier problema nuevo es difícil en extremo cuando no existe algún otro tipo de solución analítica previa. Casi siempre es mejor ensayar un análisis de orden de magnitud tal como el que acabamos de ver, si se conocen las ecuaciones diferenciales predominantes. De esta manera, puede ser posible determinar las variables adimensionales significativas para correlacionar datos experimentales. En algunos problemas complejos de flujo y transferencia de calor tal vez no se disponga de un modelo físico claro de los procesos, y el ingeniero debe tratar de establecer este modelo, antes que puedan correlacionarse los datos experimentales.

Schlichting [6], Giedt [7] y Kline [22] tratan consideraciones semejantes y su uso en problemas de capa límite y transferencia de calor.

El objetivo del estudio anterior no ha sido enfatizar o siquiera indicar un nuevo método para resolver problemas, sino más bien señalar la necesidad de aplicar un razonamiento físico intuitivo a un problema difícil y hacer notar la ventaja obvia que representa utilizar cualquier y toda información que exista. Cuando se presenta el problema de correlación de datos experimentales para una situación sin resolución previa, con frecuencia se deben adoptar métodos tortuosos para realizar la tarea.

6-2 Relaciones empíricas para flujo en tubería y conductos

El análisis de la Sec. 5-10 ha mostrado cómo podríamos atacar analíticamente el problema de transferencia de calor en un tubo *con* flujo laminar por completo desarrollado. Los casos de flujo laminar no desarrollado, sistemas de flujo en donde las propiedades del flujo varían ampliamente con la temperatura y sistemas de flujo turbulento son mucho más complicados, pero son de un gran interés práctico en el diseño de cambiadores de calor y equipo similar de transferencia de calor. Estos problemas más complicados pueden resolverse algunas veces en forma analítica, pero las soluciones, cuando son posibles, son muy fastidiosas. Para propósitos de diseño e ingeniería las correlaciones empíricas son casi siempre de enorme utilidad práctica. En esta sección presentamos algunas de las relaciones y mostramos sus limitaciones.

Primero consideremos un poco más el concepto de temperatura global, importante en todos los problemas de transferencia de calor que involucran flujo en el interior de

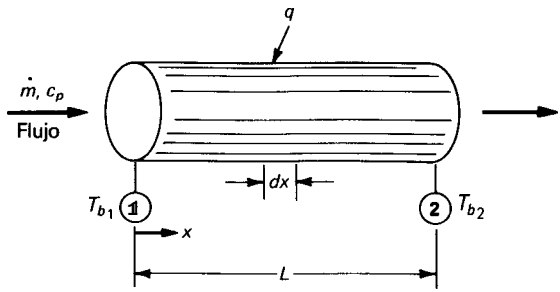


Fig. 6-l Transferencia de calor total en términos de diferencia global de temperatura.

canales cerrados. En el Cap. 5 observamos que la temperatura global representa promedio de energía o condiciones de "taza mezcladora". Por tanto, para el flujo en tubo que se muestra en la Fig. 6-1, la energía total adicionada puede expresarse en términos de la diferencia global de temperatura por

$$q = \dot{m}c_p(T_{b_2} - T_{b_1}) \tag{6-1}$$

siempre y cuando c_p sea razonablemente constante a través de la longitud. En cierta longitud diferencial dx el calor adicionado dq puede expresarse ya sea en términos de una diferencia global de temperatura o en términos del coeficiente de transferencia de calor.

$$dq = \dot{m}c_p dT_b = h(2\pi r)\,dx\,(T_w - T_b) \tag{6-2}$$

en donde T_w y T_b son las temperaturas de pared y global en el lugar particular x. Las transferencia de calor total también puede expresarse como

$$q = hA(T_w - T_b)_{\text{av}} \tag{6-3}$$

en donde A es el área total de superficie para transferencia de calor. Debido a que tanto T_w como T_b pueden variar a lo largo de la longitud del tubo, se deberá adoptar un proceso de promedio adecuado para utilizarse con la Ec. 6-3. En este capítulo enfocaremos nuestra atención sobre todo en los métodos para determinar h, el coeficiente de transferencia de calor por convección. El Cap. 10 versará sobre los diferentes métodos para tomar en cuenta, en forma adecuada, las variaciones de temperatura en los cambiadores de calor.

Para tubos pulidos con flujo turbulento completamente desarrollado, Dittus y Boelter [1] recomiendan la siguiente relación:

$$\text{Nu}_d = 0.023\ \text{Re}_d^{0.8}\ \text{Pr}^n \tag{6-4}$$

En esta ecuación las propiedades se evalúan a la temperatura global del fluido y el exponente n tiene los siguientes valores:

$$n = \begin{cases} 0.4 & \text{para calentamiento} \\ 0.3 & \text{para enfriamiento} \end{cases}$$

Podríamos preguntar la razón para la forma funcional de la Ec. 6-4. La experiencia física, basada en la experiencia adquirida con los análisis del Cap. 5, nos indicarían sin lugar a dudas una dependencia del proceso de transferencia de calor con el campo de flujo y por consiguiente, con el número de Reynolds. Las rapideces relativas de difusión de calor y momento están relacionadas por el número de Prandtl, de manera que se espera que este número sea un parámetro significativo en la solución final. Podemos confiar bastante de la dependencia de la transferencia de calor con los números de Reynolds y Prandtl. Pero surge la pregunta sobre la forma funcional correcta de la relación; es decir, ¿hay que esperar necesariamente un producto de dos funciones exponenciales de los números de Reynolds y de Prandtl? La respuesta es que podríamos esperar esta forma funcional ya que aparece en las soluciones analíticas para la placa plana del Cap. 5, así como en la analogía de Reynolds para flujo turbulento. Además, es conveniente el uso de este tipo de relación funcional en la correlación de datos experimentales, tal como se describe más adelante.

Supóngase que se realizan algunos experimentos en los que las mediciones han sido tomadas de rapideces de transferencia de calor para diversos fluidos en flujo turbulento en el interior de tubos lisos, bajo diferentes condiciones de temperatura. Para hacer variar el intervalo de los números de Reynolds se pueden utilizar tubos de diferentes diámetros, además de las variaciones en la rapidez de flujo de masa. Deseamos generalizar los resultados de estos experimentos para llegar a una ecuación empírica que represente todos los datos. Como lo describimos antes, podemos anticipar que los datos sobre transferencia de calor dependerán de los números de Reynolds y Prandtl. Tal vez la relación más simple que podemos usar sea una función exponencial para cada uno de estos parámetros, de modo que suponemos

$$\mathrm{Nu}_d = C\ \mathrm{Re}_d^m\ \mathrm{Pr}^n$$

en donde C, m y n son constantes que habrán de determinarse a partir de datos experimentales.

Se hace primero una gráfica log-log de Nu_d contra Re_d para un fluido, para estimar la dependencia de la transferencia de calor sobre el número de Reynolds, es decir, para encontrar un valor aproximado del exponente m. Esta gráfica se hace para un fluido a temperatura constante, de manera que la influencia del número de Prandtl sea pequeña, ya que el número de Prandtl será aproximadamente constante para este fluido. Utilizando este primer estimado para el exponente *m*, se grafican los datos para todos los fluidos como log $(\mathrm{Nu}_d/\mathrm{Re}_d^m)$ contra log Pr y se determina un valor para el exponente *n*. En seguida, utilizando este valor de *n, se* grafican de nuevo todos los datos como log $(\mathrm{Nu}_d/\mathrm{Pr}^n)$ contra log Re,,, y se determina un valor final para el exponente m así como también un valor para la constante C. En la Fig. 6-2 mostramos un ejemplo de este tipo final de gráfica de datos. La ecuación final de correlación casi siempre representa los datos dentro de un margen de $\pm 25\%$.

La Ec. 6-4 es válida para el flujo turbulento completamente desarrollado dentro de tubos lisos, para fluidos con números de Prandtl comprendidos entre 0.6 y 100, y diferencias moderadas de temperatura entre la pared y las condiciones del fluido.

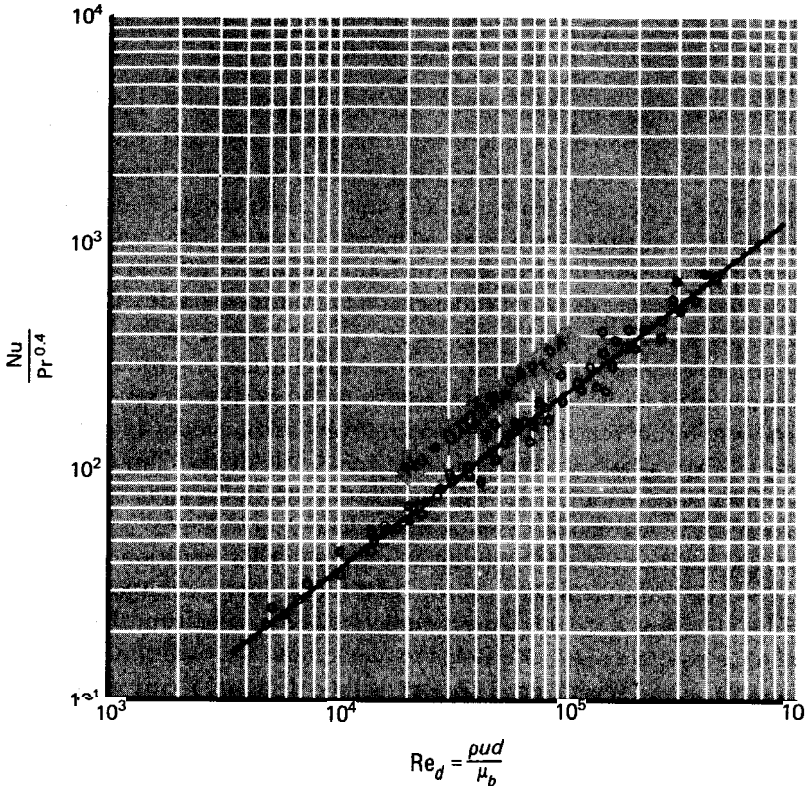


Fig. 6-2 Correlación típica de datos para convección forzada en tubos lisos, con flujo turbulento.

Si en el flujo se encuentran presentes diferencias grandes de temperatura, puede haber un cambio apreciable en las propiedades del fluido que se encuentra entre la pared del tubo y el flujo central. Estas variaciones en las propiedades pueden manifestarse por un cambio en el perfil de velocidad, como se indica en la Fig. 6-3. Las desviaciones del perfil de velocidad para el flujo isotérmico, como el que se muestra en esta figura, con un resultado del hecho de que la viscosidad de los gases aumenta con un aumento en la temperatura, mientras que la viscosidad de los líquidos disminuye con un incremento en temperatura.

Para tomar en cuenta las variaciones en las propiedades, Sieder y Tate [2] recomiendan la siguiente relación:

$$Nu_d = 0.027\ Re_d^{0.8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{6-5}$$

Todas las propiedades se evalúan en condiciones de temperatura global, a excepción de μ_ω que se evalúan a la temperatura de la pared.

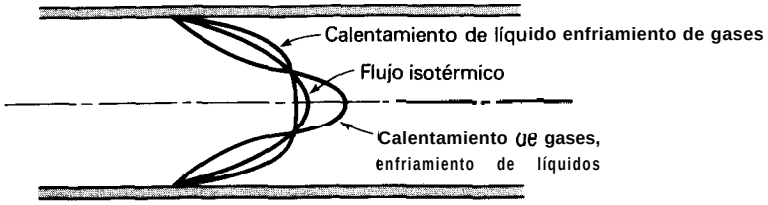


Fig. 6-3 Influencia del calentamiento sobre el perfil de velocidad en un tubo con flujo laminar.

Las Ecs. 6-4 y 6-5 se aplican a flujos turbulentos completamente desarrollados en tubos. En la región de entrada el flujo no está-por completo desarrollado y Nusselt [3] recomienda la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Nu}_d = 0.036\,\mathrm{Re}_d^{0.8}\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{0.055} \qquad \text{para } 10 < \frac{L}{d} < 400 \tag{6-6}$$

en donde L es la longitud del tubo y d su diámetro. Las propiedades en la Ec. 6-6 se evalúan a la temperatura global media. Hartnett [24] ha proporcionado datos experimentales en la región térmica de entrada para agua y aceites. Allen y Eckert [25] nos presentan estudios definitivos de transferencia turbulenta con agua en tubos lisos y con un flujo de calor uniforme.

Las ecuaciones anteriores ofrecen un cálculo sencillo, pero no son excepcionales errores de $\pm 25\%$. Petukhov [42] ha desarrollado una expresión más exacta aunque más complicada, para el flujo turbulento completamente desarrollado en tubos lisos:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{(f/8)\,\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}}{1.07 + 12.7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}\left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^n \tag{6-7}$$

en donde $n = 0.11$ para $T_w > T_b$, $n = 0.25$ para $T_w < T_b$ y $n = 0$ para flujo de calor constante o para gases. Todas las propiedades se evalúan en $T_f = (T_w + T_b)/2$ a excepción de μ_b y μ_w. El factor de fricción puede obtenerse de la Fig. 6-4, o bien, para tubos lisos de lo siguiente:

$$f = (1.82\ \log_{10}\mathrm{Re}_d - 1.64)^{-2} \tag{6-8}$$

La Ec. 6-7 se puede aplicar en los siguientes intervalos:

$0.5 < \mathrm{Pr} < 200$ para 6% de precisión

$200 < \mathrm{Pr} < 2000$ para 10% de precisión

$10^4 < \mathrm{Re}_d < 5 \times 10^6$

$0 < \mu_b/\mu_w < 40$

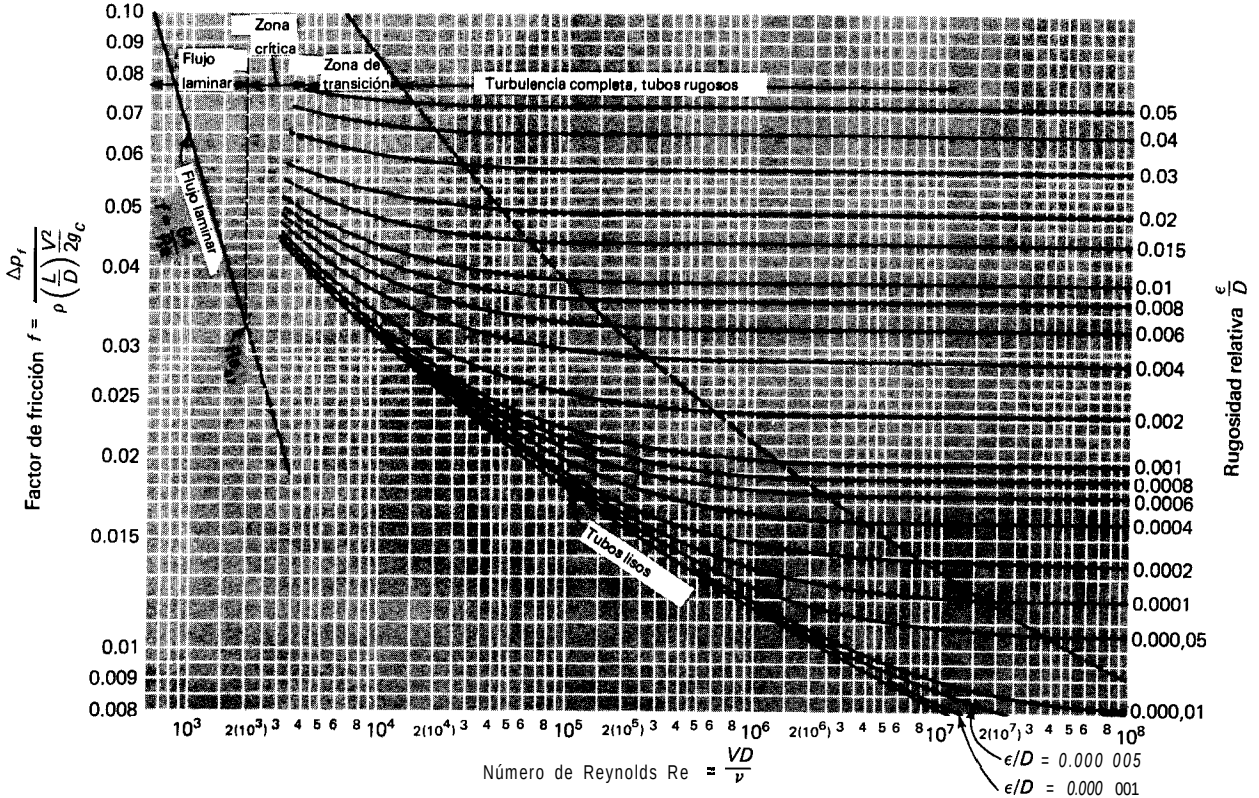


Fig. 6-4 Factores de fricción para **tuberías,** de la Ref. 5.

Hausen [4] presenta la siguiente relación empírica para flujo laminar completamente desarrollada en tubos con temperatura de pared constante:

$$\mathrm{Nu}_d = 3.66 + \frac{0.0668(d/L)\ \mathrm{Re}_d\ \mathrm{Pr}}{1 + 0.04[(d/L)\ \mathrm{Re}_d\ \mathrm{Pr}]^{2/3}} \tag{6-9}$$

El coeficiente de transferencia de calor que se calcula de esta relación, es el valor promedio sobre la longitud total de tubo. Obsérvese que el número de Nusselt se acerca a un valor constante de 3.66 cuando el tubo tiene la longitud suficiente. Esta situación es similar a la que se encuentra en el problema de flujo de calor constante que se analizó en el Cap. 5 (Ec. 5-106), con la excepción de que en este caso tenemos una temperatura de pared constante, en lugar de una variación lineal con la longitud. El perfil de la temperatura se encuentra totalmente desarrollado cuando el número de Nusselt se cerca a un valor constante.

Sieder y Tate [2] propusieron una relación empírica un poco más sencilla para transferencia de calor laminar en tubos:

$$\mathrm{Nu}_d = 1.86(\mathrm{Re}_d\ \mathrm{Pr})^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \tag{6-10}$$

En esta fórmula el coeficiente promedio de transferencia de calor está basado en el promedio aritmético de las diferencias de temperatura de entrada y salida, y se evalúan todas las propiedades del fluido a su temperatura global media con excepción de μ_w, que se evalúan a la temperatura de la pared. Es obvio que no puede usarse la Ec. 6-10 para tubos extremadamente largos, ya que nos daría un coeficiente de transferencia de calor cero. Una comparación de la Ec. 6-10 con otras relaciones hecha por Knudsen y Katz [9, Pág. 377], nos indica que la ecuación es válida para

$$\mathrm{Re}_d\ \mathrm{Pr}\frac{d}{L} > 10^8$$

Al producto de los números de Reynolds y Prandtl que ocurren en las correlaciones de flujo laminar se le llama número de Peclet:

$$\mathrm{Pe} = \frac{du\rho c_p}{k} = \mathrm{Re}_d\ \mathrm{Pr} \tag{6-11}$$

El cálculo de los coeficientes de transferencia de calor laminar con frecuencia se ve complicado por la presencia de efectos de convección natural que se sobreponen a los efectos de convección forzada. En el Cap. 7 se tratan los problemas de convección forzada y libre combinadas.

Las correlaciones que acabamos de presentar, exceptuando la Ec. 6-7, se aplican a tubos lisos. En general, las correlaciones en las que se tienen tubos rugosos son bastante escasas y para efectuar una solución bajo estas circunstancias, algunas veces es adecuado utilizar la analogía de Reynolds entre fricción y transferencia de calor. Expresado en términos del número de Stanton:

$$\mathrm{St}_b\ \mathrm{Pr}_f^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{6-12}$$

El coeficiente de fricción f se define por:

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2g_c} \tag{6-13}$$

en donde u_m es la velocidad media del flujo. En la Fig. 6-4 se muestran valores del coeficiente de fricción para diferentes condiciones de rugosidad.

Obsérvese que la relación en la Ec. 6-12 es igual a la de la Ec. 5-113 con la excepción de que el número de Stanton ha sido multiplicado por $\mathrm{Pr}^{2/3}$, para tomar en cuenta la variación de las propiedades térmicas de diferentes fluidos. Esta corrección sigue las recomendaciones de Colburn [15], y está basada en el razonamiento de que la fricción del fluido y la transferencia de calor del flujo en el tubo están relacionadas con el número de Prandtl de la misma manera en que están relacionadas en el flujo en placas planas (Ec. 5-56). En la Ec. 6-12 el número de Stanton está basado en la temperatura global, mientras que el número de Prandtl y el factor de fricción están basados en propiedades evaluadas a la temperatura de la película. En las Refs. 27, 29, 30, 31 se da más información sobre los efectos de la rugosidad del tubo sobre la transferencia de calor.

Si el canal a través del cual fluye el fluido no tiene una sección transversal circular, se recomienda que las correlaciones de transferencia de calor se basen en el diámetro hidráulico D_H, definido por

$$D_H = \frac{4A}{P} \tag{6-14}$$

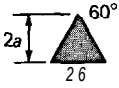
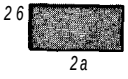
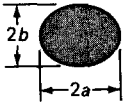
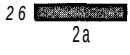
en donde A es el área de sección transversal del flujo y P el perímetro mojado. Se utiliza esta agrupación particular de términos porque cuando se le aplica a una sección transversal circular nos da el valor del diámetro físico. Se deberá utilizar el diámetro hidráulico para calcular los números de Nusselt y Reynolds, y para establecer el coeficiente de fricción para su uso con la analogía de Reynolds.

A pesar de que el concepto de diámetro hidráulico con frecuencia nos proporciona relaciones satisfactorias para la fricción del fluido y transferencia de calor en muchos problemas prácticos, existen algunas excepciones notables en las que el método no funciona. Algunos de los problemas que involucran transferencia de calor en canales no circulares han sido resumidos por Irvine [20], y Knudsen y Katz [9]. Para obtener información adicional, el lector interesado deberá consultar estos tratamientos.

Shah y London [40] han recopilado la información sobre transferencia de calor y fricción de fluidos para flujo laminar completamente desarrollado en conductos con secciones transversales diferentes, tal como se muestra en la Tabla 6-l. En esta tabla se aplica la siguiente nomenclatura:

Nu_{H1} = número de Nusselt promedio para flujo de calor uniforme en dirección del flujo y temperatura de pared uniforme en una sección transversal particular.

Tabla **6-1** **Transferencia de calor y fricción de fluidos para flujo laminar desarrollado en conductos con diversas secciones transversales**

Geometría ($L/D_h > 100$)	Nu_{H1}	Nu_{H2}	Nu_T	f Re
	3.111	1.892	2.47	13.333
	3.608	3.091	2.976	14.227
	4.002	3.862	3.34	15.054
	4.123	3.017	3.391	15.548
	4.364	4.364	3.657	16.000
	5.099	4.35	3.66	18.700
	5.331	2.930	4.439	18.233
	6.490	2.904	5.597	20.585
	8.235	8.235	7.541	24.000
	5.385	—	4.861	24.000

Nu_{H2} = número de Nusselt promedio para flujo de calor uniforme tanto en dirección del flujo como hacia la periferia.

Nu_T = número de Nusselt promedio para temperatura de pared uniforme.

$f\,Re$ = producto del factor de fricción y el número de Reynolds.

Kays [36] y Sellars, Tribus y Klein (Ref. 3, Cap. 5) han calculado los números de Nusselt locales y promedios, para regiones de entrada laminares en tubos circulares, para el caso de un perfil de velocidad totalmente desarrollada. En la Fig. 6-5 se muestran los resultados de estos análisis, en términos del número inverso de Graetz, en donde

$$\text{Número de Graetz} = Gz = Re\,Pr\,\frac{d}{x} \tag{6-15}$$

Los efectos de entrada para flujo turbulento en tubos, son más complicados que para flujo laminar y no pueden expresarse en términos de una función sencilla del número de Graetz. Kays [36] ha calculado la influencia para diversos valores de Re y Pr

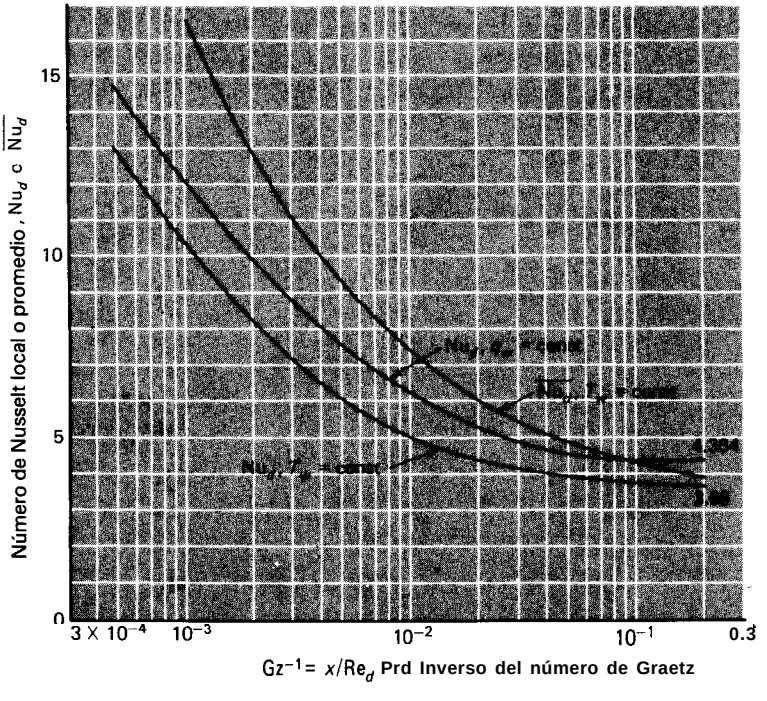


Fig. 6-5 Números de Nusselt local y promedio para regiones de entrada térmica en tubo circular, con flujo laminar totalmente desarrollado.

con los resultados condensados en la Fig. 6-6. La ordenada es la razón del número de Nusselt local al número de Nusselt muy lejos de la entrada, o para condiciones térmicas totalmente desarrolladas. En general, cuanto mayor sea el número de Prandtl, más corta será la longitud de entrada. Podemos ver que las longitudes de entrada térmica son más cortas para el flujo turbulento que para su contraparte laminar.

Ejemplo 6-1

Aire a 2 atm y 200 °C se calienta a medida que fluye a través de un tubo de 1 plg (2.54 cm) de diámetro a una velocidad de 10 m/s. Calcule la transferencia de calor por unidad de longitud del tubo si se mantiene una condición de flujo de calor constante en la pared, y la temperatura de la pared es 20 °C mayor que la temperatura del aire a todo lo largo del tubo. (Cuánto aumentará la temperatura global en una longitud de 3 m del tubo?

Solución

Primero calculamos el número de Reynolds para determinar si el flujo es laminar o turbulento, y seleccionar entonces la correlación empírica adecuada para el cálculo de la transferencia de calor. Las propiedades del aire a una temperatura global de 200 °C son

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(2)(1.0132 \times 10^5)}{(287)(473)} = 1.493 \text{ kg/m}^3 \text{ LO.0932 lb}_m/\text{pie}^3]$$

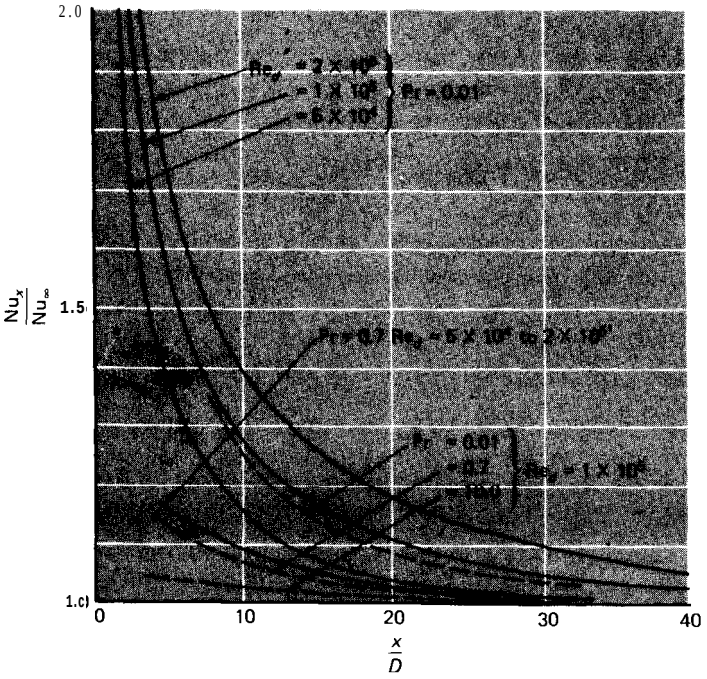


Fig. 6-6 Números de Nusselt de entrada térmica turbulenta para tubos circulares en q_w = constante.

$$\text{Pr} = 0.681$$

$$\mu = 2.57 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s} \quad [0.0622\ \text{lb}_m/\text{h}\cdot\text{pie}]$$

$$k = 0.0386\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C} \quad [0.0223\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}\cdot{}^\circ\text{F}]$$

$$c_p = 1.025\ \text{kJ/kg}\cdot{}^\circ\text{C}$$

$$\text{Re}_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{(1.493)(10)(0.0254)}{2.57 \times 10^{-5}} = 14\,756$$

de manera que el flujo es turbulento. Por consiguiente, utilizamos la Ec. 6-4 para calcular el coeficiente de transferencia de calor.

$$\text{Nu}_d = \frac{hd}{k} = 0.023\ \text{Re}_d^{0.8}\ \text{Pr}^{0.4} = (0.023)(14{,}756)^{0.8}(0.681)^{0.4} = 42.67$$

$$h = \frac{k}{d}\text{Nu}_d = \frac{(0.0386)(42.67)}{0.0254} = 64.85\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}\ [11.42\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F}]$$

Entonces el flujo de calor por unidad de longitud es

$$\frac{q}{L} = h\pi d\,(T_w - T_b) = (64.85)\pi(0.0254)(20) = 103.5\ \text{W/m} \quad [107.7\ \text{Btu/pie}]$$

Ahora podemos realizar un balance de energía para calcular el incremento en la temperatura en 3.0 m de longitud de tubo:

$$q = \dot{m}c_p\,\Delta T_b = L\left(\frac{q}{L}\right)$$

También tenemos:

$$\dot{m} = \rho u_m \frac{\pi d^2}{4} = (1.493)(10)\pi\frac{(0.0254)^2}{4}$$
$$= 7.565 \times 10^{-3}\ \text{kg/s} \quad [0.0167\ \text{lb}_m/\text{s}]$$

de manera que insertamos los valores numéricos en el balance de energía para obtener

$$(7.565 \times 10^{-3})(1025)\,\Delta T_b = (3.0)(103.5)$$

y

$$\Delta T_b = 40.04\ ^\circ\text{C} \quad [104.07\ ^\circ\text{F}]$$

Ejemplo 6-2

En un tubo de 1 plg (2.54 cm) de diámetro, entra agua a 60 °C y una velocidad media de flujo de 2 cm/s. Calcule la temperatura de salida del agua si el tubo es de 3.0 m de largo y la pared tiene una temperatura constante de 80 °C.

Solución

Primero evaluamos el número de Reynolds a la temperatura global de entrada para determinar el régimen de flujo. Las propiedades del agua a 60 °C son

$$\rho = 985 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 4.18 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$\mu = 4.71 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \quad [1.139 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{pie}]$$

$$k = 0.651 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 3.02$$

$$\text{Re}_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{(985)(0.02)(0.0254)}{4.71 \times 10^{-4}} = 1062$$

por consiguiente, el flujo es laminar. Calculando el parámetro adicional, tenemos

$$\text{Re}_d \text{ Pr} \frac{d}{L} = \frac{(1062)(3.02)(0.0254)}{3} = 27.15 > 10$$

de este modo, podemos aplicar la Ec. 6-10. Todavía no conocemos la temperatura global media necesaria para evaluar las propiedades, de manera que primero hacemos el cálculo en base a 60 °C, determinamos una temperatura global de salida y en seguida realizamos una segunda iteración para obtener un valor más exacto. Cuando se designan las condiciones de entrada y salida con los subíndices 1 y 2 respectivamente, el balance de energía resulta.

$$q = h\pi dL \left(T_w - \frac{T_{b_1} + T_{b_2}}{2}\right) = \dot{m}c_p(T_{b_2} - T_{b_1}) \qquad (a)$$

A la temperatura de pared de 80 °C tenemos

$$\mu_w = 3.55 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

De la Ec. 6-10

$$\text{Nu}_d = (1.86)\left[\frac{(1062)(3.02)(0.0254)}{3}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4.71}{3.55}\right)^{0.14} = 5.816$$

$$h = \frac{k \text{ Nu}_d}{d} = \frac{(0.651)(5.816)}{0.0254} = 149.1 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad [26.26 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

La rapidez de flujo en masa es

$$\dot{m} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u_m = \frac{(985)\pi(0.0254)^2(0.02)}{4} = 9.982 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

Insertando el valor para h dentro de la Ec. (a) junto con $\dot{m}$ y $T_{b1} = 60$ °C y $T_w = 80$ °C nos da

$$(149.1)\pi(0.0254)(3.0)\left(80 - \frac{T_{b_2} + 60}{2}\right) = (9.982 \times 10^{-3})(4180)(T_{b_2} - 60) \qquad (b)$$

Se puede resolver esta ecuación para que nos dé

$$T_{b_2} = 71.98 \text{ °C}$$

Por tanto, debemos regresar y evaluar las propiedades a

$$T_{b,\text{medio}} = \frac{71.98 + 60}{2} = 66 \text{ °C}$$

Obtenemos:

$$\rho = 982 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 4185 \text{ J/kg·°C} \qquad \mu = 4.36 \times 10^{-4} \text{ kg/m·s}$$

$$k = 0.656 \text{ W/m·°C} \qquad \text{Pr} = 2.78$$

$$\text{Re}_d = \frac{(1062)(4.71)}{4.36} = 1147$$

$$\text{Re Pr}\frac{d}{L} = \frac{(1147)(2.78)(0.0254)}{3} = 27.00$$

$$\text{Nu}_d = (1.86)(27.00)^{1/3}\left(\frac{4.36}{3.55}\right)^{0.14} = 5.743$$

$$h = \frac{(0.656)(5.743)}{0.0254} = 148.3 \text{ W/m}^2\text{·°C}$$

Volvemos a insertar en la Ec. (a) este valor de h para obtener

$$T_{b_2} = 71.88\,^{\circ}\text{C} \; [161.4\,^{\circ}\text{Fl}$$

En este problema la iteración produce una diferencia muy pequeña. Si hubiéramos encontrado una diferencia de temperatura global, grande el cambio en las propiedades habría tenido un efecto mayor.

Ejemplo 6-3

En un tubo liso de 5 mm de diámetro entra aire a 1 atm y 27 °C, con una velocidad de 3.0 m/s. La longitud del tubo es 10 cm. Se impone a la pared del tubo un flujo de calor constante. Calcule la transferencia de calor si la temperatura global de salida es 77 °C. Calcule también la temperatura de salida en las paredes y el valor de h a la salida.

Solución

Primero debemos evaluar el régimen de flujo y hacerlo tomando propiedades a la temperatura global promedio

$$\overline{T_b} = \frac{27 + 77}{2} = 52°\text{C} = 325 \text{ K}$$

$$\nu = 18.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0.703 \qquad k = 0.02814 \text{ W/m·°C}$$

$$\text{Re}_d = \frac{ud}{\nu} = \frac{(3)(0.005)}{18.8 \times 10^{-6}} = 798 \qquad (a)$$

de manera que el flujo es laminar. La longitud del tubo es bastante pequeña, por consiguiente. esperamos un efecto térmico de entrada y debernos consultar la Fig. 6-5. El número inverso de Graetz se calcula como

$$\text{Gz}^{-1} = \frac{1}{\text{Re}_d \text{ Pr } d}\frac{x}{d} = \frac{0.1}{(798)(0.703)(0.005)} = 0.0357$$

Por tanto, para q_w = constante, de la Fig. 6-5 obtenemos el número de Nusselt como

$$\text{Nu} = \frac{hd}{k} = 4.7 = \frac{q_w d}{(T_w - T_b)k} \qquad (b)$$

La transferencia de calor total se obtiene en términos del balance general de energía:

$$q = \dot{m}c_p(T_{b_2} \quad T_{b_1})$$

En la entrada $\rho = 1.1774$ kg/m^3, de modo que el flujo de masa es

$$\dot{m} = (1.1774)\pi(0.0025)^2(3.0) = 6.94 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$$

y

$$q = (6.94 \times 10^{-5})(1006)(77 - 27) = 3.49 \text{ W}$$

Por consiguiente, podemos encontrar la transferencia de calor sin realmente determinar temperaturas de pared o valores de h. Sin embargo, para determinar T_w debemos calcular q_w para su inserción en la Ec. (6). Tenemos

$$q = q_w \pi dL = 3.49 \text{ W}$$

y

$$q_w = 2222 \text{ W/m}^2$$

Ahora de la Ec. *(b)*

$$(T_w - T_b)_{x=L} = \frac{(2222)(0.005)}{(4.7)(0.02814)} = 84\,^\circ\text{C}$$

Así la temperatura de pared a la salida es

$$T_w]_{x=L} = 84 + 77 = 161\,^\circ\text{C}$$

y el coeficiente de transferencia de calor es

$$h_{x=L} = \frac{q_w}{(T_w - T_b)_{x=L}} \quad \begin{matrix} 2222 \\ 8 \quad 4 \end{matrix} = 26.45 \text{ W/m}^2\,^\circ\text{C}$$

Ejemplo 6-4

Repita el Ej. 6-3 para el caso de temperatura de pared constante.

Solución

Evaluamos las propiedades como en el ejemplo anterior y ahora introducimos la Fig. 6-5 para determinar Nu_d para T_w = Constante. Para $Gz^{-1} = 0.0357$ leemos

$$\text{Nu}_d = 5.15$$

Así calculamos el coeficiente de transferencia de calor promedio como

$$\bar{h} = (5.15)\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(5.15)(0.02814)}{0.005} = 29.98 \text{ W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$$

Basamos la transferencia de calor en la temperatura global promedio de 52 "C. de manera que

$$q = \bar{h}\pi dL(T_w - \overline{T_b}) = 3.49 \text{ W}$$

$$T_w = 76.67 + 52 = \mathbf{128.67}\ ^\circ\text{C}$$

Ejemplo 6-5

Un tubo de 2.0 cm de diámetro y una rugosidad relativa de 0.001 se mantiene a una temperatura de pared constante de 90 °C. En el tubo entra agua de 40 °C y sale a 60 °C. Si la velocidad de entrada es de 3 m/s, calcule la longitud de tubo necesaria para realizar el calentamiento.

Solución

Primero calculamos la transferencia de calor a partir de

$$q = mc_p \Delta T_{,,} = (989)(3.0)\pi(0.01)^2(4174)(60 \quad 40) \text{'} = 77\ 812 \text{ W}$$

Para la condición de rugosidad del tubo, podemos emplear la relación de Petukhov, Ec. 6-7. La temperatura media de la película es

$$T_f = \frac{90 + 50}{2} = 70\ ^\circ\text{C}$$

y las propiedades del fluido son

$$\rho = 978 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu = \mathbf{4.0} \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.664 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 2.54$$

También,

$$\mu_b = \mathbf{5.55} \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$\mu_w = \mathbf{2.81} \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

El número de Reynolds es entonces

$$\text{Re}_d = \frac{(978)(3)(0.02)}{\mathbf{4 \times 10^{-4}}} = 146\ 700$$

Consultando la Fig. 6-4, obtenemos el factor de fricción como

$$f = 0.0218 \qquad f/8 = \mathbf{0.002725}$$

Como $T_w > T_b$, tomamos $n = 0.11$ y obtenemos

$$\text{Nu}_d = \frac{(0.002725)(146{,}700)(2.54)}{\mathbf{1.07} + (12.7)(0.002725)^{1/2}(2.54^{2/3} \quad \mathbf{1})} \left(\frac{5.55}{2.81}\right)^{0.11}$$

$$= \mathbf{666.8}$$

$$h = \frac{(666.8)(0.664)}{\mathbf{0.02}} = 22138 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Obtenemos entonces la longitud del tubo a partir del balance de energía

$$q = \bar{h}\pi dL(T_w - \overline{T_b}) = 77\,812 \text{ w}$$

$$L = 1.40 \text{ m}$$

6-3 Flujo a través de cilindros y esferas

Mientras que el ingeniero se interesa con frecuencia en las características de la transferencia de calor de sistemas de flujo en el interior de tubos o sobre placas planas, se deberá conceder igual importancia a la transferencia de calor que puede lograrse por medio de un cilindro en flujo transversal, como se muestra en la Fig. 6-7. Como era de esperarse, el desarrollo de capa límite en el cilindro determina las características de la transferencia de calor. Mientras que la capa límite permanezca laminar y se comporte en la forma adecuada, será posible calcular la transferencia de calor por medio de un método similar al análisis de capa límite del Cap. 5. No obstante, es necesario incluir en el análisis el gradiente de presión ya que influye en forma apreciable sobre el perfil de velocidad de la capa límite. De hecho, es este gradiente de presión el que origina el desarrollo de una región de flujo separado en la parte posterior del cilindro cuando la velocidad de corriente libre es lo suficientemente grande.

El fenómeno de la separación de la capa límite se indica en la Fig. 6-8. El razonamiento físico que explica el fenómeno en una forma cualitativa es el siguiente. De acuerdo con la teoría de capa límite, la presión a través de la capa límite es esencialmente constante en cualquier posición x en el cuerpo. En el caso del cilindro, podríamos medir una distancia x a partir del punto de estancamiento del frente del cilindro. Así, la presión en la capa límite debería seguir la de la corriente libre para el flujo potencial alrededor de un cilindro, siempre y cuando este comportamiento no contradiga algún principio básico que deba aplicarse en la capa límite. A medida que el flujo progresa a lo largo del frente del cilindro, la presión disminuiría y en seguida aumentaría a lo largo de la parte posterior del cilindro, dando como resultado un incremento en la velocidad de corriente libre en el frente del cilindro y una disminución en la parte posterior. La velocidad transversal (aquella velocidad paralela a la superficie) disminuiría a partir de un valor de u_∞ en el borde exterior de la capa límite, hasta cero en la superficie. A medida que el flujo continúa hacia la parte posterior del cilindro, el incremento de presión causa una reducción en la velocidad en la corriente libre y a través de la capa límite. El aumento de presión y la reducción en velocidad se relacionan a través de la ecuación de Bernoulli que se escribe a lo largo de una línea de corriente:

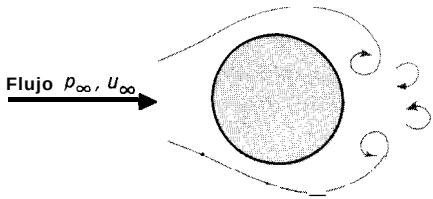


Fig. 6-7 Cilindro en flujo transversal.

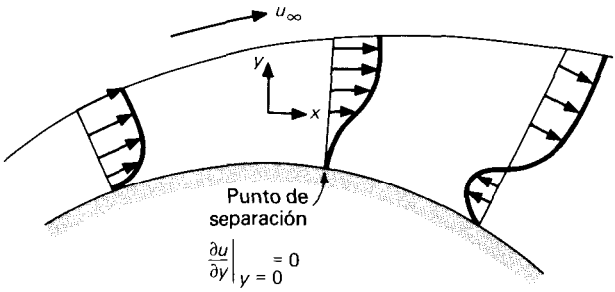


Fig. 6-6 Distribuciones de velocidad indicando separación de flujo en un cilindro en flujo transversal.

$$\frac{dp}{\rho} = -d\left(\frac{u^2}{2g_c}\right)$$

Como suponemos que la presión es constante a través de la capa límite, observamos que puede comenzar un flujo inverso en la capa límite cerca de la superficie; es decir, el momento de las capas de fluido cercanas a la superficie no es lo suficientemente elevado como para vencer el incremento en presión.

Cuando el gradiente de velocidad en la superficie se vuelve cero, se dice que el flujo ha alcanzado un punto de separación:

$$\text{Punto de separación en } \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

Este punto de separación se indica en la Fig. 6-8. A medida que el flujo continúa y pasa el punto de separación, pueden ocurrir fenómenos de flujo inverso, como también se muestra en la Fig. 6-8. Eventualmente, la región de flujo separado en la parte posterior del cilindro se vuelve turbulenta y de movimiento aleatorio.

El coeficiente de arrastre para cuerpos ásperos se define como

$$\text{Fuerza de arrastre} = F_D = C_D A \frac{\rho u_\infty^2}{2g_c} \tag{6-16}$$

en donde C_D es el coeficiente de arrastre y A es el área frontal del cuerpo expuesto al flujo, la cual para un cilindro es el producto del diámetro y la longitud. Los valores del coeficiente de arrastre para cilindros y esferas se proporcionan como una función del número de Reynolds en las Figs. 6-9 y 6-10.

La fuerza de arrastre sobre el cilindro es el resultado de una combinación de resistencia de fricción y el llamado arrastre de forma o arrastre por presión, que resulta de una región de baja presión en la parte posterior del cilindro, creada por el proceso de separación de flujo. Para números de Reynolds pequeños del orden de la unidad no hay separación de flujo, y todo el arrastre proviene de la fricción viscosa. Para números de Reynolds del orden de 10, la fricción y el arrastre de forma son del mismo or-

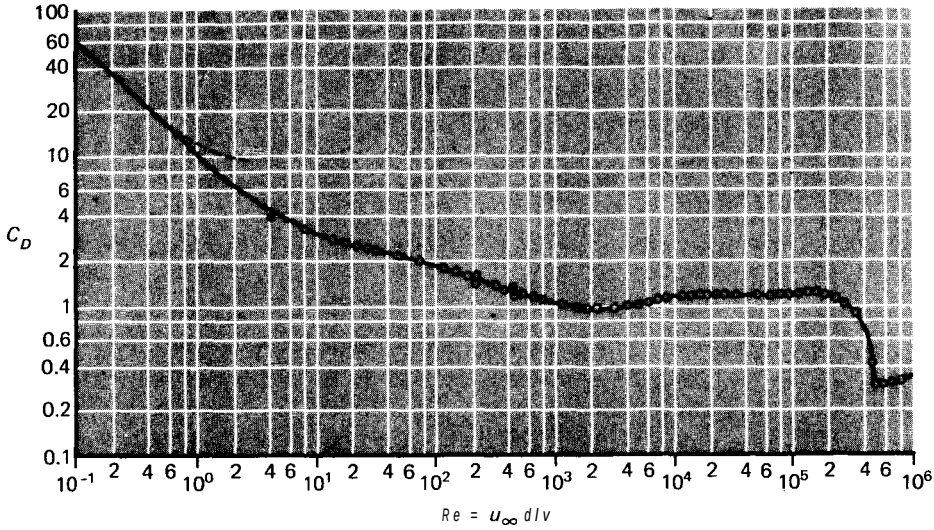


Fig. 6-9 Coeficiente de arrastre para cilindros circulares en función del número de Reynolds, de acuerdo con la Ref. 6.

den, mientras que el arrastre de forma que resulta de la región turbulenta de flujo separado predomina en números de Reynolds mayores que 1000. Para números de Reynolds de aproximadamente 10^5 basados en el diámetro, el flujo de capa límite puede volverse turbulento dando por resultado un perfil de velocidad más agudo y una separación de flujo sumamente tardía. En consecuencia, el arrastre de forma de redu-

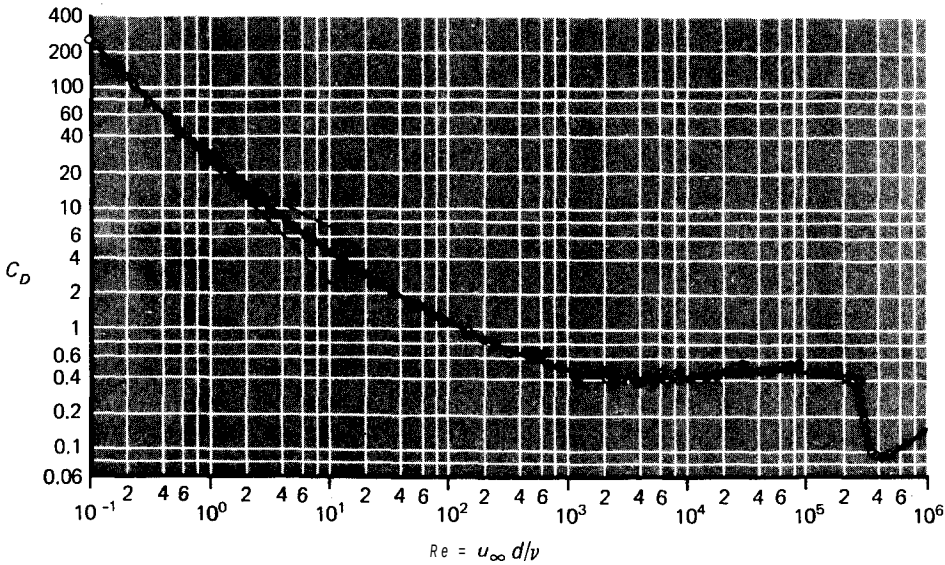


Fig. 6-10 Coeficiente de arrastre para esferas como una función del número de Reynolds, a partir de la Ref. 6.

ce y esto se representa por la ruptura en la curva del coeficiente de arrastre alrededor de Re $= 3 \times 10^5$. El mismo razonamiento se aplica a la esfera así como al cilindro circular. Se observa un comportamiento semejante con otros cuerpos romos tales como los cilindros elípticos y planos aerodinámicos.

Es obvio que los procesos de flujo que acabamos de estudiar influyen en la transferencia de calor de un cilindro caliente a una corriente de fluido. El comportamiento en detalle de la transferencia de calor desde un cilindro caliente hacia el aire ha sido investigado por Giedt [7] y los resultados se encuentran resumidos en la Fig. 6-11. En los números de Reynolds menores (70 800 y 101 300) el punto mínimo en el coeficiente de transferencia de calor ocurre aproximadamente en el punto de separación. Hay un incremento subsecuente en el coeficiente de transferencia de calor en la parte posterior del cilindro, como resultado de un movimiento turbulento a contracorriente en el flujo separado. A números de Reynolds más elevados se observan dos puntos mínimos. El primero ocurre en el punto de transición de la capa límite laminar a turbulenta, y el segundo punto mínimo ocurre cuando la capa límite turbulenta se separa. Hay un incremento rápido en la transferencia de calor cuando la capa límite se vuelve turbulenta y otra cuando se encuentra el incremento en el movimiento a contracorriente en la separación.

Debido a la naturaleza compleja de los procesos de separación de flujo, no es posible calcular en forma analítica los coeficientes de transferencia de calor en el flujo

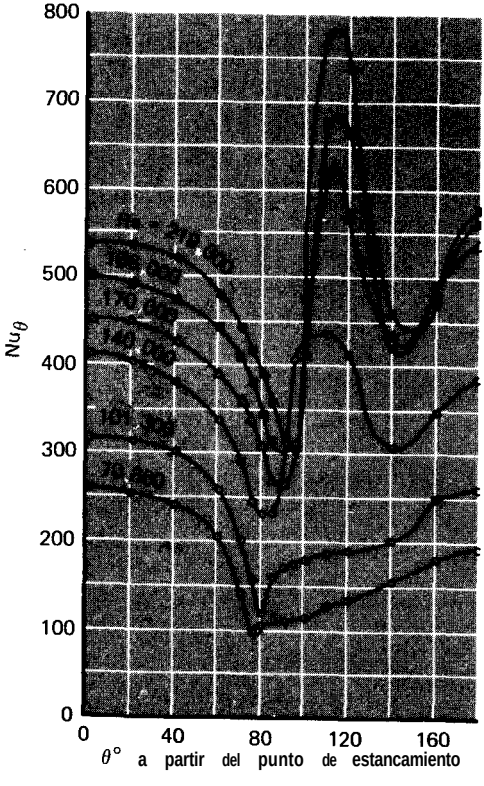


Fig. 6-11' Número local de Nusselt para transferencia de calor a partir de un cilindro en flujo transversal, de la Ref. 7.

transversal; sin embargo, las correlaciones de datos experimentales de Hilpert [8] para gases, Knudsen y Katz [9] para liquidos, indican que los coeficientes promedio de transferencia de calor se pueden calcular con

$$\frac{hd}{k_f} = C\left(\frac{u_\infty d}{v_f}\right)^n \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{6-17}$$

en donde las constantes C y n se encuentran en la Tabla 6-2. Los datos de transferencia de calor para aire se encuentran en la Fig. 6-12. Las propiedades que se utilizan en la Ec. 6-17 se evaluan a la temperatura de la película tal como se indica por medio del subíndice f.

La Fig. 6-13 muestra el campo de temperatura alrededor de los cilindros calientes colocados en una corriente transversal de aire. Las líneas oscuras son líneas de temperatura constante, que se han hecho visibles por medio del uso de un interferómetro. Obsérvese la región de flujo separado que se desarrolla en la parte posterior del cilindro en los números de Reynolds más altos, y el campo turbulento que se encuentra presente en esta región.

Podemos observar que la correlación original para gases omite el término del número de Prandtl en la Ec. 6-17 con muy poco error debido a que la mayor parte de los gases diatómicos tienen Pr $\sim$ 0.7. La introducción del factor $\mathrm{Pr}^{1/3}$ está de acuerdo con el razonamiento que se realizó previamente en el Cap. 5.

Fand [21] ha demostrado que los coeficientes de transferencia de calor de líquidos a cilindros en flujo transversal se representan mejor por la relación

$$\mathrm{Nu}_f = (0.35 + 0.56\ \mathrm{Re}_f^{0.52})\ \mathrm{Pr}_f^{0.3} \tag{6-18}$$

Esta relación es válida para $10^{-1} < \mathrm{Re}, < 10^5$ siempre y cuando no se encuentre excesiva turbulencia de corriente libre.

En algunas ocasiones, en particular aquellas que involucran cálculos en una computadora, puede ser más conveniente utilizar una expresión más complicada que la Ec. 6-17 si se le puede aplicar a un intervalo de números de Reynolds mucho más amplio. Eckert y Drake [34] recomiendan las siguientes relaciones para la transferencia de calor a partir de tubos en flujo transversal, basadas en el estudio exhaustivo de las Refs. 33 y 39:

Tabla 6-2 Constantes basadas en las Refs. 8 y 9, para ser usadas con la Ec. 6-17

Re_{df}	C	n
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.466
4000-40000	0.193	0.618
40000-400000	0.0266	0.805

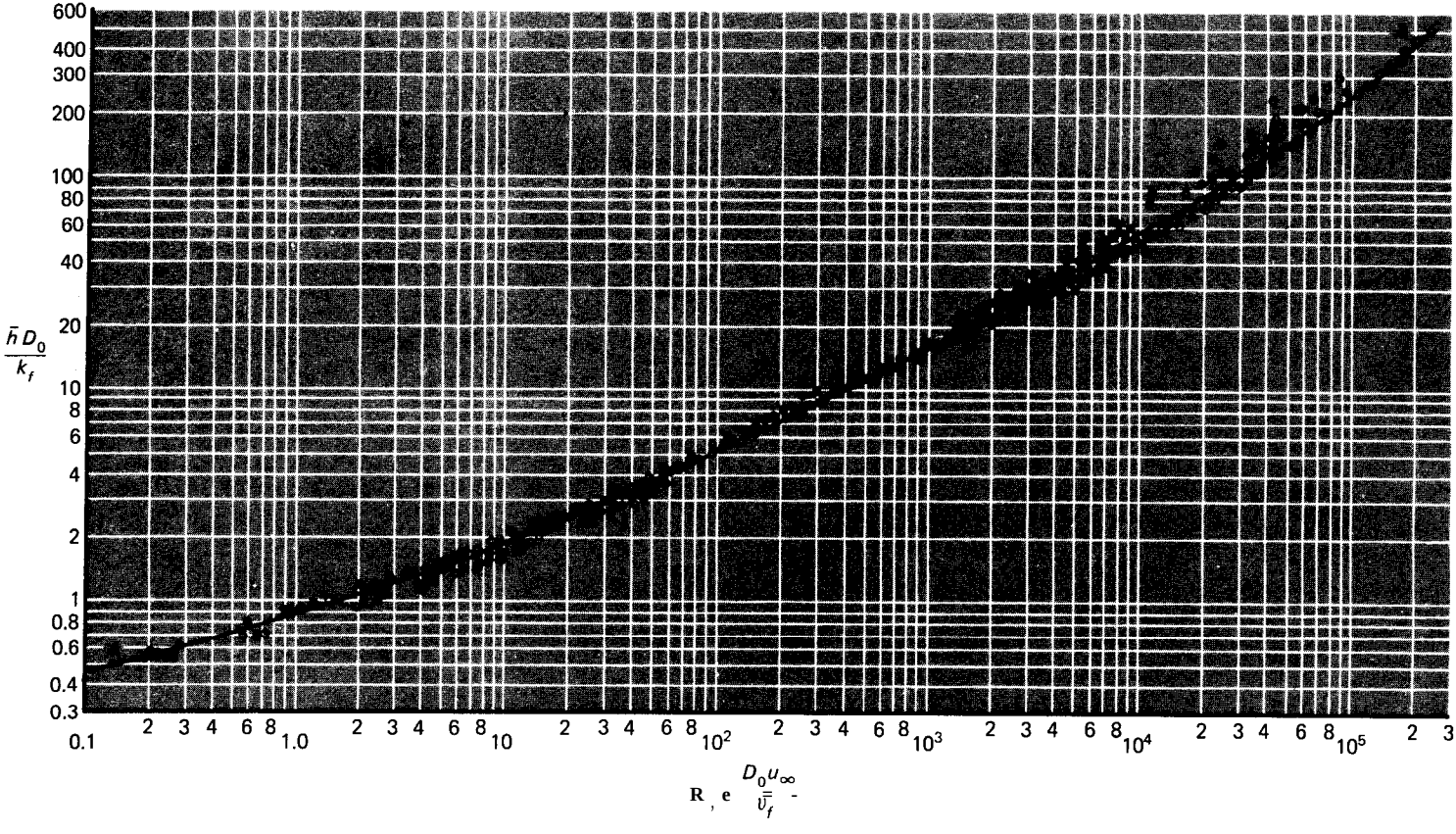
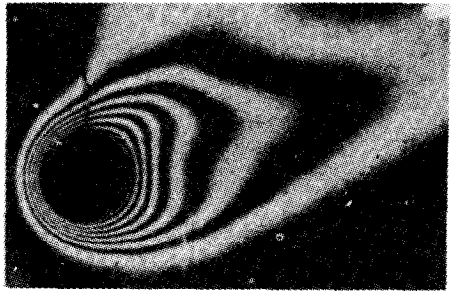
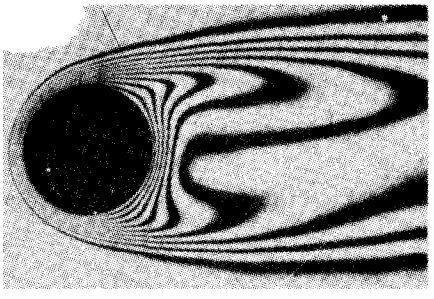


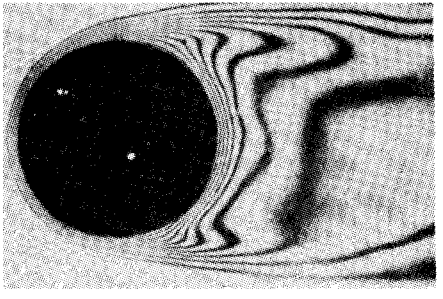
Fig. 6-12 Datos para calentamiento y enfriamiento de aire fluyendo normal a cilindros solos, de la Ref. 10.



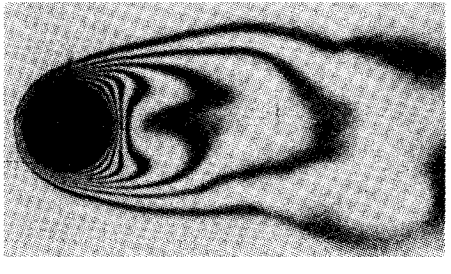
RE = 23' 0.5 plg de diámetro



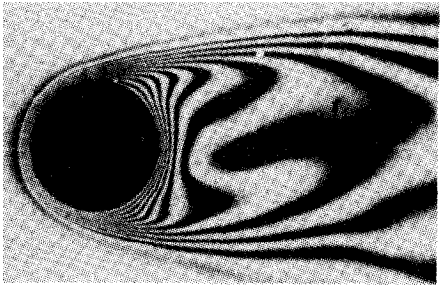
RE = 120 1 .O plg de diámetro



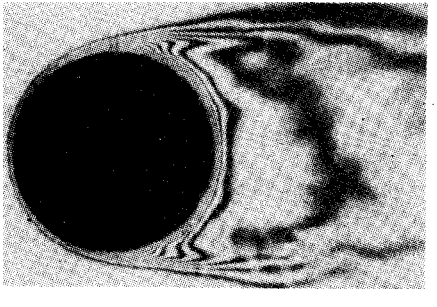
RE = 597 1.5 plg de diámetro



RE = 85 0.5 plg de diámetro



RE = 218 1 .O plg de diámetro



RE = 1600 1.5 plg de diámetro

Fig. 6-13 Fotografía de interferometría mostrando isotermas alrededor de cilindros horizontales calientes, colocados en una corriente transversal de aire (*fotografías* por *cortesía de E. Soehngen*).

$$\mathrm{Nu} = (0.43 + 0.50\ \mathrm{Re}^{0.5})\ \mathrm{Pr}^{0.38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_w}\right)^{0.25} \qquad \text{para } 1 < \mathrm{Re} < 10^3 \qquad (6\text{-}19)$$

$$\mathrm{Nu} = 0\ 25\ \mathrm{Re}^{0.6}\mathrm{Pr}^{0.38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_w}\right)^{0.25} \qquad \text{para } 10^3 < \mathrm{Re} < 2 \times 10^5 \qquad (6\text{-}20)$$

Para los gases se puede omitir la-razón del número de Prandtl y se evalúan las propiedades del fluido a la temperatura de la película. Para los líquidos se retiene la razón y se evalúan las propiedades del fluido a la temperatura de corriente libre. Las Ecs. 6-13 y 6-20 concuerdan dentro de un 5 a 10% con los resultados obtenidos utilizando la Ec. 6-17.

Churchill y Bernstein [37] nos dan una relación aún más completa, aplicable a todo el intervalo de datos que se tiene:

$$\mathrm{Nu}_d = 0.3 + \frac{0.62\ \mathrm{Re}^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{3/4}}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}}{282\,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

$$\text{para } 10^2 < \mathrm{Re}_d < 10^{\prime};\ \mathrm{Pe}_d > 0.2 \qquad (6\text{-}21)$$

Esta relación predice datos ligeramente inferiores en el intervalo de valores medios de números de Reynolds entre 20 000 y 400 000, y se sugiere utilizar la siguiente, para este intervalo:

$$\mathrm{Nu}_d = 0.3 + \frac{0.62\ \mathrm{Re}_d^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}_d}{282{,}000}\right)^{1/2}\right]$$

$$\text{para } 20\,000 < \mathrm{Re}_d < 400\,000;\ \mathrm{Pe}_d > 0.2 \qquad (6\text{-}22)$$

Los datos de transferencia de calor que se utilizaron para llevar a las Ecs. 6-21 y 6-22 incluyen fluidos de aire, agua y sodio líquido.

Por debajo de $\mathrm{Pe}_d = 0.2$ Nakai y Okazaki [38] presentan la relación siguiente:

$$\mathrm{Nu}_d = [0.8237 - \ln(\mathrm{Pe}_d^{1/2})]^{-1} \qquad \text{para } \mathrm{Pe}_d < 0.2 \qquad (6\text{-}23)$$

Las propiedades en las Ecs. 6-21, 6-22 y 6-23 se evalúan a la temperatura de la película.

La elección de la ecuación que se ha de utilizar para flujo transversal sobre cilindros está sujeta a cierta suposición. Es claro que desde el punto de vista del cálculo, la Ec. 6-17 es la más fácil de usar y la Ec. 6-21 la más completa. Las relaciones más completas son preferibles para planteamientos con computadoras debido a la amplia gama de fluidos y números de Reynolds que cubren. Por ejemplo, la Ec. 6-21 ha tenido mucho éxito en la correlación de datos para fluidos que van desde el aire hasta el sólido líquido. La Ec. 6-17 no puede usarse para metales líquidos. Si estuviéramos realizando cálculos para el aire, cualquiera de las dos relaciones sería satisfactoria.

Jakob [22] ha resumido los resultados de experimentos con transferencia de calor de cilindros no circulares. Se utiliza la Ec. 6-17 a fin de obtener una correlación

empírica para gases, y en la Tabla 6-3 se encuentran resumidas las constantes que han de ser usadas con esta ecuación.

McAdams [10] **recomienda la siguiente relación para transferencia de calor de esferas hacia un gas que fluye:**

$$\frac{hd}{k_f} = 0.37 \left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^{0.6} \quad \text{para } 17 < \text{Re}_d < 70\,000 \qquad (6\text{-}24)$$

Achenbach [43] **ha obtenido relaciones aplicables a una gama aún mucho más amplia de números de Reynolds para aire con Pr = 0.71:**

$$\text{Nu} = 2 + (0.25 + 3 \times 10^{-4}\,\text{Re}^{1.6})^{1/2} \quad \text{para } 100 < \text{Re} < 3 \times 10^5 \qquad (6.24a)$$

$$\text{Nu} = 430 + a\text{Re} + b\text{Re}^2 + c\text{Re}^3 \quad \text{para } 3 \times 10^5 < \text{Re} < 5 \times 10^6 \qquad (6\text{-}24b)$$

con

$$a = 5 \times 10^{-3} \qquad b = 0.25 \times 10^{-9} \qquad c = -3.1 \times 10^{-17}$$

Para el flujo de líquidos a través de esferas, se pueden utilizar los datos de Kramers [1 1] **para obtener la correlación**

$$\frac{hd}{k_f}\,\text{Pr}_f^{-0.3} = 0.97 + 0.68 \left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^{0.5} \quad \text{para } 1 < \text{Re}_d < 2000 \qquad (6\text{-}25)$$

Tabla 6-3 Constantes para transferencia de calor a partir de cilindros no circulares de acuerdo con la Ref. 22

Geometría	Re_{df}	C	n
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
	5×10^3 1.95×10^4 $1.95 \times 10^4 - 10^5$	0.160 0.0385	0.638 0.782
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
	$4 \times 10^3 - 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

Vliet y Leppert [19] recomendaron la siguiente expresión para transferencia de calor de esferas hacia aceite y agua, en un intervalo mucho más amplio de números de Reynolds, desde 1 a 200 000:

$$\mathrm{Nu}\,\mathrm{Pr}^{-0.3}\left(\frac{\mu_w}{\mu}\right)^{0.25} = 1.2 + 0.53\ \mathrm{Re}_d^{0.54} \tag{6-26}$$

en donde todas las propiedades se evalúan en condiciones de corriente libre, con excepción de μ_ω, el cual se evalúa a la temperatura de superficie de la esfera. La Ec. 6-26 representa tanto los datos de la Ref. ll, como los de la Ref. 19, mucho más reciente.

Todos los datos antes mencionados han sido recopilados por Whitaker [35] a fin de desarrollar una sola ecuación para gases y líquidos que fluyen a través de esferas:

$$\mathrm{Nu} = 2 + (0.4\ \mathrm{Re}_d^{1/2} + 0.06\ \mathrm{Re}_d^{2/3})\ \mathrm{Pr}^{0.4}\,(\mu_\infty/\mu_w)^{1/4} \tag{6-27}$$

la cual es válida para el intervalo $3.5 < \mathrm{Re}, < 8 \times 10^4$ y $0.7 < \mathrm{Pr} < 380$. Las propiedades en la Ec. 6-27 se evaluan a la temperatura de corriente libre.

Ejemplo 6-6

Aire a 1 atm y 35 °C fluye a través de un cilindro de 5.0 cm de diámetro, a una velocidad de 50 m/s. Se mantiene la superficie del cilindro a una temperatura de 150 °C. Calcule la pérdida de calor por unidad de longitud del cilindro.

Solución

Primero determinamos los números de Reynolds y en seguida buscamos en la Tabla 6-2 las constantes adecuadas que pueden usarse con la Ec. 6-17. Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de la película:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{150 + 35}{2} = 92.5°\mathrm{C} = 365.5\ \mathrm{K}$$

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(365.5)} = 0.966\ \mathrm{kg/m^3}\ \mathrm{LO.0603\ lb_m/pie^3]}$$

$$\mu_f = 2.01 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s}\quad \mathrm{LO.0486\ lb_m/h \cdot pie]}$$

$$k_f = 0.0312\ \mathrm{W/m \cdot °C}\quad [0.018\ \mathrm{Btu/h \cdot pie \cdot °F}]$$

$$\mathrm{Pr}, = 0.695$$

$$\mathrm{Re}_f = \frac{\rho u_\infty d}{\mu} = \frac{(0.966)(50)(0.05)}{2.01 \times 10^{-5}} = 1.201 \times 10^5$$

De la Tabla 6-2

$$C = 0.0266 \qquad n = 0.805$$

de manera que, de la Ec. 6-17

$$\frac{hd}{k_s} = (0.0266)(1.201 \times 10^5)^{0.805}(0.695)^{1/3} = 289.2$$

$$h = \frac{(289.2X0.0312)}{0.05} = 180.5 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \quad [31.8 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot °\text{F}]$$

Por consiguiente, la transferencia de calor por unidad de longitud es:

$$\frac{q}{L} = h\pi d\,(T_w - T_\infty)$$
$$= (180.5)\pi(0.05)(150 \quad 35)$$
$$= 3260 \text{ W/m} \quad [3391 \text{ Btu/pie}]$$

Ejemplo 6-7

Un alambre delgado de 0.001 plg de diámetro (3.94 X 10^{-5} m) se coloca en una corriente de aire a 1 atm y 25 °C, con una velocidad de flujo perpendicular al alambre de 50 m/s. Se hace pasar a través del alambre una corriente eléctrica elevando su temperatura de superficie a 50 °C. Calcule la pérdida de calor por unidad de longitud.

Solución

Primero obtenemos las propiedades a la temperatura de la película:

$$T_f = (25 + 50)/2 = 37.5 \text{ °C} = 310 \text{ K}$$
$$\nu_f = 17.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 0.02704 \text{ W/m} \cdot °\text{C}$$
$$\text{Pr}_f = 0.706$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re}_d = \frac{u_\infty d}{\nu_f} = \frac{(50)(3.94 \times 10\text{-Y}}{17.66 \text{ x } 10^{-6}} \simeq 111.6$$

El número de Peclet es Pe = Re Pr = 78.79, y encontramos que se aplican las Ecs. 6-17, 6-21 o 6-19. Realicemos el cálculo tanto con la expresión más simple, la Ec. 6-17, así como con la más compleja, la Ec. 6-21 y comparemos resultados.

Utilizando la Ec. 6-17 con C = 0.683 y n = 0.466, tenemos

$$\text{Nu}_d = (0.683)(111.6)^{0.466}(0.705)^{1/3} = 5.471$$

y el valor de los coeficientes de transferencia de calor es

$$h = \text{Nu}_d \left(\frac{k}{d}\right) = 5.471 \frac{0.02704}{3.94 \text{ x } 10^{-5}} = 3755 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

Entonces la transferencia de calor por unidad de longitud es

$$q/L = \pi dh(T_w - T_\infty) = \pi(3.94 \quad x\ 10^{-5})(3755)(50 - 25)$$
$$= 11.02 \text{ W/m}$$

Utilizando la Ec. 6-21, calculamos el número de Nusselt como

$$\text{Nu}_d = 0.3 + \frac{(0.62)(111.6)^{1/2}(0.705)^{1/3}}{[1 + (0.4/0.705)^{2/3}]^{3/4}} [1 + (111.6/287{,}000)^{5/8}]^{4/5}$$
$$= 4.265$$

y

$$h = \frac{(4.265)(0.02704)}{3.94 \times 10^{-5}} = 2927 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Y

$$q/L = (2927)\pi(3.94 \times 10^{-5})(50 - 25) = 9.06 \text{ W/m}$$

Aquí encontramos que si tomarnos como correcto el valor de la Ec. 6-21, existe una diferencia del 28% entre las dos correlaciones, o de 14% del valor medio. Al examinar la Fig. 6-12 nos damos cuenta que no es extraordinario encontrar dispersión en datos de ± 15%.

6-4 Flujo a través de bancos de tubos

Debido a que muchos arreglos en cambiadores de calor involucran hileras múltiples de tubos, las características de transferencia de calor para bancos de tubos son de gran interés práctico. Grimson [12] estudió las características de hileras de tubos alternadas y alineadas, y en base a una correlación de los resultados obtenidos por otros investigadores, pudo presentar los datos en la forma de la Ec. 6-17. En la Tabla 6-4 se dan los valores de la constante C y el exponente n, en términos de los parámetros geométricos utilizados para describir el arreglo del conjunto de tubos. El número de Reynolds está basado en la velocidad máxima que ocurre en el banco de tubos; es decir, la velocidad a través del área mínima de flujo. Esta área dependerá del arreglo geométrico de tubos. En la Fig. 6-14 se da la nomenclatura que se utiliza con la Tabla 6-4. Los datos de la Tabla 6-4 corresponden a bancos de tubos que tengan 10 o más hileras en la dirección del flujo. Para menos tubos, en la Tabla 6-5 se da la razón entre h para N hileras de profundidad y la de 10 hileras.

La caída de presión para flujo de gases sobre una hilera de tubos puede calcularse por medio de la Ec. 6-28, expresado en N/m^2[Pa]:

$$\Delta p = \frac{2f' G_{\text{máx}}^2 N}{\rho} \left(\frac{\mu_w}{\mu_b}\right)^{0.14} \tag{6-28}$$

en donde $G_{\text{máx}}$ = masa velocidad en el área de flujo mínimo, $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$
4 = densidad evaluada en condiciones de corriente libre, kg/m^3
N = número de hileras transversales

Jakob [18] expresa el factor de fricción empírico f' como

$$f' = \left\{0.25 + \frac{0.118}{[(S_n - d)/d]^{1.08}}\right\} \text{Re}_{\text{máx}}^{-0.16} \tag{6-29}$$

para arreglos de tubos alternados y,

$$f' = \left\{0.044 + \frac{0.08 S_p/d}{[(S_n - d)/d]^{0.43+1.13d/S_p}}\right\} \text{Re}_{\text{máx}}^{-0.15} \tag{6-30}$$

para arreglos de tubos alineados.

Zukauskas [39] ha presentado información adicional para conjuntos de tubos en la que se toma en consideración una amplia gama de números de Reynolds y variaciones

Tabla 6-4 Correlación de Grimson para transferencia de calor para bancos de tubos de 10 hileras o más, según la Ref. 12

	$\frac{S_n}{d}$							
	1.25		1.5		2.0		3.0	
$\frac{S_p}{d}$	C	n	C	n	C	n	C	n
				Alineados				
1.25	0.386	0.592	0.305	0.608	0.111	0.704	0.0703	0.752
1.5	0.407	0.586	0.278	0.620	0.112	0.702	0.0753	0.744
2.0	0.464	0.570	0.332	0.602	0.254	0.632	0.220	0.648
3.0	0.322	0.601	0.396	0.584	0.415	0.581	0.317	0.608
				Alternados				
0.6	—	—	—	—	—	—	0.236	0.636
0.9	—	—	—	—	0.495	0.571	0.445	0.581
1.0	—	—	0.552	0.558	—	—	—	—
1.125	—	—	—	—	0.531	0.565	0.575	0.560
1.25	0.575	0.556	0.561	0.554	0.576	0.556	0.579	0.562
1.5	0.501	0.568	0.511	0.562	0.502	0.568	0.542	0.568
2.0	0.448	0.572	0.462	0.568	0.535	0.556	0.498	0.570
3.0	0.344	0.592	0.395	0.580	0.488	0.562	0.467	0.574

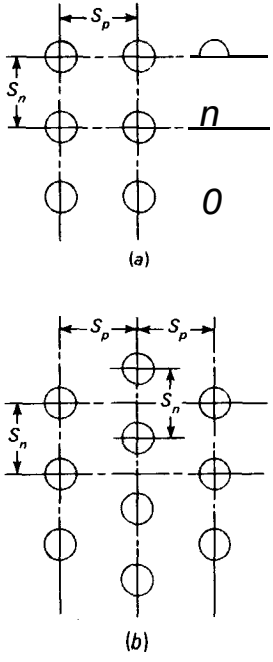


Fig. 6-14 Nomenclatura que se utiliza con la Tabla 6-4: (*a*) hileras alineadas; (*b*) hileras de tubos alternadas.

Tabla 5-5 Razón entre la h para N hileras de profundidad y la de 10 hileras de profundidad, a partir de la Ref. 17

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Razón para tubos alternados	0.68	0.75	0.83	0.89	0.92	0.95	0.97	0.98	0.99	1.0
Razón para tubos alineados	0.64	0.80	0.87	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	0.99	1.0

de propiedades. El lector interesado puede consultar esta referencia para mayor información.

Ejemplo 6-8

Aire a 1 atm y 10 °C fluye a través de un banco de tubos que tiene 15 hileras de alto por 5 de profundidad, y a una velocidad de 7 m/s medidos en un punto en el flujo anterior ala entrada de aire en el banco de tubos. Las superficies de los tubos se mantienen a 65 "C. El diámetro de los tubos es de 1 plg [2.54 cm]; los tubos están arreglados en línea, de manera que el espaciamiento tanto en la dirección normal al flujo como en la paralela es 1.5 plg [3.81 cm]. Calcule la transferencia de calor total por unidad de longitud para el banco de tubos y la temperatura de salida del aire.

Solución

Las constantes que deben usarse con la Ec. 6-17 pueden obtenerse de la Tabla 6-4, utilizando

$$\frac{S_p}{d} = \frac{3.81}{2.54} = 1.5 \qquad \frac{S_n}{d} = \frac{3.81}{2.54} = 1.5$$

de modo que $C = 0.278$ $n = 0.620$

Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película, que en la entrada al banco de tubos es

$$T_{f_1} = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{65 + 10}{2} = 37.5°C = 310.5\ K \quad [558.9°R]$$

Entonces

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287 \times 310.5)} = 1.137\ kg/m^3$$

$$\mu_f = 2.002 \times 10^{-5}\ kg/m \cdot s$$

$$k_f = 0.027\ W/m \cdot °C \quad [0.0156\ Btu/h \cdot pies \cdot °F]$$

$$c_p = 1007\ J/kg \cdot °C \quad 10.24\ Btu/lb_m \cdot °F]$$

$$Pr = 0.706$$

Para calcular la velocidad máxima debemos determinar el área de flujo mínima. En la Fig. 6-14 encontramos que la razón del área de flujo mínima al área frontal total es $(S_n - d)/S_n$. Así la velocidad total es:

$$u_{máx} = u_\infty \frac{S_n}{S_n - d} = \frac{(7 \times 3.81)}{3.81 - 2.54} = 21\ m/s\ [68.9\ pies/s] \qquad (a)$$

en donde u_∞ es la velocidad de llegada antes de entrar al banco de tubos. El número de Reynolds se calcula utilizando la velocidad máxima:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_{máx} d}{\mu} \simeq \frac{(1.137)(21)(0.0254)}{2.002 \times 10^{-5}} = 30\,293 \qquad (b)$$

El *coeficiente* de transferencia de calor se *calcula entonces con la* Ec. 6-17:

$$\frac{hd}{k_f} = (0.278)(30\,293)^{0.62}(0.706)^{1/3} = 148.6 \qquad (c)$$

$$h = \frac{(148.6)(0.027)}{0.0254} = 158\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \quad [27.8\ \mathrm{Btu/h \cdot pies^2 \cdot °F}] \qquad (d)$$

Este es el coeficiente de transferencia de calor que se obtendría si hubiera 10 filas de tubos en la dirección del flujo. Como sólo hay 5, este valor deberá multiplicarse por el factor 0.92, tal como se determina en la Tabla 6-5.

El área total de superficie para la transferencia de calor, considerando longitud unitaria de tubo. es

$$A = N\pi d(1) = (15)(5)\pi(0.0254) = 5.985\ \mathrm{m^2/m}$$

en donde N es el número total de tubos.

Antes de calcular la transferencia de calor debemos reconocer que la temperatura del aire aumenta a medida que fluye a través del banco de tubos. Por tanto, deberemos tomarlo en cuenta cuando utilicemos

$$q = hA(T_w - T_\infty) \qquad (e)$$

Como una buena aproximación, podemos utilizar un promedio aritmético de T_∞ y escribir para el balance de energía

$$q = hA\left(T_w - \frac{T_{\infty,1} + T_{\infty,2}}{2}\right) = \dot{m}c_p(T_{\infty,2} - Tm.,) \qquad (f)$$

en donde ahora los subíndices 1 y 2 designan la entrada y salida al banco de tubos. El flujo de masa en la entrada de los 15 tubos es

$$\dot{m} = \rho_\infty u_\infty (15) S_n$$
$$\rho_\infty = \frac{p}{RT_\infty} \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(283)} = 1.246\ \mathrm{kg/m^3} \qquad (g)$$
$$\dot{m} = (1.247)(7)(15)(0.0381) = 4.99\ \mathrm{kg/s}\ [11.0\ \mathrm{lb_m/s}]$$

de manera que la Ec. (*f*) se *convierte en*

$$(0.92)(158)(5.985)\left(165 - \frac{10 + T_{\infty,2}}{2}\right) = (4.99)(1006)(T_{\infty,2} - 10)$$

que puede resolverse para dar

$$T_{\infty,2} = 18.77\ °\mathrm{C}$$

Se obtiene entonces la transferencia de calor del lado derecho de la Ec. (*f*):

$$q = (4.99 \times 1005 \times 18.77 - 10) = 44.03\ \mathrm{kW/m}$$

Esta respuesta puede mejorarse un poco calculando de nuevo las propiedades del aire basadas en un valor medio de T_∞, pero la mejoría será pequeña y sin duda dentro de la exactitud de la correlación de transferencia de calor empírica de la Ec. 6-17.

6-5 Transferencia de calor en metales líquidos

En los últimos años se ha concentrado el interés en la transferencia de calor en metales líquidos debido a la alta rapidez de transferencia de calor que se puede alcanzar con estos medios. Esta alta rapidez de transferencia de calor es el resultado de la elevada conductividad térmica de los metales líquidos, en comparación con otros fluidos; en consecuencia, son en lo particular adecuados en situaciones en donde se deben extraer cantidades grandes de energía a partir de un espacio relativamente pequeño, como en un reactor nuclear. Además, los metales líquidos permanecen en estado líquido a temperaturas mayores que los fluidos convencionales, como el agua y otros enfriadores orgánicos. Esto también hace posible diseños de cambiadores de calor más compactos. Los metales líquidos son de difícil manejo debido a su naturaleza corrosiva y la violenta reacción que puede provocarse cuando entran en contacto con el agua o aire; aun así, sus ventajas en ciertas aplicaciones de transferencia de calor han dominado sobre sus desventajas, y se han desarrollado técnicas adecuadas para su manejo.

Consideremos primero la sencilla placa plana con un flujo de metal líquido a través de ella. El número de Prandtl para metales líquidos es muy bajo, del orden de 0.01, de manera que el espesor de capa límite térmica deberá ser considerablemente superior al espesor de capa límite hidrodinámica. Esta situación es el resultado de los elevados valores de conductividad térmica para metales líquidos y se encuentra representado en la Fig. 6-15. Como la razón de δ/δ_t es pequeña, el perfil de velocidad tiene una forma muy obtusa sobre la mayor parte de la capa límite térmica. Como una primera aproximación podemos entonces suponer un modelo de flujo viscoso para el cálculo de la transferencia de calor; es decir, tomamos

$$u = u_\infty \tag{6-31}$$

a través de la capa límite térmica, con el propósito de calcular el término de transporte de energía en la ecuación integral (Sec. 5-6):

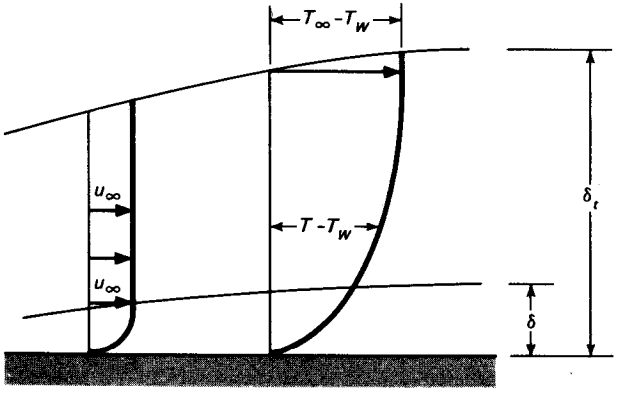


Fig. 615 Regímenes de capa límite para el análisis de transferencia de calor de metales líquidos.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta_t}(T_\infty - T)u\,dy\right] = \alpha\frac{dT}{dy}\bigg]_w \tag{6-32}$$

Las condiciones en el perfii de temperatura son las mismas de las de la Sec. 5-6, de manera que utilizamos la parábola cúbica como antes:

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{6-33}$$

Insertando las Ecs. 6-31 y 6-33 en la Ec. 6-32 nos da

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\delta_t}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{11}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]dy\right\} = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t} \tag{6-34}$$

que puede integrarse para obtener

$$2\delta_t\,d\delta_t = \frac{8\alpha}{u_\infty}dx \tag{6-35}$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$\delta_t = \sqrt{\frac{8\alpha x}{u_\infty}} \tag{6-36}$$

para una placa calentada en toda su longitud.

El coeficiente de transferencia de calor puede expresarse por

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{3k}{2\delta_t} = \frac{3\sqrt{2}}{8}k\sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha x}} \tag{6-37}$$

Esta relación puede ponerse en forma adimensional como

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.530(\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr})^{1/2} = 0.530\ \mathrm{Pe}^{1/2} \tag{6-38}$$

Utilizando la Ec. 5-21 para el espesor de capa límite hidrodinámica,

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{6-39}$$

Podemos calcular la razón δ/δ_t:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \frac{4.64}{\sqrt{8}}\sqrt{\mathrm{Pr}} = 1.64\ \sqrt{\mathrm{Pr}} \tag{6-40}$$

Utilizando Pr ~ 0.01, obtenemos

$$\frac{\delta}{\delta_t} \sim 0.16$$

el cual se encuentra en razonable concordancia con nuestro modelo de flujo viscoso.

El modelo de flujo que acabamos de estudiar ilustra la naturaleza general de la transferencia de calor en metales líquidos, y es importante observar que la transferencia de calor depende del número de Peclet . Las correlaciones empíricas casi siempre se expresan en términos de este parámetro, cuatro de las cuales presentamos en seguida.

En la Ref. 13, se dan amplios datos sobre los metales líquidos, y las características de la transferencia de calor están resumidas en la Ref. 23. Lubarsky y Kaufman [14] recomiendan la siguiente relación para el cálculo de flujo turbulento completamente desarrollado de metales líquidos, en tubos lisos, con flujo de calor uniforme en la pared:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{hd}{k} = 0.625\,(\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr})^{0.4} \tag{6-41}$$

Todas las propiedades que deben usarse en la Ec. 6-41 se evalúan a la temperatura global. La Ec. 6-41 es válida para $10^2 < \mathrm{Pe} < 10^4$ y para $L/d > 60$. Seban y Shimazaki [16] proponen la siguiente relación para el cálculo de la transferencia de calor hacia metales líquidos, en tubos con temperatura de pared constante:

$$\mathrm{Nu}_d = 5.0 + 0.025\,(\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr})^{0.8} \tag{6-42}$$

en donde todas las propiedades se evalúan a la temperatura global. La Ec. 6-42 es válida para Pe $> 10^2$ y $L/d > 60$.

Datos más recientes, obtenidos por Skupinshi, Tortel y Vautrey [26] con mezclas de sodio y potasio, indican que la relación siguiente puede ser preferible a la de la Ec. 6-41 para condiciones de flujo de calor constante:

$$\mathrm{Nu} = 4.82 + 0.0185\,\mathrm{Pe}^{0.827} \tag{6-43}$$

Esta relación es válida para $3.6 \times 10^3 < \mathrm{Re} < 9.05 \times 10^5$ y $10^2 < \mathrm{Pe} < 10^4$.

Witte [32] ha medido la transferencia de calor de una esfera hacia sodio líquido durante convección forzada, correlacionando los datos por medio de

$$\mathrm{Nu} = 2 + 0.386\,(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})^{0.5} \tag{6-44}$$

para intervalo del número de Reynolds de $3.56 \times 10^4 < \mathrm{Re} < 1.525 \times 10^5$.

Kalish y Dwyer [41] han presentado información sobre transferencia de calor en metales líquidos en paquetes de tubos.

En general, en lo que concierne la transferencia de calor en metales líquidos existen muchas preguntas abiertas, y para mayor información referimos al lector a las Refs. 13 y 23.

Ejemplo 6-9

Bismuto líquido fluye a una rapidez de 4.5 kg/s a través de un tubo de acero inoxidable de 5.0 cm de diámetro. El bismuto entra a 415 °Cy se calienta a 440 °C a medida que pasa por el tubo. Si se mantiene un flujo constante a lo largo del tubo y la pared de éste tiene una temperatura 20 °C más alta que la temperatura global del bismuto, calcule la longitud de tubo requerida para efectuar la transferencia de calor.

Solución

Como se mantiene un flujo de calor constante, podemos utilizar la Ec. 6-43 para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Las propiedades del bismuto se evalúan a una temperatura global promedio de (415 + 440)/2 = 427.5 °C.

$$\mu = 1.34 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \quad [3.242 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{pie}]$$

$$c_p = 0.149 \text{ kJ/kg} \cdot °\text{C} \quad \text{LO.0356 Btu/lb}_m \cdot °\text{F}]$$

$$k = 15.6 \text{ W/m} \cdot °\text{C} \quad [9.014 \text{ Btu/h pie} \cdot °\text{F}]$$

$$\text{Pr} = 0.013$$

La transferencia de calor total se calcula con

$$q = \dot{m} c_p \Delta T_b = (4.5)(149)(440 - 415) = 16.76 \text{ kW} \quad [57\,186 \text{ Btu/h}] \qquad (a)$$

Calculamos los números de Reynolds y Peclet como

$$\text{Re}_d = \frac{dG}{\mu} = \frac{(0.05)(4.5)}{[\pi(0.05)^2/4](1.34 \times 10^{-3})} = 85\,520 \qquad (b)$$

$$\text{Pe} = \text{Re Pr} = (85\,520)(0.013) = 11.11$$

En seguida se calcula el coeficiente de transferencia de calor a partir de la Ec. 6-43.

$$\text{Nu}_d = 4.82 + (0.0185)(1111)^{0.827} = 10.93 \qquad (c)$$

$$h = \frac{(10.93)(15.6)}{0.05} = 3410 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \quad [600 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot °\text{F}]$$

Ahora podemos calcular el área de superficie total de tubo requerida, a partir de

$$q = hA(T_w - T_b) \qquad (d)$$

en donde utilizamos la diferencia de temperatura de 20 °C;

$$A = \frac{16\,760}{(3410)(20)} = 0.246 \text{ m}^2 \quad 12.65 \text{ pie}^2]$$

Esta área puede, a su vez, expresarse en términos de la longitud del tubo

$$A = \pi d L \qquad \text{y} \qquad L = \frac{0.246}{\pi(0.05)} = 1.57 \text{ m} \quad [5.15 \text{ pie}]$$

6-6 Comentariqs breves

En contraste con el Cap. 5, este capítulo ha tratado, casi por completo, sobre correlaciones empíricas que pueden utilizarse para calcular transferencia de calor por convección. El procedimiento general para el cálculo es el siguiente:

1. Establezca la geometría de la situación.
2. Realice una determinación preliminar de las propiedades adecuadas del fluido.
3. Establezca el régimen de flujo por medio del cálculo del número de Reynolds o de Peclet.
4. Seleccione una ecuación adecuada a la geometría y al régimen de flujo, y si es necesario, evalúe de nuevo las propiedades de acuerdo con las condiciones de la ecuación.
5. Proceda a realizar el cálculo del valor de h y/o la rapidez de transferencia de calor.

Debemos observar que los datos sobre los que se basan las ecuaciones empíricas se toman casi siempre bajo las condiciones de laboratorio, en donde es posible ejercer un control cuidadoso sobre las variables de temperatura y de flujo. En una aplicación práctica puede no existir un control tan cuidadoso y pueden haber desviaciones de las rapideces de transferencia de calor calculadas de las ecuaciones que se dan aquí. Nuestro objetivo al hacer esta observación, no es desanimar al lector, sino indicar que en algunas ocasiones será bastante adecuado utilizar una correlación simple en lugar de una expresión más elaborada, aun si la relación sencilla tiene una dispersión amplia en su representación de datos. Nuestro objetivo ha sido presentar una variedad de expresiones (cuando existen) de manera que se pueda realizar cierta elección.

Preguntas de repaso

1. ¿Qué es la ecuación de Dittus-Boelter? ¿Cuándo se aplica?
2. ¿Cómo se pueden calcular los coeficientes de transferencia de calor para el flujo en tubos rugosos?
3. ¿Qué es el diámetro hidráulico? ¿Cuándo se utiliza?
4. ¿Cuál es la forma de ecuación utilizada para calcular la transferencia de calor para flujo sobre cilindros y cuerpos romos?
5. ¿Por qué el modelo de flujo viscoso nos proporciona resultados razonables cuando se le aplica a transferencia de calor de metales líquidos?
6. ¿Qué es el número de Peclet?

Problemas

6-l El agua de 35 °C y que pasa a una rapidez de 0.8 kg/s se calienta a 40 °C en un tubo de 2.5 cm de diámetro, cuya superficie se encuentra a 90 °C. ¿Qué longitud deberá **tener el tubo para poder realizar este calentamiento?**

6-2 Se fuerza el paso de agua a una rapidez de 0.5 kg/s, a través de un tubo liso de 2.5 cm de **diámetro interno de 15 m de largo. La temperatura de la pared en toda la longitud del tubo es 15 °C más alta que la del agua. ¿Cuál es la temperatura de salida del agua?**

6-3 En un tubo de 2.5 cm de diámetro y 6 m de largo fluye agua a una temperatura promedio de 20 °C a 0.7 kg/s. La caída de presión se mide como 2 kN/m². Se impone un flujo de calor constante y la temperatura promedio de la pared es de 55 °C. Estime la temperatura de salida del agua.

6-4 Se calienta agua de 5 a 15 °C haciéndola pasar por un tubo de cobre de 5 cm de diámetro interno a 3 kg/s. La pared del tubo se mantiene a 90 °C. ¿Cuál es la longitud del tubo?

6-5 El aire a 1400 kN/m^2 entra en un conducto de 7.5 cm de diámetro y 6 cm de largo, a una rapidez de 0.5 kg/s. La pared del conducto se mantiene a una temperatura promedio de 200 °C. La temperatura promedio del aire en el tubo es de 250 °C. Estime el descenso en la temperatura del aire a medida que pasa a través del conducto.

6-6 El agua a una temperatura de 10 °C fluye auna rapidez de 0.4 kg/s en un tubo de 2.5 cm de diámetro y 6 m de largo. La caída de presión es de 3 kN/m^2. Se impone un flujo de calor constante, y la temperatura promedio de pared es 50 °C. Estime la temperatura de salida del agua.

6-7 En una tubería de 2.5 cm de diámetro interno y 1.5 m de longitud fluye agua a una rapidez de 1.0 kg/s. La caída de presión es de 7 kN/m^2 a través del 1.5 m de longitud. La temperatura de la pared de la tubería se mantiene a una temperatura constante de 50 °C por medio de la condensación de un vapor, y la temperatura de entrada del agua es de 20 °C. Estime la temperatura de salida del agua.

68 Tenemos agua a la rapidez de 0.5 kg/s es necesario enfriarla hasta alcanzar de 65 a 26 °C. ¿Por cuál de los siguientes métodos se obtiene una caída de presión menor; pasando el agua a través de una tubería de 12.5 mm de diámetro y a una temperatura constante de 4 °C, o a través de una tubería de 25 mm de diámetro a temperatura constante de 20 °C?

6-9 Forzamos el paso del agua a una rapidez de 1 kg/s, a través de un tubo con 2.5 cm de diámetro interno. La temperatura de entrada del agua es 15 °C, y la de salida es de 50 °C. La temperatura de la pared en toda la longitud del tubo es 14 °C más elevada que la del agua. ¿Cuál es la longitud del tubo?

6-10 El aire a 1 atm y 15 °C fluye a través de un conducto rectangular de 7.5 por 15 cm. Una sección de 1.8 m del conducto se mantiene a 120 °C, y la temperatura promedio del aire a la salida de esta sección es de 65 °C. Calcule la rapidez de flujo del aire y la transferencia de calor total

6-11 En una tubería de 5 cm de diámetro interno y rugosidad relativa de 0.002, entra agua a 38 °C y con una rapidez de 6 kg/s. Si la tubería tiene 9 m de largo y se mantiene a 65 °C, calcule la temperatura de salida del agua y la transferencia de calor total.

612 Se construye un cambiador de calor de manera que los gases calientes de una chimenea a 425 °C fluyen dentro de un tubo de cobre de 2.5 cm de diámetro interno y un espesor de pared de 1.6 mm. Se coloca un tubo de 5.0 cm alrededor del tubo de 2.5 cm de diámetro y se hace fluir agua a alta presión y a 150 °C en el espacio anular entre los tubos. Si la del flujo del agua es 1.5 kg/s y la transferencia de calor total es 17.5 kW, estime la longitud del cambiador para un flujo de masa de gas de 0.8 kg/s. Suponga que las propiedades del gas de chimenea son iguales a las del aire a 425 °C y presión atmosférica.

613 Aceite de motor entra a un tubo de 1.25 cm de diámetro y 3 m de largo a una temperatura de 38 °C. Se mantiene la temperatura de la pared a 65 °C, y la velocidad de flujo es de 30 cm/s. Estime la transferencia total de calor hacia el aceite y su temperatura de salida.

614 Utilizando los valores del número local de Nusselt que se dan en la Fig. 6-12, obtenga los valores para el número de Nusselt promedio como una función del número de Reynolds. Grafique los resultados como log Nu versus log Re, y obtenga una ecuación que represente todos los datos. Compare esta correlación con la expresada por la Ec. 6-17 y la Tabla 6-2.

615 A través de un cilindro de 5 cm de diámetro fluye aire a 70 kN/m^2 y 20 °C, con una velocidad de 20 m/s. Calcule la fuerza de arrastre ejercida sobre el cilindro.

616 Se fuerza agua a 93 °C y a la rapidez de 0.8 kg/s a través de un tubo de cobre de 5 cm de diámetro interno, a una velocidad adecuada. El espesor de la pared es 0.8 mm. Por fuera del tubo, se hace fluir aire a 15 °C y presión atmosférica a una velocidad de 15 m/s en una dirección normal al eje del tubo. ¿Cuál es la pérdida de calor por metro de longitud del tubo?

617 Un cilindro calentado a 150 °C y de 2.5 cm de diámetro se coloca en una corriente de aire atmosférico a 1 atm de 38 °C. La velocidad del aire es 30 m/s. Calcule la pérdida de calor por metro de longitud para el cilindro.

6-18 Suponiendo que un hombre puede aproximarse por medio de un cilindro de 1 pie de diámetro y 6 pies de alto v con una temperatura de superficie de 75 °F, calcule el calor que perdería la persona mientras se encuentra de pie en medio de un viento de 30 mı/h y cuya temperatura es 30 °F.

6-19 El coeficiente de arrastre para una esfera con números de Reynolds menores a 100 puede aproximarse por $C_D = b$ Re-l, en donde b es una constante. Suponiendo que la analogía de Colbum entre la transferencia de calor y la fricción fluida es pertinente, derive una expresión para la pérdida de calor de una esfera de diámetro d y temperatura T_s, liberada del reposo y a la que se le deja caer en un fluido de temperatura T_∞. (Obtenga una expresión para la pérdida de calor entre el tiempo en que se libera la esfera y el tiempo en que alcanza la velocidad v. Suponga que el número de Reynolds es menor a 100 durante este tiempo y que la esfera se mantiene a una temperatura constante.)

6-20 El aire a 3.5 MN/m² y 38 °C fluye a través de un banco de tubos que consta de 400 tubos de 1.25 cm de diámetro externo colocados en una forma alternada de 20 hileras de tubos de alto; S_P = 3.75 cm y S_n = 2.5 cm. La velocidad del flujo entrante es de 9 m/s, y las temperaturas de pared de los tubos se mantienen constantes a 200 °C por medio de la condensación de un vapor en el interior de éstos. La longitud de los tubos es 1.5 m. Estime la temperatura de salida del aire a medida que deja las hileras de tubos.

621 El bismuto líquido entra en una tubería de acero inoxidable de 2.5 cm de diámetro a una rapidez de 1 kg/s y 400 °C. La temperatura de la pared se mantiene constante a 450 °C. Calcule la temperatura de salida del bismuto si el tubo tiene 60 cm de longitud.

622 Necesitamos pasar sodio líquido de 120 a 149 °C a una rapidez de 2.3 kg/s. Se dispone de un tubo de 2.5 cm de diámetro que se calienta eléctricamente (flujo de calor constante). Si la temperatura de pared del tubo no debe exceder 200 °C, calcule la longitud mínima requerida.

623 Suponga que la mitad de la transferencia de calor de un cilindro en flujo transversal ocurre en la mitad frontal del cilindro. Basándose en esto, compare la transferencia de calor de un cilindro en flujo transversal con la de una placa plana que tenga una longitud igual a la distancia desde el punto de estancamiento del cilindro. Comente esta comparación.

624 Utilizando el modelo de flujo viscoso, demuestre que la ecuación de energía de la capa límite se reduce a la misma forma que la ecuación de conducción transiente para el sólido semiinfinito de la Sec. 4-3. Resuelva esta ecuación y compare la solución con el análisis integral de la Sec. 6-5.

625 Un aceite que tiene Pr = 1960, ρ = 860 kg/m³, $\nu = 1.6 \times 10^{-4}$ m²/s, y $k = 0.14$ W/m·°C entra a un tubo de 2.5 mm de diámetro y 60 cm de longitud. La temperatura de entrada del aceite es de 20 °C, la velocidad media de flujo es 30 de cm/s, y la temperatura de pared es de 120 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor.

626 El amonfaco liquido fluye a través de un tubo liso de 2.5 cm de diámetro y 2.5 m de largo, a una rapidez de 1 lb_m/s. El amoníaco entra a 10 °C y sale a 38 °C; y se impone a la pared del tu-

bo un flujo de calor constante. Calcule la temperatura promedio de la pared necesaria para efectuar la transferencia de calor indicada.

627 Sobre una esfera de 3 mm de diámetro fluye agua a 6 m/s. La temperatura de corriente libre es 38 °C y la esfera se mantiene a 93 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor.

628 Demuestre que el diámetro hidráulico para un espacio de corona circular se expresa por $D_H = d_o - di$.

629 Un alambre de 0.13 mm de diámetro se expone a una corriente de aire a -30 °C y 54 kN/m². La velocidad de flujo es 230 m/s. El alambre mide 12.5 mm de largo y se calienta eléctricamente. Calcule la energía necesaria para mantener la temperatura de superficie del alambre a 175 °C.

6-30 Se deja caer una gota esférica de agua de 1.3 mm de diámetro, en reposo, en un medio de aire atmosférico a 1 atm y 20 °C. Estime las velocidades que alcanzará la gota después de haber caído 30, 60 y 300 m.

6-31 El aire a 90 °C y a 1 atm pasa a través de alambre calentado de $\frac{1}{16}$ plg de diámetro, a una velocidad de 6 m/s. El alambre se calienta a una temperatura de 150 °C. Calcule la transferencia de calor por unidad de longitud de alambre

632 Un banco de tubos de 6.33 mm de diámetro tiene un arreglo alineado con $S_n = S_p = 1.9$ cm. Seis hileras de tubos se utilizan con una pila de 50 tubos de altura. La temperatura de la superficie de los tubos es constante e igual a 90 °C, y se hace pasar aire atmosférico a 20 °C a través de ellos, a una velocidad de entrada de 4.5 m/s antes que el flujo penetre en el banco de tubos. Calcule la transferencia de calor total por unidad de longitud del banco de tubos. Estime la caída de presión para este arreglo.

6-33 Repita el Prob. 6-32 para un arreglo alternado con los mismos valores de S_p y S_n.

634 Podemos obtener una versión más compacta del banco de tubos del Prob. 6-32 reduciendo S_p y S_n, conservando el mismo el número de tubos. Investigue el efecto que dará reducir a la mitad S_p y S_n, es decir $S_p = S_n = 0.95$ cm. Calcule la transferencia de calor y la caída de presión para este nuevo arreglo.

635 El aire atmosférico a 20 °C fluye transversalmente a una barra cuadrada de 5 cm a una velocidad de 15 m/s. La velocidad es normal a una de las caras de la barra. Calcule la transferencia de calor por unidad de longitud para una temperatura de superficie de 90 °C.

636 Un tubo corto tiene 6.4 mm de diámetro y 15 cm de largo. Al tubo le entra agua a 1.5 m/s y 38 °C y se mantiene una condición de flujo de calor constante, de manera que la temperatura de la pared permanece 28 °C más elevada que la temperatura global. Calcule la rapidez de transferencia de calor y la temperatura de salida del agua.

637 El helio a 1 atm y a 38 °C fluye transversalmente a un cilindro de 3 mm de diámetro, el cual se calienta a 150 °C. La velocidad de flujo es 9 m/s. Calcule la transferencia de calor por unidad de longitud del alambre. ¿Cómo se compara esto con la transferencia de calor para el aire bajo las mismas condiciones?

638 Calcule la rapidez de transferencia de calor por unidad de longitud para flujo sobre un cilindro de 0.025 mm de diámetro, mantenido a 65 °C. Realice el cálculo para (a) el aire a 20 °C y a 1 atm, y(b) el agua a 20 °C; $u_\infty = 6$ m/s.

639 Compare los resultados de transferencia de calor de las Ecs. 6-17 y 6-18 para agua con números de Reynolds de 10^3, 10^4, 10^5 y una temperatura de película de 90 °C.

6-40 En el interior de un tubo de 1.25 cm de diámetro fluye Freón 12 (CCl_2F_2) líquido a una velocidad de 3 m/s. Calcule el coeficiente de transferencia de calor para una temperatura global de 10 °C. ¿Cómo se compara esto con agua en las mismas condiciones?

6-41 En un calefactor eléctrico doméstico se utilizan cintas delgadas de metal para disipar el calor. Las cintas tienen 6 mm de ancho y se encuentran orientadas normales a la corriente de aire que produce un pequeño ventilador. La velocidad del aire es de 2 m/s y se emplean 7 cintas de 35 cm. Si las cintas se calientan a 870 °C, estime la transferencia de calor total por convección hacia el aire de la habitación que se encuentra a 20 °C. (Obsérvese que en un calefactor tal, gran parte de la transferencia de calor total será por radiación térmica.)

6-42 Compare las Ecs. 6-19, 6-20 y 6-21 con la Fc. 6-17 para un gas con Pr = 0.7, a los números de Reynolds siguientes: (a) 500, (6) 1000, (c) 2000, (d) 10 000, (e) 100 000.

6-43 Un conducto en el Artico lleva aceite caliente a 50 °C. Un fuerte viento polar sopla sobre el conducto de 50 cm de diámetro, auna velocidad de 13 m/s y a una temperatura de − 35 °C. Estime la pérdida de calor por metro de tubería.

6-44 Para calentar una corriente transversal de CO_2 que entra a 3 atm, 35 °C y 5 m/s, se utiliza la condensación de vapor a 150 °C por el interior de un banco de tubos. El banco consiste en 100 tubos de 1.25 cm de diámetro externo en un arreglo cuadrado con $S_n = S_p$ = 1.875 cm. Los tubos tienen 60 cm de longitud. Suponiendo que la temperatura de la pared externa de los tubos es constante e igual a 150 °C, calcule la transferencia de calor total hacia el CO_2 y su temperatura de salida.

6-45 Un alambre fino de 0.025 mm de diámetro y 15 cm de largo, se utiliza para detectar la velocidad de flujo midiendo el calor que puede disipar el alambre cuando se le coloca en una corriente de aire. La resistividad del alambre es 70 $\mu\Omega\cdot$ cm. La temperatura del alambre se determina midiendo su resistencia eléctrica con respecto a una temperatura de referencia T_o de manera que

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Para este alambre en particular, el valor del coeficiente de temperatura a es 0.006 °C^{-1}. La resistencia puede determinarse por medio de mediciones de la corriente y el voltaje aplicados sobre el alambre y

$$R = E/I$$

Suponga que se realizan mediciones para el aire a 20 °C con una velocidad de flujo de 10 m/s y la temperatura del alambre es 40 °C. ¿Qué valores de voltaje y corriente se obtendrán para estas condiciones suponiendo que R_o se evalúa en T_o = 20 °C ¿Qué valores de voltaje y corriente se obtendrán para el mismo alambre, pero con velocidades de flujo de 15 y 20 m/s?

6-46 Un conducto cuadrado de 30 por 30 cm se mantiene a una temperatura constante de 30 °C. Se hace pasar a través de él una corriente de aire a 50 °C y 1 atm y con una velocidad de 6 m/s. Calcule el calor ganado por el conducto. ¿Qué tanto se reducirá el flujo de calor si se reduciese la velocidad de flujo a la mitad?

6-47 Un banco de tubos alineados está construido con tubos de 2.5 cm de diámetro, y tiene 15 tilas de alto y 7 de profundidad. Los tubos se mantienen a 90 °C y se envía a través de ellos aire atmosférico a 20 °C y u_∞ = 12 m/s. El arreglo tiene S_p = 3.75 y S_n = 5.0 cm. Calcule la transferencia de calor del banco de tubos por metro de longitud. Calcule también la caída de presión.

6-48 En un tubo de 5 mm de diámetro entra aceite de motor a 120 °C. La pared del tubo se mantiene a 50 °C, y el número de Reynolds de entrada es 1000. Calcule la transferencia de calor, el coeficiente de transferencia de calor promedio y la temperatura de salida del aceite, para tubos de 10, 20 y 50 cm de longitud.

6-49 El amoníaco líquido fluye en un conducto que tiene una sección transversal de un triángulo equilátero de 1.0 cm de lado. La temperatura global promedio es de 20 °C, y la temperatura de pared del conducto es de 50 °C. Se observa un flujo laminar bien desarrollado con un número de Reynolds de 1000. Calcule la transferencia de calor por unidad de longitud del conducto.

6-50 En un conducto que tiene una sección transversal de 5 x 10 mm fluye agua con una temperatura global promedio de 20 °C. Si la temperatura de la pared del conducto es contante e igual a 60 °C y se observa un flujo laminar completamente desarrollado, calcule la transferencia de calor por unidad de longitud.

6-51 Se tiene que enfriar etilenglicol de 60 a 40 °C en un tubo de 3.0 cm de diámetro. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 20 °C. El glicol entra al tubo con una velocidad de 10 m/s. Calcule la longitud de tubo necesaria para realizar este enfriamiento.

652 Un tanque esférico de 4.0 m de diámetro se mantiene a una temperatura de superficie de 40 °C. Sobre el tanque sopla aire a 1 atm y 20 °C en 6 m/s. Calcule la pérdida de calor.

6-53 En el interior de un tubo liso con una temperatura de pared de 180 °F, fluye agua con una temperatura global promedio de 80 °F. La longitud del tubo es 6.0 pies y el diámetro es 0.125 plg. La velocidad de flujo es 0.125 pie/s. Calcule la rapidez de transferencia de calor.

654 Se dispone de dos tubos, uno de 4.0 cm de diámetro y otro cuadrado de 4.0 cm. Se hace pasar aire a 1 atm y 27 °C a través de los tubos con una velocidad de 20 m/s. Calcule la transferencia de calor en cada caso, si la temperatura de la pared de los tubos se mantiene a 50 °C.

655 Determine una expresión para el número de Nusselt promedio para metales líquidos fluyendo sobre una placa plana. Utilice la Ec. 6-38 como punto de partida.

Referencias

1 Dittus, F. W., and L. M. K. Boelter: *Univ. Calif. (Berkeley) Pub. Eng.*, vol. 2, p. 443, 1930.
2 Sieder, E. N., and C. E. Tate: Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes, *Znd. Eng. Chem.*, vol. 28, p. 1429, 1936.
3 Nusselt, W.: Der Wärmeaustausch zwischen Wand und Wasser im Rohr, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 2, p. 309, 1931.
4 Hausen, H.: Darstellung des Wärmeuberganges in Rohren durch verallgemeinerte Potenzbeziehungen, *VDZ Z.*, no. 4, p. 91, 1943.
5 Moody, F. F.: Friction Factors for Pipe Flow, *Trans. ASME*, vol. 66, p. 671, 1944.
6 Schliching, H.: "Boundary Layer Theory," 7th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
7 Giedt, W. H.: Investigation of Variation of Point Unit-Heat-Transfer Coefficient around a Cylinder Normal to an Air Stream, *Trans. ASME*, vol. 71, pp. 375-381, 1949.
6 Hilpert, R.: Wärmeabgabe von geheizen Drahten und Rohren, *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 4, p. 220, 1933.
9 Knudsen, J. D., and D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
10 McAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
11 Kramers, H.: Heat Transfer from Spheres to Flowing Media, *Physica*, vol. 12, p. 61, 1946.

12 Grimson, E. D.: Correlation and Utilization of New Data on Flow Resistance and Heat Transfer for Cross Flow of Gases over Tube Banks, *Trans. ASME,* vol. 59, pp. 583-594, 1937.
13 Lyon, R. D. (ed.): "Liquid Metals Handbook," 3d ed., Atomic Energy Commission and U.S. Navy Department, Washington, D.C., 1952.
14 Lubarsky, B., and S. J. Kaufman: Review of Experimental Investigations of Liquid-Metal Heat Transfer, *NACA Tech. Note 3336, 1955.*
15 Colbum, A. P.: A Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison with Fluid Friction, Truns. *AIChE,* vol. 29, p. 174, 1933.
16 Seban, R. A., and T. T. Shimazaki: Heat Transfer to a Fluid Flowing Turbulently in a Smooth Pipe with Walls at Constant Temperature, *Trans. ASME,* vol. 73, p. 803, 1951.
17 Kays, W. M., and R. K. Lo: Basic Heat Transfer and Flow Friction Data for Gas Flow Normal to Banks of Staggered Tubes: Use of a Transient Technique, *Stanford Univ. Tech. Rep.* 15, Navy Contract N6-ONR251 T.O. 6; 1952.
16 Jakob, M.: Heat Transfer and Flow Resistance in Cross Flow of Gases over Tube Banks, *Trans. ASME,* vol. 60, p. 384, 1938.
19 Vliet, G. C., and G. Leppert: Forced Convection Heat Transfer from an Isothermal Sphere to Water, *J. Heat Trunsfer,* ser. C, vol. 83, p. 163, 1961.
20 Irvine, T. R.: Noncircular Duct Convective Heat Transfer, in W. Ibele (ed.), "Modem Developments in Heat Transfer," Academic Press, Inc., New York, 1963.
21 Fand, R. M.: Heat Transfer by Forced Convection from a Cylinder to Water in Crossflow, *Znt. J.* Heut *Mass Transfer,* vol. 8, p. 995, 1965.
22 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
23 Stein, R.: Liquid Metal Heat Transfer, *Adv. Heut Transfer,* vol. 3, 1966.
24 Hartnett, J. P.: Experimental Determination of the Thermal Entrance Length for the Flow of Water and of Oil in Circular Pipes, *Trans. ASME,* vol. 77, p. 1211, 1955.
25 Allen, R. W., and E. R. G. Eckert: Friction and Heat Transfer Measurements to Turbulent Pipe Flow of Water (Pr = 7 and 8) at Uniform Wall Heat Flux, *J. Heut Trunsfer,* ser. C, vol. 86, p. 301, 1964.
26 Skupinshi, E., J. Tortel, and L. Vautrey: Détermination des coéfficients de convection d'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire, *Int. J. Heut Mass Trunsfer,* vol. 8, p. 937, 1965.
27 Dipprey, D. F., and R. H. Sabersky: Heat and Momentum Transfer in Smooth and Rough Tubes at Various Prandtl Numbers, *Znt. J. Heut Mass Transfer,* vol. 6, p. 329, 1963.
26 Kline, S. J.: "Similitude and Approximation Theory," McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
29 Townes, H. W., and R. H. Sabersky: Experiments on the Flow over a Rough Surface, *Znt. J. Heut Mass Transfer,* vol. 9, p. 729, 1966.
30 Gowen, R. A., and J. W. Smith: Turbulent Heat Transfer from Smooth and Rough Surfaces, *Znt. J. Heut Mass Transfer,* vol. ll, p. 1657, 1968.
31 Sheriff, N., and P. Gumley: Heat Transfer and Friction Properties of Surfaces with Discrete Roughness, *Znt. J. Heut Mass Trunsfer,* vol. 9, p. 1297, 1966.
32 Witte, L. C.: An Experimental Study of Forced-Convection Heat Transfer from a Sphere to Liquid Sodium, *J. Heut Trunsfer,* vol. 90, p. 9, 1968.
33 Zhukauskas, A. A., V. Makarevicius, and A. Schlanciauskas: "Heat Transfer in Banks of Tubes in Crossflow of Fluid," Mintis, Vilnius, Lithuania, 1968.
34 Eckert, E. R. G., and R. M. Drake: "Analysis of Heat and Mass Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
35 Whitaker, S.: "Forced Convection Heat-Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and Flow in Packed Bids and Tube Bundles," *AIChE J.,* vol. 18, p. 361, 1972.
36 Kays, W. M.: "Convective Heat and Mass Transfer," pp. 187-190, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
37 Churchill, S. W., and M. Bernstein: A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow, *J. Heut Trunsfer,* vol. 99, pp. 300-306.1977.

38 Nakai, S., and T. Okazaki: Heat Transfer from a Horizontal Circular Wire at Small Reynolds and Grashof Numbers-1 Pure Convection, *Int. J. Heat Mass Trunsfer,* vol. 18, p. 387, 1975.

39 Zukauskas, A.: Heat Transfer from Tubes in Cross Flow, *Adv. Heat Transfer,* vol. 8, pp. 93-160, 1972.

40 Shah, R. K., and A. L. London: "Laminar Flow: Forced Convection in Ducts," Academic Press, New York, 1978.

41 Kalish, S., and 0. E. Dwyer: Heat Transfer to NaK Flowing through Unbaffled Rod Bundles, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 10, p. 1533, 1967.

42 Petukhov, B. S.: Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties, "Advances in Heat Transfer" (J. P. Hartnett and T. F. Irvine, eds.), Academic Press, New York, pp. 504-564, 1970.

43 Achenbach, E.: Heat Transfer from Spheres up to $Re = 6 \times 10^6$, *Proc. Sixth Znt. Heat Trans. Conf.,* vol. 5, Hemisphere Pub. Co., Washington, D.C., pp. 341-346, 1978.

7
Sistemas de Convección Natural

7-l Introducción

Nuestros tratamientos precedentes de transferencia de calor por convección sólo involucran el cálculo de sistemas de convección forzada, en los que el fluido se fuerza en o a través de la superficie de transferencia de calor. La convección natural o libre, se observa como el resultado del movimiento del fluido debido a cambios de densidad que provienen del proceso de calentamiento. Un radiador que se utiliza para calentar una habitación es un ejemplo de un dispositivo practico que transfiere calor por convección libre. El movimiento del fluido en convección libre, ya sea se trate de un gas o un liquido, es el resultado de las fuerzas de flotación impuestas sobre el fluido cuando su densidad cerca de la superficie de transferencia de calor disminuye debido al proceso de calentamiento. Las fuerzas de flotación no estarían presentes si el fluido no sufriera la acción de alguna fuerza externa como la gravedad, aunque la gravedad no es el único tipo de campo de fuerza que puede producir corrientes de convección libre; un fluido encerrado en una máquina rotatoria sufre la acción de un campo de fuerza centrífuga y puede así experimentar corrientes de convección libre, si una o más de las superficies en contacto con el fluido se calentasen. Las fuerzas de flotación que dan lugar a las corrientes de convección libre se llaman fuerzas de cuerpo.

7-2 Transferencia de calor por convección libre en una placa plana vertical

Considérese la placa plana vertical de la Fig. 7-1. Cuando se calienta la placa, se forma una capa límite de convección libre, tal como se muestra. El perfil de velocidad en esta capa límite es bastante diferente del perfil de velocidad en una capa límite de convección forzada. En la pared la velocidad es cero debido a la condición de adherencia;

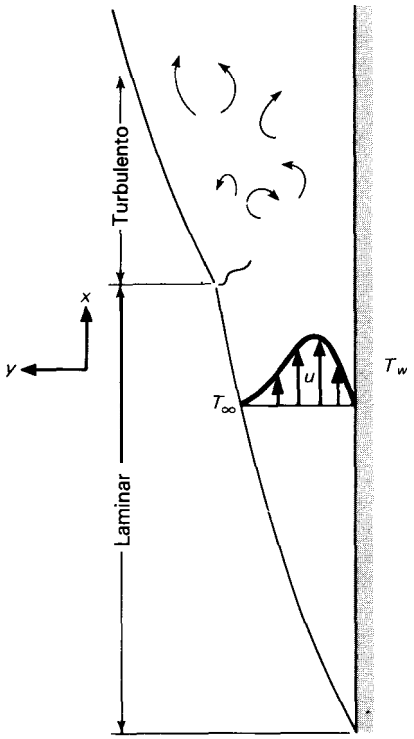


Fig. 7-l Capa límite en una placa plana vertical.

aumenta hasta cierto valor máximo y después disminuye a cero en el borde de la capa límite, ya que las condiciones de "corriente libre" son en reposo en el sistema de convección libre. El desarrollo inicial de la capa límite es laminar; pero a cierta distancia del borde principal, que depende de las propiedades del fluido y de la diferencia de temperatura entre la pared y el medio, se forman corrientes turbulentas y comienza una transición a una capa límite turbulenta. Más lejos en la placa, la capa límite puede volverse turbulenta por completo.

Para analizar el problema de transferencia de calor, primero debemos obtener la ecuación diferencial de movimiento para la capa límite. Para ello, tomamos la coordenada x a lo largo de la placa y la coordenada y perpendicular a la placa, como en los análisis del Cap. 5. La única fuerza nueva que debe considerarse en la derivación es el peso del elemento del fluido. Como antes, igualamos la suma de las fuerzas externas en la dirección x al cambio en el flujo de momento a través del volumen de control $dx\,dy$. Resulta

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7-1}$$

donde el término $-\rho g$ representa la fuerza del peso que se ejerce sobre el elemento. El gradiente de presión en la dirección x resulta del cambio en elevación de la placa. Así

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_\infty g \tag{7-2}$$

En otras palabras, el cambio en la presión sobre una altura *dx es* igual al peso por área unitaria del elemento de fluido. Sustituyendo la Ec. 7-2 en la Ec. 7-l se obtiene

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g(\rho_\infty - \rho) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7-3}$$

La diferencia de densidades $\varrho_\infty - \varrho$ puede expresarse en términos del coeficiente de expansión volumétrica β, definido por

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V_\infty}\frac{V - V_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)}$$

de modo que

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = g\rho\beta(T - T_\infty) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7-4}$$

Esta es la ecuación de movimiento para la capa límite de convección libre. Obsérvese que la solución para el perfil de velocidad exige un conocimiento de la distribución de temperatura. La ecuación de energía para el sistema de convección libre es el mismo que el de un sistema de convección forzado a baja velocidad:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{7-5}$$

El coeficiente de expansión en volumen β puede determinarse a partir de las tablas de propiedades para el fluido específico. Para gases ideales puede calcularse a partir de (véase el Prob. 7-15)

$$\beta = \frac{1}{T}$$

donde T es la temperatura absoluta del gas.

Aun cuando el movimiento'del fluido es el resultado de variaciones de densidad, éstas son bastante pequeñas y puede obtenerse una solución satisfactoria al problema suponiendo flujo -incompresible; esto es, ϱ = constante. Para obtener una solución de la ecuación de movimiento usamos el método integral de análisis similar al utilizado en el problema de convección forzada del Cap. 5. En las Refs. 13, 27 y 32 se han presentado análisis detallados de capa límite.

Para el sistema de convección libre, la ecuación integral de momento se vuelve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2\,dy\right) &= -\tau_w + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy \\ &= -\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big]_{y=0} + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy\end{aligned} \tag{7-6}$$

y observamos que la forma funcional de las distribuciones, tanto de velocidad como de temperatura, debe conocerse para llegar a la solución. Para obtener estas funciones, procedemos en forma muy parecida a la del Cap. 5. Las condiciones siguientes se aplican a la distribución de temperatura:

$$T = T_w \qquad \text{en } y = 0$$
$$T = T_\infty \qquad \text{en } y = \delta$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta$$

de modo que para la distribución de temperatura obtenemos

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{7-7}$$

Tres condiciones para el perfil de velocidad son

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0$$
$$u = o \qquad \text{en } y = \delta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta$$

Puede obtenerse una condición adicional a partir de la Ec. 7-4 observando que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\beta\frac{T_w - T_\infty}{\nu} \qquad \text{en } y = 0$$

Como en el análisis integral para problemas de convección forzada, suponemos que los perfiles de velocidad tienen formas geométricamente similares a diferentes distancias x a lo largo de la placa. Para el problema de convección libre, ahora suponemos que la velocidad puede representarse como una función polinomial dey multiplicada por alguna función arbitraria de x. Así,

$$\frac{u}{u_x} = a + by + cy^2 + dy^3$$

donde u_x es una velocidad ficticia la cual es una función de x. La forma de polinomio cúbico se escoge porque hay cuatro condiciones que satisfacer y éste es el tipo de función más simple que puede usarse. Aplicando las cuatro condiciones al perfil de velocidad que se listaron antes, tenemos

$$\frac{u}{u_x} = \frac{\beta\delta^2 g(T_w - T_\infty)}{4u_x\nu}\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

El término que involucra la diferencia de temperatura, δ^2, y u_x pueden incorporarse a la función u_x de modo que la relación final que se supone para el perfil de velocidad es

$$\frac{u}{u_x} = \frac{Y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \tag{7-8}$$

En la Fig. 7-2 se da una gráfica de la Ec. 7-8. Sustituyendo las Ecs. 7-7 y 7-8 en la Ec. 7-6 y efectuando las integraciones y diferenciaciones se obtiene

$$\frac{1}{105}\frac{d}{dx}(u_x^2\,\delta) = \frac{1}{3}g\beta(T_w - T_\infty)\,\delta - \nu\frac{u_x}{\delta} \tag{7-9}$$

La forma integral de la ecuación de energía para el sistema de convección libre es

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta u(T - T_\infty)\,dy\right] = -\alpha\frac{dT}{dy}\bigg]_{y=0} \tag{7-10}$$

y cuando se insertan en esta ecuación las distribuciones supuestas de velocidad y temperatura, y se llevan a cabo las operaciones, se obtiene

$$\frac{1}{30}(T_w - T_\infty)\frac{d}{dx}(u_x\,\delta) = 2\alpha\frac{T_w - T_\infty}{\delta} \tag{7-11}$$

Es claro que a partir del razonamiento que condujo a la Ec. 7-8 que

$$u_x \sim \delta^2 \tag{7-12}$$

Insertando este tipo de Velación en la Ec. 7-9 se obtiene como resultado que

$$\delta \sim x^{1/4} \tag{7-13}$$

Por tanto, suponemos las variaciones funcionales exponenciales siguientes para u_x y 6:

$$u_x = C_1 x^{1/2} \tag{7-14}$$

$$\delta = C_2 x^{1/4} \tag{7-15}$$

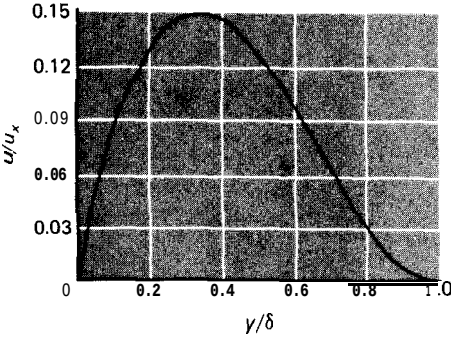


Fig. 7-2 Perfil de velocidad de convección libre expresado por la Ec. 7-8.

Introduciendo estas relaciones en las Ecs. 7-9 y 7-11 se obtiene

$$\frac{5}{420} C_1^2 C_2 x^{1/4} = g\beta(T_w - T_\infty)\frac{C_2}{3} x^{1/4} - \frac{C_1}{C_2}\nu x^{1/4} \tag{7-16}$$

y

$$\frac{1}{40} C_1 C_2 x^{-1/4} = \frac{2\alpha}{C_2} x^{-1/4} \tag{7-17}$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse para las constantes C_1 y C_2 para dar

$$C_1 = 5.17\nu \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/2} \tag{7-18}$$

$$C_2 = 3.93 \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/4} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{-1/4} \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2} \tag{7-19}$$

La expresión resultante para el espesor de la capa límite es

$$\frac{\delta}{x} = 3.93\ \mathrm{Pr}^{-1/2}(0.952 + \mathrm{Pr})^{1/4}\ \mathrm{Gr}_x^{-1/4} \tag{7-20}$$

donde el número de Prandtl $\mathrm{Pr} = \nu/\alpha$ se ha introducido paralelamente con un nuevo grupo adimensional llamado el número de *Grashof* Gr_x:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)x^3}{\nu^2} \tag{7-21}$$

El coeficiente de transferencia de calor puede evaluarse a partir de

$$q_w = -kA \left.\frac{dT}{dy}\right|_w = hA(T_w - T_\infty)$$

Usando la distribución de temperatura de la Ec. 7-7, se obtiene

$$h = \frac{2k}{\delta} \qquad \text{o} \qquad \frac{hx}{k} = \mathrm{Nu}_x = 2\frac{x}{\delta}$$

de modo que la ecuación adimensional para el coeficiente de transferencia de calor se vuelve

$$\mathrm{Nu}_x = 0.508\ \mathrm{Pr}^{1/2}(0.952 + \mathrm{Pr})^{-1/4}\ \mathrm{Gr}_x^{1/4} \tag{7-22}$$

La Ec. 7-22 da la variación del coeficiente de transferencia de calor local a lo largo de la placa vertical. El coeficiente de transferencia de calor promedio puede entonces obtenerse llevando a cabo la integración

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx \tag{7-23}$$

Para la variación expresada por la Ec. 7-22, el coeficiente promedio es

$$\bar{h} = \tfrac{4}{3} h_{x=L} \tag{7-24}$$

El número de Grashof puede interpretarse físicamente como un grupo adimensional que representa la razón de las fuerzas de flotación a las fuerzas viscosasen el sistema de flujo de convección libre. Tiene un papel similar al que jugó el número de Reynolds en sistemas de convección forzada y es la variable fundamental usada coma un criterio para transición de flujo de capa límite de laminar a turbulenta. Para aire en convección libre sobre una placa plana vertical, Eckert y Soehngen [1] han observado que el numero de Grashof crítico es aproximadamente 4 X 10^8. Se pueden observar valores en el. intervalo entre 10^8 y 10^9 para diferentes fluidos y "niveles de turbulencia" del medio.

Gebhart y cols. [13-15] han proporcionado una revisión muy completa de la estabilidad y la transición de capas límite de convección libre.

El análisis anterior de transferencia de calor por convección libre en una placa plana vertical es el caso más simple que se puede tratar matemáticamente, y ha servido para introducir la nueva variable adimensional, el número de Grashof,* el cual es importante en todos los problemas de convección libre. Pero como en algunos problemas de convección forzada, debe contarse con mediciones experimentales para obtener relaciones para transferencia de calor en otras condiciones. Estas condiciones son usualmente aquellas en las que es difícil predecir de un modo analítico los perfiles de temperatura y velocidad. La convección libre turbulenta es un ejemplo importante, justo como es la convección forzada turbulenta, de un área de problemas en la que son necesarios datos experimentales; sin embargo, el problema es más agudo con sistemas de flujo de convección libre que con sistemas de convección. forzada, debido a que las velocidades son en general tan pequeñas que son muy difíciles de medir. A pesar de las dificultades experimentales, se han realizado mediciones de velocidad usando técnicas de burbuja de hidrógeno [26], anemometría de alambre caliente [28] y anemómetros de fibra de cuarzo. Se han obtenido mediciones de campo de temperatura por medio del uso del interferómetro de Zehnder-Mach. El anemómetro de láser [29] proporciona una promesa inusitada para mediciones ulteriores de convección libre debido a que no perturba el campo de flujo.

Un interferómetro indica líneas de densidad constante en un campo de flujo de un fluido. Para un gas en convección libre a baja presión, estas líneas de densidad constante son equivalentes a líneas de temperatura constante. Una vez que se obtiene el campo de temperatura, puede calcularse la transferencia de calor a partir de una superficie en convección libre usando el gradiente de temperatura en la superficie y la conductividad térmica del gas. Se han hecho varios estudios interferométricos de convección libre [l-S], y en las Figs. 7-3 a 7 -6 se muestran fotografías típicas de los campos de flujo. La Fig. 7-3 muestra las líneas de temperatura constante alrededor de una

* La historia no es muy clara en este punto, pero parece que el número de Grashof fue así llamado por Franz Grashof, un profesor de mecánica aplicada en Karlsruhe alrededor de 1863 y uno de los directores fundadores de *Verein deutscher Ingenieure* en 1855. Desarrolló algunas de las primeras fórmulas para flujo de vapor, pero no hizo contribuciones significativas a la convección libre [36].

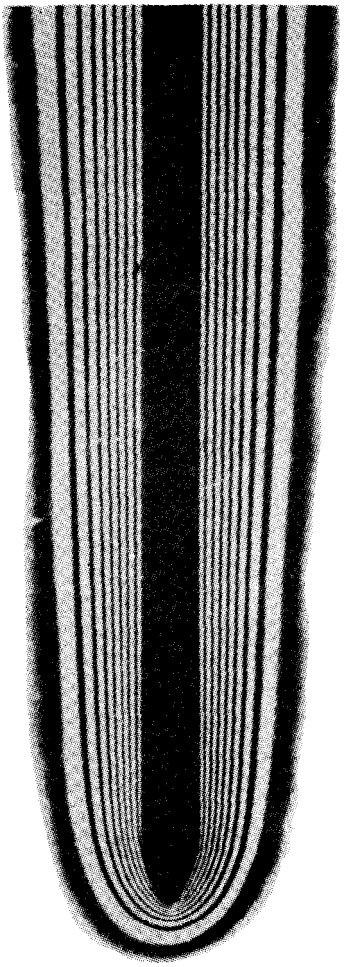


Fig. 7-3 Fotografía de interferómetro mostrando líneas de temperatura constante alrededor de una placa plana vertical caliente en convección libre. ***(Fotografía cortesía de E. Soehngen.)***

placa plana vertical caliente. Obsérvese que las líneas están más próximas cerca de la superficie de la placa, indicando un gradiente de temperatura mayor en esa región. La Fig. 7-4 muestra las líneas de temperatura constante alrededor de un cilindro horizontal caliente en convección libre, y la Fig. 7-5 muestra la interacción de la capa límite entre un grupo de cuatro cilindros horizontales. Se observaría un fenómeno similar para flujo de convección forzada a través de un banco de tubos calientes. Se han efectuado estudios interferométricos para determinar el punto en el que se forman corrientes reversibles en la capa límite de convección libre [1], y estos estudios se han usado para predecir el inicio de la transición a flujo turbulento en sistemas de convección libre.

Se mencionó antes que las velocidades en convección libre son tan pequeñas que para la mayor parte de los sistemas son difíciles de medir sin afectar el campo de flujo por la inserción de un dispositivo de medición. Se da una indicación visual burda de la velocidad de convección libre en la Fig. 7-6, en donde se presenta una onda de la capa

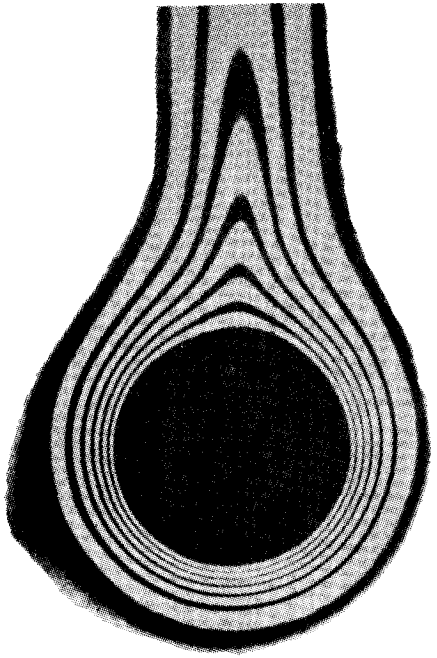


Fig. 7-4 Fotografía de interferómetro mostrando líneas de temperatura constante alrededor de un cilindro horizontal caliente en convección libre. (*Fotografía cortesía de E. Soehngen.*)

límite de convección libre que resulta de un pulso calorífico cerca del borde principal de la placa. Puede observarse que los puntos máximos en las isotermas sufren un retardo de fase y que una línea trazada a través de estos puntos máximos tiene la forma aproximada del perfil de velocidad de convección libre.

Una cantidad de referencias tratan los diversos aspectos teóricos y empíricos de problemas de convección libre. Uno de los tratamientos más extensos es el de Gebhart [13], y el lector interesado puede consultar esta referencia para información adicional.

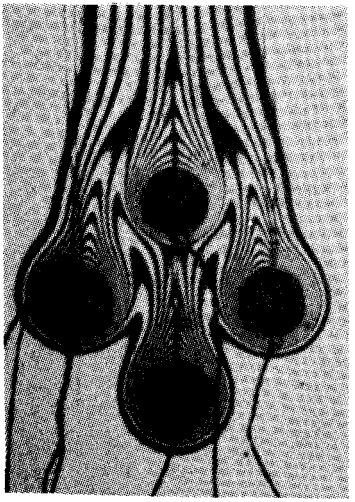


Fig. 7-5 Fotografía de interferómetro mostrando la interacción de capa límite entre cuatro cilindros horizontales calientes en convección libre. (*Fotografía cortesía de E. Soehngen.*)

7-3 Relaciones empíricas para convección libre

A través de los años se ha encontrado que los coeficientes de transferencia de calor por convección libre promedio pueden representarse en la forma funcional siguiente para diversas circunstancias:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_f = C(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^m \tag{7-25}$$

donde el subíndice f indica que las propiedades en los grupos adimensionales se evalúan a la temperatura de la película

$$T_f = \frac{T_\infty + T_w}{2}$$

El producto de los números de Grashof y Prandtl se llama el número de Rayleigh:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} \tag{7-26}$$

La dimensión característica que debe usarse en los números de Nusselt y Grashof depende de la geometrla del problema. Para una placa vertical es la altura de la placa L; para un cilindro horizontal es el diámetro d; y así sucesivamente. En una cantidad de referencias aparecen datos experimentales para problemas de convección libre, con algunos resultados contradictorios. El propósito de las secciones que siguen es dar estos resultados en forma de un resumen que puede usarse con facilidad para propósitos de cálculo. Se usa la forma funcional de la Ec. 7-25 para muchas de estas presentaciones, con los valores de las constantes C y m especificados para cada caso.

7-4 Convección libre en planos y cilindros verticales

Superficies isotérmicas

Para superficies verticales, los números de Nusselt y Grashof se forman con L, la altura de la superficie como la dimensión característica. Si el espesor de la capa llmite no es grande comparado con el diámetro del cilindro, la transferencia de calor puede calcular-

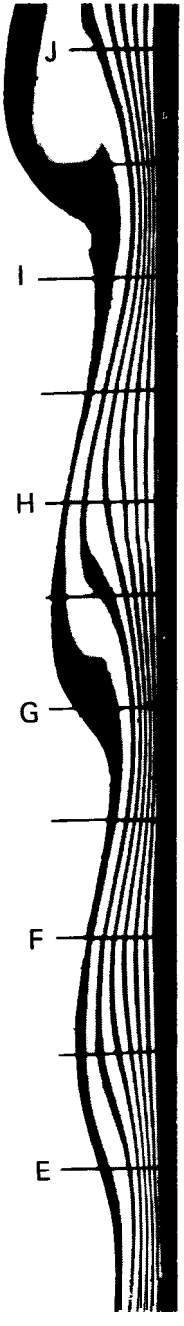


Fig. 7-6 Fotografía de interferómetro mostrando isotermas en una placa plana vertical caliente que resultan de una perturbación periódica de la capa límite. Obsérvense corrimientos de fase en puntos máximos de isotermas. *(De Holman, Gartrell y Soehngen* [3].)

se con las mismas relaciones que se usaron para placas verticales. El criterio general es que un cilindro vertical puede tratarse como una placa plana vertical [13] cuando

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{\mathrm{Gr}_L^{1/4}} \tag{7-27}$$

donde D es el diámetro del cilindro. Para superficies isotérmicas, los valores de las constantes están en la Tabla 7-1 con las referencias apropiadas anotadas para consulta ulterior. Se dirige la atención del lector a los dos conjuntos de constantes que se dan para el caso turbulento $(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f > 10^9)$. Aunque puede parecer que haya una diferencia decidida en estas constantes, Warner y Arpaci [22] compararon las dos relaciones con datos experimentales indicando que ambos conjuntos de constantes se ajustan a los datos disponibles. Hay algunas indicaciones a partir del trabajo analítico de Bayley [16], así como de mediciones de flujo de calor de la Ref. 22, de que la relación

$$\mathrm{Nu}_f = 0.10(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^{1/3}$$

puede ser preferible.

Churchill y Chu [71] han proporcionado relaciones más complicadas y se aplican sobre intervalos mayores del número de Rayleigh:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0.68 + \frac{0.670\,\mathrm{Ra}^{1/4}}{[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \quad \text{para } \mathrm{Ra}_L < 10^9 \tag{7-28}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{0.387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}} \quad \text{para } 10^{-1} < \mathrm{Ra}_L < 10^{12} \tag{7-29}$$

La Ec. 7-28 es también una representación satisfactoria para flujo de calor constante. Las propiedades para estas ecuaciones se evalúan a la temperatura de la película.

Flujo de calor constante

En las Refs. 25, 26 y 39 se han comunicado experimentos extensos para convección libre a partir de superficies verticales e inclinadas en agua, bajo condiciones de flujo de calor constante. En estos experimentos, los resultados se presentan en términos de un número de Grashof modificado, Gr^*:

$$\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr}, \quad \mathrm{Nu}_x = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} \tag{7-30}$$

donde q_w es el flujo de calor de la pared. Los coeficientes de transferencia de calor locales fueron correlacionados por la relación siguiente para el intervalo laminar:

$$\mathrm{Nu}_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0.60(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr}_f)^{1/5} \qquad 10^5 < \mathrm{Gr}_x^* < 10^{11};\ q_w = \text{constante} \tag{7-31}$$

Tabla 7-1 Constantes para usarse con la Ec. 7-25 para superficies isotérmicas

Geometría	Gr_f Pr,	c	*m*	*Ref(s).*
Planos y cilindros verticales	10^{-1}–10^{4}	la Fig. 7-7	la Fig. 7-7	4
	10^{4}–10^{9}	0.59	$\frac{1}{4}$	4
	10^{9}–10^{13}	0.021	$\frac{2}{5}$	30
	10^{9}–10^{13}	0.10	$\frac{1}{3}$	22, 16t
Cilindros horizontales	**O-10-5**	0.4	0	4
	10^{-5}–10^{4}	la Fig. 7-8	la Fig. 7-8	4
	10^{4}–10^{9}	0.53		4
	10^{9}–10^{12}	0.13		4
Superficie superior de placas calientes o superficie inferior de placas frías	2 x 10^{4}–8 x 10^{6}	0.54	3	44, 52
Superficie superior de placas calientes o superficie inferior de placas frías	8 x 10^{6}–10^{11}	0.15	$\frac{1}{3}$	44, 52
Superficie inferior de placas calientes o superficie superior de placas frías	10^{5}–10^{11}	0.58	$\frac{1}{5}$	44, 64

*Preferido

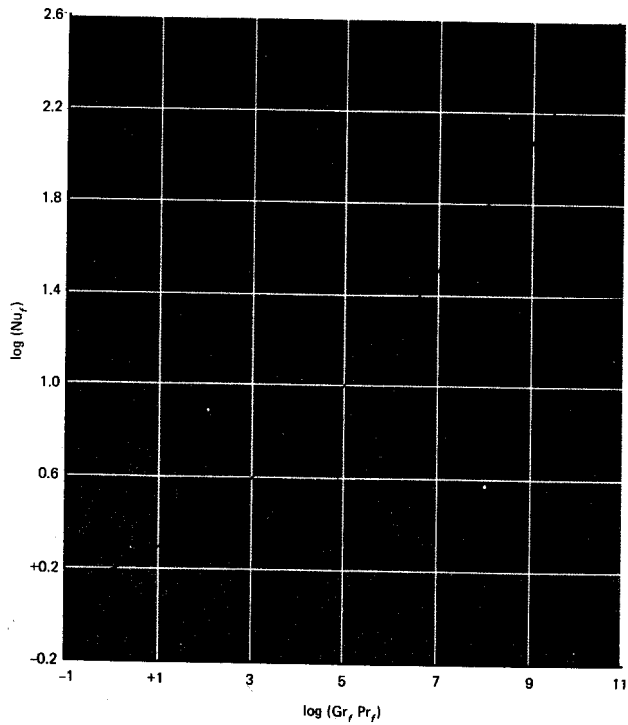


Fig. 7-7 Correlación de transferencia de calor por convección libre para transferencia de calor a partir de placas verticales calientes, de acuerdo a la Ref. 4.

Debe observarse que el criterio para flujo laminar expresado en términos de Gr^* no es el mismo que el que se expresa en terminos de Gr_x Se observo que la transición de la capa lfmite comienza entre $Gr^* Pr = 3 \times 10^{12}$ y 4×10^{13}, y termina entre 2×10^{13} y 10^{14}. Para $Gr^* Pr = 10^{14}$ estaba presente flujo turbulento desarrollado por completo y los experimentos se extendieron hasta $Gr^* Pr = 10^{16}$. Para la región turbulenta, los coeficientes de transferencia de calor locales se correlacionaron con

$$Nu_x = 0.17(Gr_x^* Pr)^{1/4} \qquad 2 \times 10^{13} < Gr_x^* Pr < 10^{16};\ q_w = \text{constante} \quad (7\text{-}32)$$

Todas las propiedades en las Ecs. 7-31 y 7-32 se evalúan a la temperatura local de película. Aunque estos experimentos se llevaron a cabo para agua, se ha mostrado que las correlaciones resultantes funcionan también para el aire. El coeficiente de transfe-

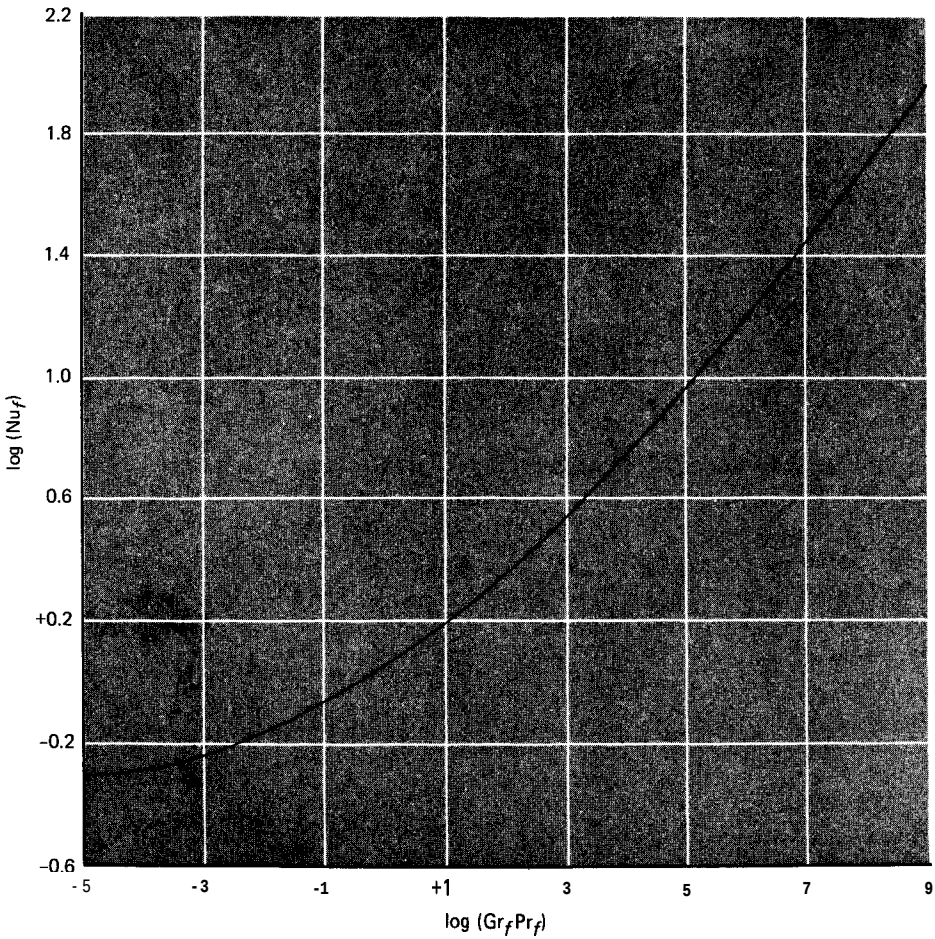


Fig. 7-8 Correlación de transferencia de calor por convección libre para transferencia calor a partir de cilindros horizontales calientes, de acuerdo con la Ref. 4.

rencia de calor promedio para el caso de flujo de calor constante no puede evaluarse de la Ec. 7-24 sino que debe obtenerse a través de una aplicación separada de la Ec. 7-23. Así, para la región laminar, usando la Ec. 7-31 para evaluar h_x,

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx$$

$$\bar{h} = \tfrac{5}{4}h_{x=L} \qquad q_w = \text{constante}$$

En este punto podemos observar la relación entre las correlaciones en la forma de la Ec. 7-25 y aquellas que acabamos de presentar en términos de $\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Nu}_x$. Escribiendo la Ec. 7-25 como una forma de transferencia de calor *local* se obtiene

$$\mathrm{Nu}_x = C(\mathrm{Gr}_x\,\mathrm{Pr})^m \tag{7-33}$$

Insertando $\mathrm{Gr}_x = \mathrm{Gr}_x^*/\mathrm{Nu}_x$ da

$$\mathrm{Nu}^{1+m} = C(\mathrm{Gr}_x^*\,\mathrm{Pr})^m$$

o

$$\mathrm{Nu}_x = C^{1/(1+m)}(\mathrm{Gr}_x^*\,\mathrm{Pr})^{m/(1+m)} \tag{7-34}$$

Así, cuando los valores "característicos" de m para flujo laminar y turbulento se comparan con los exponentes en Gr_x^*, obtenemos

laminar, $m = \frac{1}{4}$: $\qquad \dfrac{m}{1+m} = \dfrac{1}{5}$

turbulento, $m = \frac{1}{3}$: $\qquad \dfrac{m}{1+m} = \dfrac{1}{4}$

Mientras que la formulación en Gr* es más fácil de emplear para el caso de flujo de calor constante, vemos que los exponentes característicos se ajustan muy bien dentro del esquema que se presenta para las correlaciones de superficie isotérmica.

También es interesante observar la variación de h_x con x en los dos regímenes característicos. Para el intervalo laminar m = $\frac{1}{4}$ y de la Ec. 7-25

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/4} = x^{-1/4}$$

En el régimen turbulento m = $\frac{1}{3}$ y obtenemos

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/3} = \text{constante con } x$$

De modo que cuando se encuentra convección libre turbulenta, el coeficiente de transferencia de calor local es esencialmente constante con x.

Churchill y Chu [71] muestran que la Ec. 7-28 puede modificarse para aplicarse al caso de flujo de calor constante, si el número de Nusselt promedio está basado en el

flujo de calor de la pared y la diferencia de temperatura en el centro de la placa ($x = L/2$). El resultado es

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L^{1/4}(\overline{\mathrm{Nu}}_L - 0.68) = \frac{0.67(\mathrm{Gr}_L^* \mathrm{Pr})^{1/4}}{[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \tag{7-35}$$

donde $\overline{\mathrm{Nu}}_L = q_w L/(k\,\overline{\Delta T})$ y $\overline{\Delta T} = T_w$ en $L/2 - T_\infty$.

Ejemplo 7-I

En un lugar de una planta cerca de un horno, un flujo de energía radiante de 800 $\mathrm{W/m^2}$ incide sobre una superficie metálica vertical de 3.5 m de alto y 2 m de ancho. El metal está aislado en el lado posterior y pintado de negro de modo que toda la radiación incidente se pierde por convección libre hacia el aire circundante a 30 °C. ¿Qué temperatura promedio alcanzar& la placa?

Solución

Tratamos este problema como uno de flujo de calor constante en la superficie. Como no conocemos la temperatura de la superficie, debemos hacer una estimación para determinar T_f y las propiedades del aire. Un valor ***aproximado*** de h para problemas de convección libre ***es*** 10 $\mathrm{W/m^2\,°C}$ y así, ***aproximadamente,***

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} \approx \frac{800}{10} = 80\ ^\circ\mathrm{C}$$

Entonces

$$T_f \approx \tfrac{80}{2} + 30 = 70\ ^\circ\mathrm{C} = 343\ \mathrm{K}$$

A 70 °C las propiedades del aire son

$$\nu = 2.005 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2.92 \times 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$$

$$k = 0.0295\ \mathrm{W/m\cdot °C} \qquad \mathrm{Pr} = 0.7$$

De la Ec. 7-30, con $x = 3.5$ m,

$$\mathrm{Gr}_x^* = \frac{g\beta q_w x^4}{k\nu^2} = \frac{(9.8)(2.92 \times 10^{-3})(800)(3.5)^4}{(0.0295)(2.005 \times 10^{-5})^2} = 2.90 \times 10^{14}$$

Por tanto, podemos usar la Ec. 7-32 para evaluar h_x:

$$h_x = \frac{k}{x}(0.17)(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr})^{1/4}$$

$$= \frac{0.0295}{3.5}(0.17)(2.9 \times 10^{14} \times 0.7)^{1/4}$$

$$= 5.41\ \mathrm{W/m^2\cdot °C} \quad [0.953\ \mathrm{Btu/h\cdot pie^2\cdot °F}]$$

En la transferencia de calor turbulenta gobernada por la Ec. 7-32, observamos que

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} \sim (\mathrm{Gr}_x^*)^{1/4} \sim (x^4)^{1/4}$$

o sea que h_x no varía con x, y podemos tomar éste como el valor promedio. El valor de $h = 5.41$ $\mathrm{W/m^2\cdot °C}$ es menos que el valor aproximado que usamos para estimar T_f. Recalculando ΔT, obtenemos

$$\Delta T = \frac{q_w}{h} = \frac{800}{5.41} = 148\ ^\circ\text{C}$$

Nuestra nueva temperatura de película sería

$$T_f = 30 + \frac{148}{2} = 140\ ^\circ\text{C}$$

A 104 °C las propiedades del aire son

$$\nu = 2.354 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2.65 \times 10^{-3}/\text{K}$$

$$k = 0.0320\ \text{W/m}\cdot^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0.695$$

Entonces

$$\text{Gr}_x^* = \frac{(9.8)(2.65 \times 10^{-3})(800)(3.5)^4}{(0.0320)(2.354 \times 10^{-5})^2} = 1.758 \times 10^{14}$$

y h_x se calcula a partir de

$$h_x = \frac{k}{x}(0.17)(\text{Gr}_x^* \text{Pr})^{1/4}$$

$$= \frac{(0.0320)(0.17)}{3.5}[(1.758 \times 10^{14})(0.695)]^{1/4}$$

$$= 5.17\ \text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}\ [0.91\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot^\circ\text{F}]$$

Nuestra nueva diferencia de temperatura se calcula como

$$\Delta T = (T_w - T_\infty)_{av} = \frac{q_w}{h} = \frac{800}{5.17} = 155\ ^\circ\text{C}$$

La temperatura de pared promedio es por tanto

$$T_{w,av} = 155 + 30 = 185\ ^\circ\text{C}$$

Otra iteración en el valor de T_f no está garantizada por la mejoría en exactitud que resultaría.

Ejemplo 7-2

Una placa grande vertical de 4.0 m de altura se mantiene a 60 °C y se expone a aire atmosférico a 10 °C Calcule la transferencia de calor si la placa tiene 10 m de ancho.

Solución

Primero determinamos la temperatura de pared como

$$T_f = \frac{60 + 10}{2} = 35\ ^\circ\text{C} = 308\ \text{K}$$

Las propiedades de interés son entonces

$$\beta = \frac{1}{308} = 3.25 \times 10^{-3} \qquad k = 0.02685$$

$$\nu = 17.47 \times 10^{-6} \qquad \text{Pr} = 0.7$$

$$\text{Gr Pr} = \frac{(9.8)(3.25 \times 10^{-3})(60 - 10)(4)^3}{(17.47 \times 10^{-6})^2} 0.7$$
$$= 3.339 \times 10^{11}$$

Entonces podemos usar la Ec. 7-29 para obtener

$$\overline{\text{Nu}}^{1/2} = 0.825 + \frac{(0.387 \text{X} 3.339 \times 10^{11})^{1/6}}{[1 + (0.492/0.7)^{9/16}]^{8/27}}$$
$$= 27.82$$
$$\text{Nu} = 773.95$$

El coeficiente de transferencia de calor es entonces

$$\bar{h} = \frac{(773.95)(0.02685)}{4.0} = 5.195 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor es

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty)$$
$$= (5.195)(4)(10)(60 \quad 10) = 10\ 390 \text{ W}$$

Como una alternativa, podríamos emplear la relación más sencilla

$$\text{Nu} = 0.10(\text{Gr Pr})^{1/3}$$
$$= (0.10)(3.339 \times 10^{11})^{1/3} = 693.75$$

que da un valor alrededor de 10% menor que la Ec. 7-29.

7-5 Convección libre a partir de cilindros horizontales

Los valores de las constantes c y m para cilindros están dadas en la Tabla 7-1, de acuerdo con la Ref. 4. Churchill y Chu [70] dan una expresión más complicada para usarse sobre un amplio intervalo de Gr Pr:

$$\text{Nu}^{1/2} = 0.60 + 0.387 \left\{ \frac{\text{Gr Pr}}{[1 + (0.559/\text{Pr})^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/6} \quad \text{para } 10^{-5} < \text{Gr Pr} < 10^{12} \tag{7-36}$$

Se dispone de una ecuación más sencilla de la Ref. 70, pero está restringida al intervalo laminar de $10^{-6} < \text{Gr Pr} < 10^9$:

$$\text{Nu}_d = 0.36 + \frac{0.518(\text{Gr}_d \text{Pr})^{1/4}}{[1 + (0.559/\text{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \tag{7-37}$$

Las propiedades en las Ecs. 7-35 y 7-36 se evalúan a la temperatura de la película.

La transferencia de calor a partir de cilindros horizontales hacia metales líquidos puede calcularse de la Ref. 46:

$$\mathrm{Nu}_d = 0.53(\mathrm{Gr}_d\ \mathrm{Pr}^2)^{1/4} \tag{7-38}$$

7-6 Convección libre a partir de placas horizontales

El coeficiente de transferencia de calor promedio de placas planas horizontales se calcula con la Ec. 7-25 y las constantes que se dan en la Tabla 7-1. La dimensión característica L que se usa con estas relaciones es la longitud de un lado para un cuadrado, la media de las dos dimensiones para una superficie rectangular y $0.9d$ para un disco circular.

Planos asimétricos

Cuando ocurre convección libre en superficies horizontales que no son cuadrados, rectángulos o círculos, los resultados de las Refs. 52 y 53 indican que la dimensión característica puede calcularse con

$$L = \frac{A}{P} \tag{7-39}$$

donde A es el área y P el perímetro mojado de la superficie.

Sólidos rectangulares

King [31] ha analizado la transferencia de calor a partir de un gran número de placas, cilindros, esferas y bloques, Se ha encontrado que el coeficiente de transferencia de calor promedio puede correlacionarse en la forma de la Ec. 7-25 con C = 0.60 y m = $\frac{1}{4}$ para $10^4 < \mathrm{Gr\ Pr} < 10^9$. En esta relación, la dimensión característica para bloques rectangulares se calcula a partir de

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_h} + \frac{1}{L_v} \tag{7-40}$$

donde L_h y L_v son las dimensiones horizontal y vertical, respectivamente. Esta relación deberla usarse solo en ausencia de datos específicos para la forma particular del cuerpo.

Ejemplo 7-3

Un calentador horizontal de 2.0 cm de diámetro se mantiene a una temperatura de superficie de 38 °C y sumergido en agua a 27 "C. Calcule la pérdida de calor por convección libre por unidad de longitud del calentador.

Solución

La temperatura de película es

$$T_f = \frac{38 + 27}{2} = 32.5\ ^\circ\mathrm{C}$$

Del Apéndice A las propiedades del agua son

$$k = 0.630 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C},$$

y el siguiente término es particularmente útil para obtener el producto Gr Pr cuando está multiplicado por d^3 AT:

$$\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k} = 2.48 \times 10^{10} \quad [1/\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}]$$

$$\text{Gr Pr} = (2.48 \times 10^{10})(38 \quad 27)(0.02)^3 = 2.18 \times 10^6$$

Usando la Tabla 7-1, obtenemos C = 0.53 y $m = \frac{1}{4}$, de modo que

$$\text{Nu} = (0.53)(2.18 \times 10^6)^{1/4} = 38.425$$

$$h = \frac{(38.425)(0.63)}{0.02} = 1210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor es entonces

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_w - T_\infty)$$
$$= (1210)\pi(0.02)(38 - 27) = 836.3 \text{ W/m}$$

7-7 Convección libre a partir de superficies inclinadas

Fujii e Imura [44] han realizado extensos experimentos para placas calientes en agua a diferentes ángulos de inclinación. El ángulo que hace la placa con la vertical se designa θ, con ángulos positivos para indicar que la superficie del calentador está orientada hacia abajo, como se muestra en la Fig. 7-9. Para la placa inclinada orientada hacia abajo con flujo de calor aproximadamente constante, se obtuvo la siguiente correlación para el número de Nusselt promedio:

$$\overline{\text{Nu}}_e = 0.56 (\text{Gr}_e \text{ Pr}, \cos\theta)^{1/4} \qquad \theta < 88^\circ; \; 10^5 < \text{Gr}, \text{Pr}, \cos\theta < 10^{11} \qquad (7\text{-}41)$$

En la Ec. 7-41 todas las propiedades, excepto β, se evalúan a la temperatura de referencia T_e definida por

$$T_e = T_w - 0.25(T_w - T_\infty) \qquad (7\text{-}42)$$

donde T_w es la temperatura de pared *media* y T_∞ es la temperatura de corriente libre;

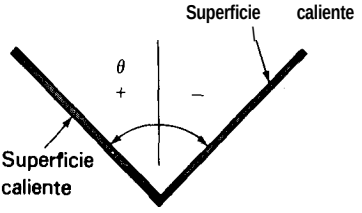


Fig. 7-9 Sistema de coordenadas para placas inclinadas.

β se evalúa a una temperatura de $T_\infty + 0.25\ (T_w - T_\infty)$. Para placas orientadas hacia abajo casi horizontales, esto es, $88° \leq \theta < 90°$, se obtuvo una relación adicional como

$$\mathrm{Nu}_e = 0.58\ (\mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e)^{1/5} \qquad 10^6 < \mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e < 10^{11} \tag{7-43}$$

Para una placa inclinada con la superficie caliente orientada hacia arriba, las correlaciones empíricas se vuelven más complicadas. Para ángulos entre -15 y $-75°$ una correlación apropiada es

$$\overline{\mathrm{Nu}}_e = 0.14[(\mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e)^{1/3} - (\mathrm{Gr}_c\ \mathrm{Pr}_e)^{1/3}] + 0.56(\mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e\ \cos\theta)^{1/4} \tag{7-44}$$

para el intervalo $10^5 \leq \mathrm{Gr}_e\ \mathrm{Pr}_e \cos\theta < 10^{11}$. La cantidad Gr_c es una relación crítica de Grashof que indica cuándo el número de Nusselt comienza a separarse de la relación laminar de la Ec. 7-41 y se da en la siguiente tabulación:

θ, Grados	Gr_c
-15	5×10^9
-30	2×10^9
-60	10^9
-75	10^9

Para $\mathrm{Gr}_e < \mathrm{Gr}_c$, el primer término de la Ec. 7-44 se desprecia. Vliet [39] y Pera y Gebhart [45] dan información adicional. Hay cierta evidencia que indica que las relaciones anteriores también pueden aplicarse a superficies a temperatura constante.

Mediciones experimentales con aire sobre superficie con flujo de calor constante [51] han mostrado que la Ec. 7-31 puede emplearse para la región laminar, si reemplazamos Gr_x^* por $\mathrm{Gr}_x^* \cos\theta$ tanto para superficies calientes orientadas hacia arriba como hacia abajo. En la región turbulenta con aire, se obtuvieron las correlaciones empíricas siguientes:

$$\mathrm{Nu}_x = 0.17(\mathrm{Gr}_x^*\ \mathrm{Pr})^{1/4} \qquad 10^{10} < \mathrm{Gr}_x^*\ \mathrm{Pr} < 10^{15} \tag{7-45}$$

donde Gr_x^* es el mismo que para la placa vertical cuando la superficie caliente está orientada hacia arriba. Cuando está orientada hacia abajo, Gr_x^* se reemplaza por $\mathrm{Gr}^* \cos^2\theta$. La Ec. 7-45 se reduce aproximadamente a la relación recomendada en la Tabla 7-1 para una placa vertical isotérmica.

Para cilindros inclinados los datos de la Ref. 73 indican que la transferencia de calor laminar bajo condiciones de flujo de calor constante se puede calcular con la siguiente relación:

$$\mathrm{Nu}_L = [0.60 + 0.488(\mathrm{sen}\ \theta)^{1.03}](\mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(\mathrm{sen}\ \theta)^{1.75}} \quad \text{para } \mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr} < 2 \times 10^8 \tag{7-46}$$

donde θ es el ángulo que hace el cilindro con la vertical; esto es, $0°$ corresponde a un cilindro vertical. Las propiedades se evalúan a la temperatura de película, excepto β, que se evalúa en condiciones ambientales.

Subsisten incertidumbres en la predicción de convección libre a partir de superficies inclinadas, y para las relaciones empíricas anteriores, no es rara una dispersión de ± 20% en los datos experimentales.

7-8 Fluidos no newtonianos

Cuando la relación de viscosidad de esfuerzo cortante del fluido no obedece la expresión newtoniana sencilla de la Ec. 5-1, no se aplican las ecuaciones anteriores para transferencia de calor por convección libre. Los polímeros y lubricantes viscosos en extremo son ejemplos de fluidos con comportamiento no newtoniano. Se han llevado a cabo estudios experimentales y analíticos exitosos con estos fluidos, pero los resultados son muy complicados. El lector interesado debería consultar las Refs. 48 y 50 para información en detalle de este tema.

Ejemplo 7-4

Una tubería horizontal de 1 pie (0.3048 m) de diámetro se mantiene a una temperatura de 250 °C en una habitación, en la que el aire ambiente está a 15 °C. Calcule la pérdida de calor por convección libre por metro de longitud.

Solución

Primero determinamos el producto de los números de Grashof y Prandtl y después seleccionamos las constantes apropiadas de la Tabla 7-1 para utilizarse con la Ec. 7-25. Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{250 + 15}{2} = 132.5\ ^\circ\text{C} = 405.5\ \text{K}$$

$$k = 0.03406\ \text{W/m}\cdot^\circ\text{C} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{405.5} = 2.47 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

$$\nu = 26.26 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0.687$$

$$\text{Gr}_d\,\text{Pr} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)d^3}{\nu^2}\,\text{Pr}$$

$$= \frac{(9.8)(2.47 \times 10^{-3})(250 - 15)(0.3048)^3(0.687)}{(26.26 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 1.605 \times 10^{8}$$

De la Tabla 7-1, $C = 0.53$ y $m = \frac{1}{4}$, de modo que

$$\text{Nu}_d = 0.53(\text{Gr}_d\,\text{Pr})^{1/4} = (0.53)(1.605 \times 10^{8})^{1/4} = 59.7$$

$$h = \frac{k\,\text{Nu}_d}{d} = \frac{(0.03406)(59.7)}{0.3048} = 6.67\ \text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}\ \ 11.175\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot^\circ\text{F}]$$

La transferencia de calor por unidad de longitud se calcula entonces a partir de

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_w - T_\infty) = (6.67)\pi(0.3048)(250 - 15) = 1.50\ \text{kW/m}\quad [1560\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}\ 1$$

Como una alternativa, podríamos emplear la expresión más compleja, la Ec. 7-36, para resolver el problema. El número de Nusselt se calcularía entonces como

$$\overline{Nu}^{1/2} = 0.60 + 0.387 \left\{ \frac{1.605 \times 10^8}{[1 + (0.559/0.687)^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/6}$$

$$Nu = 65.13$$

o sea, **un valor alrededor de 9% superior.**

7-9 Ecuaciones simplificadas para aire

En la Tabla 7-2 se dan ecuaciones simplificadas para el coeficiente de transferencia de calor á partir de diversas superficies hacia aire, a presión atmosférica y temperaturas moderadas. Estas relaciones pueden extenderse a presiones superiores e inferiores multiplicando por los siguientes factores:

$$\left(\frac{p}{101.32}\right)^{1/2} \quad \text{para casos laminares}$$

$$\left(\frac{p}{101.32}\right)^{2/3} \quad \text{para casos turbulentos}$$

Tabla 7-2 Ecuaciones simplificadas para convección libre a partir de diversas superficies hacia aire a presión atmosférica, adaptado de la Tabla 7-l

Superficie	*Laminar* $10^4 < Gr_f Pr, < 10^9$	*Turbulento,* $Gr_f Pr_f > 10^9$
Plano o cilindro vertical	$h = 1.42 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 0.95(\Delta T)^{1/3}$
Cilindro horizontal	$h = 1.32 \left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4}$	$h = 1.24(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal		
Placa caliente hacia arriba o placa fría hacia abajo	$h = 1.32 \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1.43(\Delta T)^{1/3}$
Placa caliente hacia abajo o placa fría hacia arriba	$h = 0.61 \left(\frac{\Delta T}{L^2}\right)^{1/5}$	

donde h = coeficiente de transferencia de calor, $W/m^2 \cdot °C$
$\Delta T = T_w - T_\infty$, °C
L = dimensión vertical u horizontal, m
d = diámetro, m

donde p es la presión en kilonewtons por metro cuadrado. Debe tenerse cuidado en el uso de estas relaciones simplificadas ya que solamente son aproximaciones de las ecuaciones establecidas antes más precisas.

Ejemplo 7-5

Calcule la transferencia de calor para las condiciones del Ej. 7-4 usando las relaciones simplificadas de la Tabla 7-2.

Solución

El coeficiente de transferencia de calor está expresado por

$$h = 1.32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4} = 1.32\left(\frac{250-15}{0.3048}\right)^{1/4}$$
$$= 6.96\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor es entonces

$$\frac{q}{L} = (6.96)\pi(0.3048)(250-15) = 1.57\ \text{kW/m}$$

Obsérvese que la relación simplificada da un valor aproximadamente 4% superior que la Ec. 7-25.

7-10 Convección libre a partir de esferas

Yuge [5] recomienda la relación empírica siguiente para transferencia de calor por convección libre a partir de esferas hacia aire:

$$\text{Nu}_f = \frac{hd}{k_f} = 2 + 0.392\ \text{Gr}_f^{1/4} \quad \textbf{para } 1 < \text{Gr}_f < 10^5 \tag{7-47}$$

Esta ecuación puede modificarse por la introducción del número de Prandtl para dar

$$\text{Nu}_f = 2 + 0.43\ (\text{Gr}_f\ \text{Pr}_f)^{1/4} \tag{7-48}$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura de la película, y se espera que esta relación sea aplicable sobre todo a cálculos para convección libre en gases. Sin embargo, en ausencia de información más específica también puede usarse para líquidos. Podemos observar que para valores muy pequeños del producto de los números de Grashof y Prandtl el número de Nusselt se acerca al valor de 2.0. Esto es el valor que se obtendría para conducción pura a través de un fluido estancado infinito alrededor de la esfera.

7-11 Convección libre en espacios cerrados

Los fenómenos de flujo por convección libre en el interior de un espacio cerrado son ejemplos interesantes de sistemas de fluidos muy complejos que pueden dar soluciones

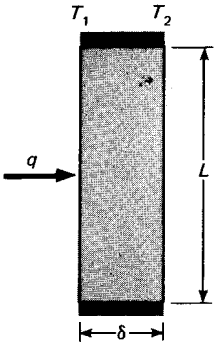


Fig. 7-10 Nomenclatura para convección libre en espacios cerrados verticales.

analíticas, empíricas y numéricas. Considérese el sistema mostrado en la Fig. 7-10, donde un fluido está contenido entre dos placas verticales separadas por la distancia 6. Cuando se imprime la diferencia de temperatura $AT_{,,,} = T_1 - T_2$ en el fluido, ocurrirá transferencia de calor con las regiones de flujo aproximadas que se muestran en la Fig. 7-11, de acuerdo con MacGregor y Emery [18]. En esta figura, el número de Grashof se calcula como

$$\mathrm{Gr}_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2} \tag{7-49}$$

A números de Grashof muy bajos, hay corrientes de convección libre muy pequeñas y la transferencia de calor ocurre principalmente por conducción a través de la capa de

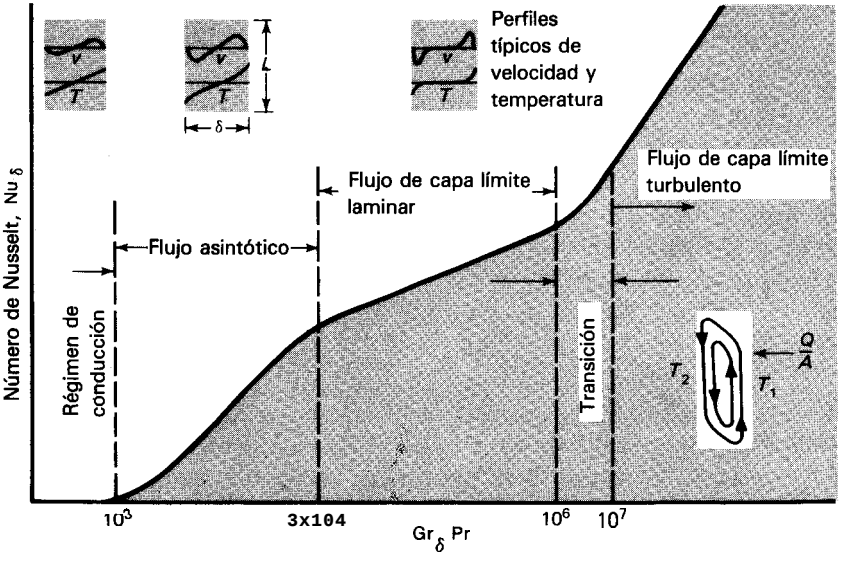


Fig. 7-11 Diagrama esquemático y regímenes de flujo de la capa de convección vertival, de acuerdo con la Ref. 18.

fluido. A medida que aumenta el número de Grashof, se encuentran diferentes regímenes de flujo, como se muestra, con un aumento progresivo en transferencia de calor tal como lo expresa el número de Pdusselt

$$\mathrm{Nu}_\delta = \frac{h\delta}{k}$$

Aunque subsisten aún algunas cuestiones abiertas, los experimentos de la Ref. 18 pueden usarse para predecir la transferencia de calor a diversos líquidos bajo condiciones de flujo de calor constante. Las relaciones empíricas obtenidas fueron

$$\mathrm{Nu}_\delta = 0.42\ (\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^{1/4}\ \mathrm{Pr}^{0.012} \left(\frac{L}{\delta}\right)^{-0.30} \qquad \begin{array}{l} q_w = \text{constante} \\ 10^4 < \mathrm{Gr,\ Pr} < 10^7 \\ 1 < \mathrm{Pr} < 20{,}000 \\ 10 < L/\delta < 40 \end{array} \qquad (7\text{-}50)$$

$$\mathrm{Nu}_\delta = 0.046\ (\mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr})^{1/3} \qquad \begin{array}{l} q_w = \text{constante} \\ 10^6 < \mathrm{Gr}_\delta\ \mathrm{Pr} < 10^9 \\ 1 < \mathrm{Pr} < 20 \\ 1 < L/\delta < 40 \end{array} \qquad (7\text{-}51)$$

El flujo de calor se calcula como

$$\frac{q}{A} = q_w = h(T_1 - T_2) = \mathrm{Nu}_\delta \frac{k}{\delta}(T_1 - T_2) \qquad (7\text{-}52)$$

Los resultados se expresan a veces en términos de una *conductividad térmica aparente.* o efectiva k_e, definida por

$$\frac{q}{A} = k_e \frac{T_1 - T_2}{\delta} \qquad (7\text{-}53)$$

Por comparación de las Ecs. 7-52 y 7-53, vemos que

$$\mathrm{Nu}_\delta \equiv \frac{k_e}{k} \qquad (7\text{-}54)$$

En la industria de la construcción, el coeficiente de transferencia de calor a través de un intervalo de aire se expresa a veces en términos del valor R (véase la Sec. 2-3), de modo que

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{R}$$

En términos del tratamiento precedente, el valor R sería

$$R = \frac{\delta}{k_e} \qquad (7\text{-}55)$$

La transferencia de calor en espacios cerrados horizontales involucra dos situaciones distintas. Si la placa superior se mantiene a una temperatura superior a la de la placa inferior, el fluido de menor densidad está encima del fluido de mayor densidad y no ocurrirán corrientes de convección. En este caso la transferencia de calor a través del espacio será solamente por conducción y $\mathbf{Nu}_\delta = 1.0$, donde δ es aún la distancia de separación entre las placas. El segundo caso, mas interesante, ocurre cuando la placa inferior tiene una temperatura mayor que la placa superior. Para valores de Gr, por abajo de 1700, aproximadamente, se observa también conducción pura y $\mathbf{Nu}_\delta = 1.0$. Cuando comienza la convección, se forma un patrón de celdas hexagonales como se muestra en la Fig. 7-12. Estos patrones se llaman celdas de Benard [SS]. La turbulencia comienza alrededor de Gr, = 50 000 y destruye el patrón celular.

Dropkin y Somerscales [12] han tratado la convección libre en recintos inclinados. Evans y Stefany [9] han mostrado que el calentamiento o enfriamiento por convección natural transiente en recintos cilíndricos horizontales o verticales y puede calcularse con

$$\mathbf{Nu}_f = 0.55\ (\mathbf{Gr}_f\,\mathbf{Pr}_f)^{1/4} \tag{7-56}$$

para el intervalo $0.75 < L/d < 2.0$. El número de Grashof se forma con la longitud del cilindro L.

El análisis y los experimentos de la Ref. 43 indican que es posible representar la conductividad térmica efectiva para fluidos entre esferas concéntricas con la relación

$$\frac{k_e}{k} = 0.228\ (\mathbf{Gr}_\delta\,\mathbf{Pr})^{0.226} \tag{7-57}$$

donde ahora el espaciamiento es $\delta = r_0 - r_i$. La conductividad térmica efectiva expresada por la Ec. 7-57 es para usarse con la relación convencional para conducción en estado estacionario en un casquete esférico:

$$q = \frac{4\pi k r_i r_o\, AT}{r_o - r_i} \tag{7-58}$$

La Ec. 7-57 es valida para $0.25 \leq \delta/r_i \leq 1.5$ y

$$1.2 \times 10^2 < \mathrm{Gr\ Pr} < 1.1 \times 10^9 \qquad 0.7 < \mathrm{Pr} < 4150$$

Las propiedades se evalúan a una temperatura volumétrica media T_m definida por

$$T_m = \frac{(r_m^3 - r_i^3)T_i + (r_o^3 - r_m^3)T_o}{r_o^3 - r_i^3} \tag{7-59}$$

donde $r_m = (r_i + r_0)/2$. La Ec. 7-57 también puede usarse para esferas excéntricas con una transformación de coordenadas como se describe en la Ref. 43.

Los resultados experimentales para convección libre en recintos no siempre están en concordancia, pero podemos expresarlos en una forma general como

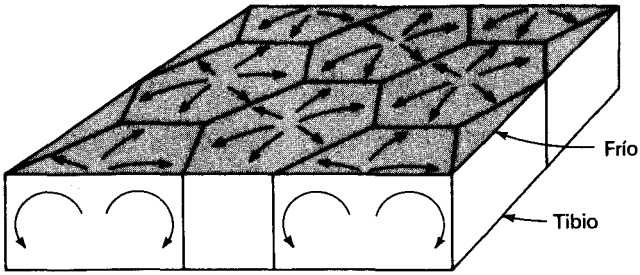


Fig. 7-12 Patrón de celda de Benard en una capa de fluido cerrada calentada por abajo de la Ref. 33.

$$\frac{k_e}{k} = C(\mathrm{Gr}_\delta \, \mathrm{Pr})^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m \tag{7-60}$$

La Tabla 7-3 lista valores de las constantes C, n y m para diversas circunstancias físicas. Estos valores pueden usarse con propósitos de diseño en ausencia de datos específicos para la geometría o fluido en estudio. Deberíamos subrayar que algunas de las correlaciones de datos representadas en la Tabla 7-3 se han ajustado artificialmente por Holman [74] para dar los exponentes característicos de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ para los regímenes laminar y turbulento de convección libre. Sin embargo, parece que el error introducido por este ajuste no es significativamente mayor que el desacuerdo entre diferentes investigaciones experimentales. El lector interesado puede consultar las referencias específicas para más detalles.

Para el espacio anular la transferencia de calor se basa en

$$q = \frac{2\pi k L \, \mathrm{AT}}{\ln (r_o/r_i)} \tag{7-61}$$

donde L es la longitud de la corona circular y el espacio es $\delta = r_0 - r_i$.

En la Ref. 38 se trata la convección libre a través de capas planas verticales de fluidos no newtonianos, pero los resultados son demasiado complejos para presentarlos aqui.

En ausencia de información más específica para diseño, la transferencia de calor para recintos inclinados puede calcularse sustituyendo g' por g en el número de Grashof, donde

$$g' = g \cos \theta \tag{7-62}$$

y θ es el ángulo que hace la superficie del calentador con la horizontal. Puede esperarse que esta transformación se mantenga hasta ángulos de inclinación de 60° y se aplica solamente a aquellos casos en los que la superficie caliente está orientada hacia arriba. Se dispone de información adicional de Hollands y cols. [66, 67, 69).

Tabla 7-3 Resumen de relaciones empíricas para convección libre en recintos en la forma de la Ec. 7-60, correlación de constantes ajustada por Holman [74]

Fluido	*Geometría*	$Gr_\delta Pr$	*Pr*	$\frac{L}{\delta}$	*c*	*n*	*m*	*Ref(s).*
Gas	Placa vertical, isotérmica	<2000	k_e/k = 1.0			$\frac{1}{4}$		6, 7, 55, 59
		6000-200000	0.5-2	11-42	0.197	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	
		200 000-1.1 x 10'	0.5–2	11-42	0.073			
	Placa horizontal, isotérmica, calentada por abajo	<1700	k_e/k = 1.0					
		1700-7000	0.5-2	—	0.059	0.4 $\frac{1}{4}$	0	6, 7, 55, 59, 62, 63,
		7000-3.2 x 10"	0.5-2	—	0.212	$\frac{1}{3}$		66
		>3.2 x 10s	0.5-2	—	0.061			
Líquido	Placa vertical, flujo de calor constante o isotérmico	10^4–10^7	1-20 000	10-40	Ec. (7-50)	—	—	18, 61
		10^6–10^9	1-20	1-40	0.046	$\frac{1}{3}$	0	
	Placa horizontal, isotérmica, calentada por abajo	<1700	k_e/k = 1.0	—				7, 8, 58, 63, 66
		1700-6000	1-5000	—	0.012	0.6	0	
		6000-37 000	1-5000	—	0.375	0.2	0	
		37 000-10s	1-20	—	0.13	0.3	0	
		$>10^8$	1-20		0.057	$\frac{1}{3}$	0	
Gas o líquido	Corona anular vertical	Igual que para placas verticales						
	Corona anular horizontal isotérmica	6000–10^6	1-5000	—	0.11	0.29	0	56, 57, 60
		10^6–10^8	1-5000	—	0.40	0.20	0	
	Corona esférica	120-1.1 x 10^9	0.7-4000		0.228	0.226	0	43
						—	—	

Ejemplo 7-6

El aire a presión atmosférica se encuentra entre dos placas verticales cuadradas de 0.5 m por lado, separadas por una distancia de 15 mm. Las temperaturas de las placas son 100 y 40 °C, respectivamente. Calcule la transferencia de calor por convección libre a través del espacio de aire.

Solución

Evaluamos las propiedades del aire a la temperatura media entre las dos placas

$$T^f = \frac{+}{2} = 70\ ^\circ\text{C} = 343\ \text{K}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287 \times 343)} = 1.029\ \text{kg/m}^3$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{343} = 2.915 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

$$\mu = 2.062 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s} \qquad k = 0.0295\ \text{W/m}\cdot^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0.7$$

El producto de los números de Grashof y Prandtl se calcula ahora como

$$\text{Gr}_\delta\,\text{Pr} = \frac{(9.8)(1.029)^2(2.915 \times 10^{-3})(100 \quad 40)(15 \times 10^{-3})^3}{(2.062 \times 10^{-5})^2}0.7$$

$$= 1.008 \times 10^4$$

Ahora podemos usar la Ec. 7-60 para calcular la conductividad térmica efectiva, con L = 0.5 m, δ = 0.015 m y las constantes obtenidas de la Tabla 7-3:

$$\frac{k_e}{k} = (0.197)(1.008 \times 10^4)^{1/4}\left(\frac{0.5}{0.015}\right)^{-1/9} = 1.337$$

Ahora puede calcularse la transferencia de calor con la Ec. 7-53. El área es $(0.5)^2 = 0.25\ \text{m}^2$, de modo que

$$q = \frac{(1.337)(0.0295)(0.25)(100 \quad 40)}{0.015} = 39.44\ \text{W} \qquad [134.6\ \text{Btu/h}]$$

7-12 Convección libre y forzada combinadas

Diversas situaciones prácticas involucran transferencia de calor por convección que no es de naturaleza "forzada" ni "libre". Estas circunstancias surgen cuando se fuerza un fluido sobre una superficie caliente a una velocidad bastante baja. Hay una velocidad de convección acoplada con la velocidad de flujo forzado que es generada por las fuerzas de flotación que resultan de una disminución en la densidad del flujo en las cercanías de la superficie caliente.

Metais y Eckert [10] han proporcionado un resumen de efectos combinados de convección libre y forzada en tubos, y la Fig. 7-13 presenta los regímenes para convección combinada en tubos verticales. Dos combinaciones diferentes se indican en esta figura. ***Flujo unidireccional*** **significa que las corrientes de convección libre y forzada están en la misma dirección, mientras que** ***flujo opuesto*** **quiere decir que están en direcciones opuestas. La abreviación TPU significa temperatura de pared uniforme y la abre-**

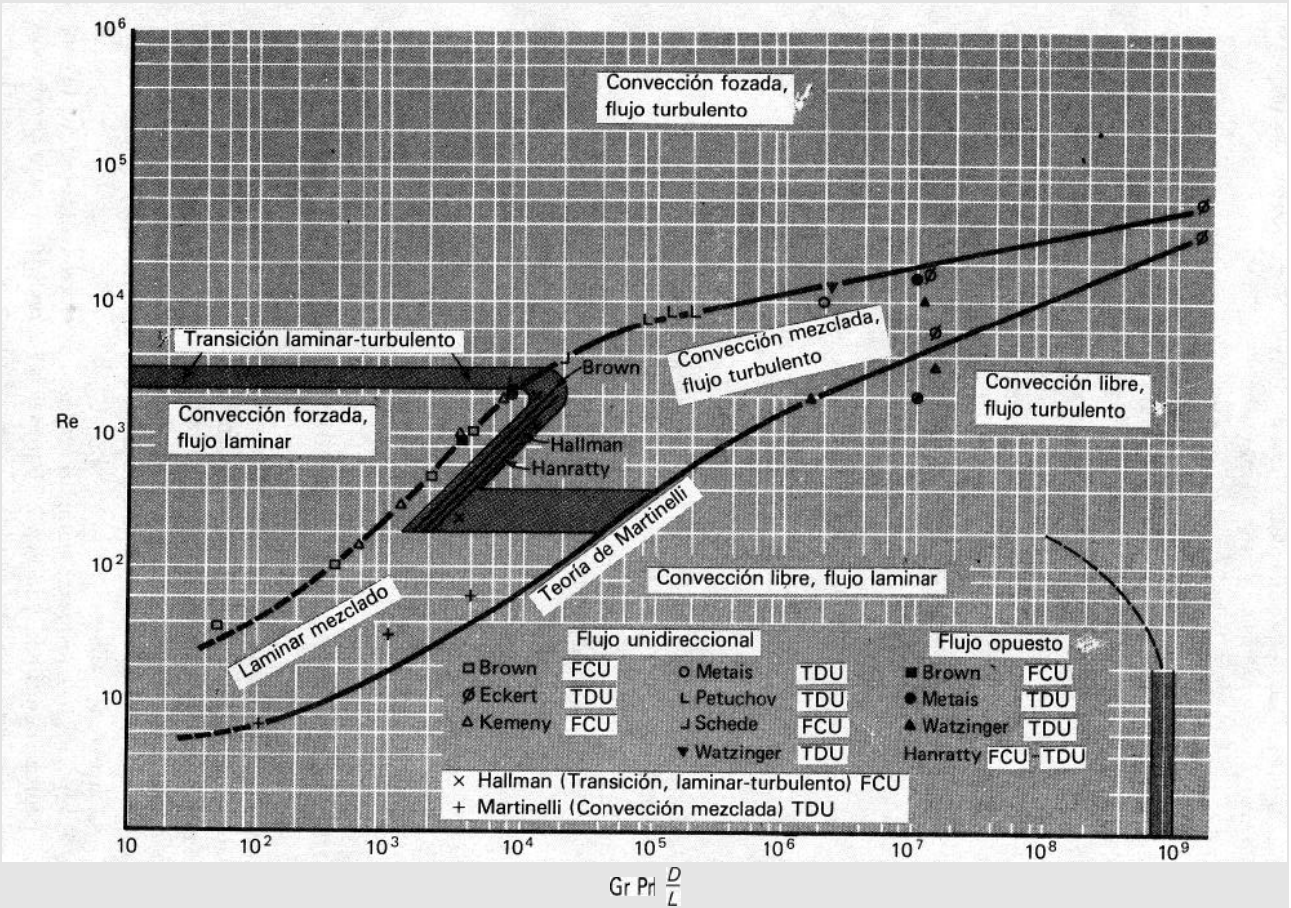


Fig. **7-13** Regímenes de convección libre, forzada y mezclada para flujo a través de tubos verticales, de acuerdo con la Ref. 10.

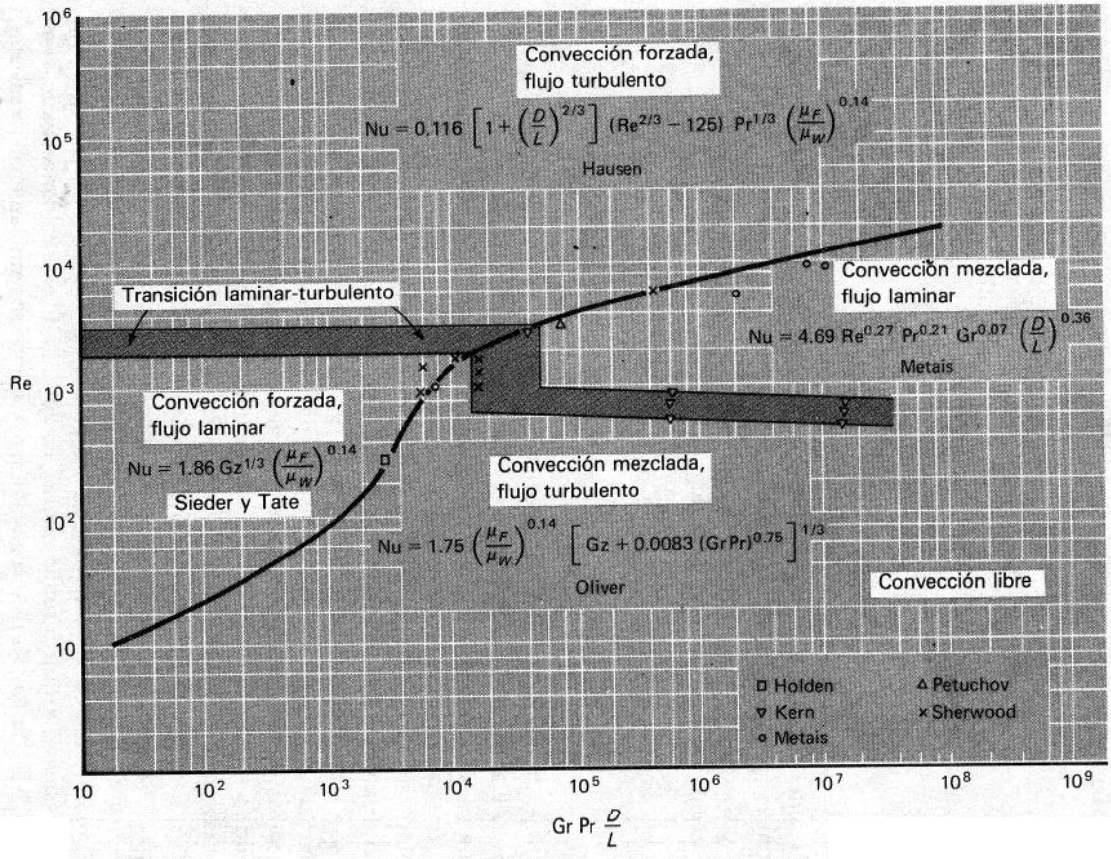


Fig. 7-14 Regímenes de convección libre, forzada y mezclada para flujo a través de tubos horizontales, de acuerdo con Metais y Eckert [10]

viación FCU indica datos para flujo de calor uniforme. Es bastante fácil anticipar los resultados cualitativos de la figura. Un número de Reynolds elevado implica una velocidad de flujo forzado grande y por tanto, menor influencia de corrientes de convección libre. Mientras mayor sea el valor del producto de Grashof y Prandtl, se podrá esperar un mayor predominio de los efectos de convección libre.

La Fig. 7-14 presenta los regímenes para convección combinada en tubos horizontales. En esta figura el número de Graetz se define como

$$Gz = Re\ Pr; \tag{7-63}$$

El intervalo aplicable de las Figs. 7-13 y 7-14 es para

$$10^{-2} < \Pr_0 \frac{d}{L} < 1$$

Las correlaciones que se presentan en las figuras son para temperatura de pared constante. Todas las propiedades se evalúan a la temperatura de la película.

Brown y Gauvin [17] han desarrollado una correlación mejor para la convección mezclada, región de flujo laminar de la Fig. 7-14

$$Nu = 1.75 \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^{0.14} [Gz + 0.012\ (Gz\ Gr^{1/3})^{4/3}]^{1/3} \tag{7-64}$$

donde μ_b se evalúa a la temperatura global, Se prefiere esta relación a la que se muestra en la Fig. 7-14. En la Ref. 68 hay información adicional.

El problema de convección libre y forzada combinadas a partir de cilindros horizontales ha sido tratado en detalle por Fand y Keswani [47].

La noción general que se aplica en el análisis de convección combinada es que el predominio de un modo de transferencia de calor está gobernado por la velocidad de flujo asociada a ese modo. Se esperaría que en una situación de convección forzada que involucra una velocidad de flujo de 30 m/s, por ejemplo, eliminaría la mayor parte de los efectos de convección libre que se encuentran en campos gravitacionales ordinarios, debido a que las velocidades de las corrientes de convección libre son pequeñas en comparación con 30 m/s. Por otra parte, una situación de flujo forzado a velocidades muy pequeñas ($\sim$0.3 m/s) podría ser afectada de forma apreciable por corrientes de convección libre. Un análisis de orden de magnitud de las ecuaciones para capa límite de convección libre, indicaría un criterio general para determinar si los efectos de convección libre son dominantes. El criterio es que cuando $Gr/Re^2 > 1$ .O, la convección libre es de importancia fundamental. Este resultado está en concordancia con las Figs. 7-13 y 7-14. En bucles de circulación natural, que se emplean en diversas aplicaciones para enfriamientos, los efectos de convección libre y forzada obedecen la forma funcional

$$\frac{Nu\ Gr}{Pr} = C\ Re^n \tag{7-65}$$

Los experimentos de Holman y Boggs [54] determinan los valores de las constantes para varios conjuntos de condiciones.

Ejemplo 7-7

Se fuerza aire a 1 atm y 27 °C a través de un tubo horizontal de 25 mm de diámetro, a una velocidad promedio de 30 cm/s. La pared del tubo se mantiene a una temperatura constante de 140 °C. Calcule el coeficiente de transferencia de calor para esta situación si el tubo tiene 0.4 m de largo.

Solución

Para este cálculo, evaluamos las propiedades a la temperatura de la película:

$$T^f = \frac{+ 27}{2} = 83.5\ ^\circ\text{C} = 356.5\ \text{K}$$

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^{"}}{(287 \text{X} 356.5)} \simeq 0.99\ \text{kg/m}^3$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = 2.805 \times 10\text{-s}\ \text{K}^{-1} \qquad \mu_w = 2.337 \times 10\text{-s}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\mu_f = 2.102 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s} \qquad k_f = 0.0305\ \text{W/m}\cdot^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0.695$$

Tomemos la temperatura global como 27 °C para evaluar μ_b; entonces

$$\mu_b = 1.983 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s}$$

Los parámetros significativos se calculan como

$$\text{Re}_f = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(0.99)(0.3)(0.025)}{2.102 \times 10^{-5}} = 353$$

$$\text{Gr} = \frac{\rho^2 g \beta (T_w - T_b) d^3}{\mu^2} = \frac{(0.99)^2(9.8)(2.805 \times 10^{-3})(140 - 27)(0.025)^3}{(2.102 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 1.077 \times 10^5$$

$$Gr\ Pr\ \frac{d}{L} = (1.077 \times 10^5)(0.695)\frac{0.025}{0.4} = 4677$$

De acuerdo a la Fig. 7-14, se encuentra el régimen de flujo de convección mezclado. Por tanto, debemos usar la Ec. 7-64. El número de Graetz se calcula como

$$\text{Gz} = \text{Re Pr}\frac{d}{L} = \frac{(353)(0.695)(0.025)}{0.4} = 15.33$$

y el cálculo numérico para la Ec. 7-64 se vuelve

$$\text{Nu} = 1.75\left(\frac{1.983}{2.337}\right)^{0.14}\{15.33 + (0.012)[(15.33)(1.077 \times 10^5)^{1/3}]^{4/3}\}^{1/3}$$

$$= 7.78$$

El coeficiente de transferencia de calor promedio se calcula entonces como

$$\bar{h} = \frac{k}{d}\,\mathrm{Nu} = \frac{(0.0305)(7.78)}{0.025} = 9.49\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \quad \text{U.67 Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot °\text{F}]$$

Es interesante comparar este valor con el que se obtendría para convección forzada estrictamente laminar. Se aplica la relación Sieder-Tate (Ec. 6-10) de modo que

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu} &= 1.86\ (\mathrm{Re\,Pr})^{1/3} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w}\right)^{0.14} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/3} \\ &= 1.86\ \mathrm{Gz}^{1/3} \left(\frac{\mu_f}{\mu_w}\right)^{0.14} \\ &= (1.86)(15.33)^{1/3} \left(\frac{2.102}{2.337}\right)^{0.14} \\ &= 4.55 \end{aligned}$$

Y

$$\bar{h} = \frac{(4.55)(0.0305)}{0.025} = 5.55\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \quad [0.977\ \mathrm{Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F}]$$

Así, habría un error de -41% si el cálculo se hiciese estrictamente sobre la base de convección forzada laminar.

Preguntas de repaso

1. ¿Por qué una solución analítica de un problema de convección libre es mas compleja que su contraparte de convección forzada?
2. Defina el número de Grashof. ¿Cuál es su significado físico?
3. ¿Cuál es el criterio aproximado para transición a turbulencia en una capa límite de convección libre?
4. ¿Qué forma funcional de ecuación se usa ordinariamente para correlación de datos de transferencia de calor por convección libre?
5. Trate el problema de convección libre y forzada combinadas.
6. ¿Cuál es el criterio aproximado que divide conducción pura y convección libre en un espacio cerrado entre paredes verticales?
7. ¿Cómo se modifica el número de Grashof definido por una condición de flujo de calor constante sobre una placa vertical?

Problemas

7-l Trace el espesor de capa límite para convección libre en función de x para una placa vertical que se mantiene a 80 °C y está expuesta a aire a presión atmosférica y 15 °C. Considere solamente la porción laminar.

7-2 Deduzca una expresión para la velocidad máxima en la capa límite de convección libre en una placa plana vertical. ¿En qué posición de la capa límite ocurre esta velocidad máxima?

7-3 Dos placas planas verticales a 65 °C se colocan en un tanque de agua a 25 °C. Si las placas tienen 30 cm de alto, ¿cuál es el espacio mínimo que evitará la interferencia de las capas límite de convección libre?

7-4 Una placa vertical de 1 pie por lado se mantiene a 65 °C y se expone a aire atmosférico a 15 °C. Compare la transferencia de calor por convección libre de esta placa con la que resultaría al

forzar aire sobre la placa, a una velocidad igual a la velocidad máxima que ocurre en la capa límite de convección libre. Estudie esta comparación.

7-5 Un alambre de platino de 0.4 mm de diámetro y 10 cm de longitud, se coloca horizontalmente en un recipiente con agua a 38 °C y se calienta por medio de la electricidad, de modo que su temperatura de superficie se mantiene a 93 °C. Calcule el calor perdido por el alambre.

7-6 A través de una tubería de acero de 2.5 cm de diámetro interno y 3 cm de diámetro externo fluye agua a la rapidez de 0.8 kg/s y 90 °C. La temperatura de la superficie externa de la tubería es de 85 °C y la temperatura del aire circundante es 20 °C. La presión de la habitación es 1 atm y la tubería tiene 15 m de largo. ¿Cuánto calor se pierde por convecciónlibre hacia la habitación?

7-7 Una tuberla horizontal de 7.5 dlametro se encuentra en una habitación en donde el aire atmosférico está a 20 °C. La temperatura de superficie de la tubería es de 240 °C. Calcule la perdida de calor por convección libre por metro de tubería.

7% Un tubo horizontal de 1.25 cm de diámetro externo se calienta a una temperatura de superficie de 250 °C y se expone al aire a temperatura ambiente de 20 °C y 1 atm. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección libre por unidad de longitud de tubo?

7-9 Un cilindro vertical de 1.8 m de alto y 7.5 cm de diámetro se mantiene a una temperatura de 93 °C en un ambiente atmosférico de 30 °C. Calcule la pérdida de calor por convección libre a partir de este cilindro. Para este calculo, el cilindro puede tratarse como una placa plana vertical.

7-10 Un calentador eléctrico horizontal de 2.5 cm de diámetro se sumerge en un baño de aceite ligero a 93 °C. La temperatura de superficie del calentador se mantiene a 150 "C. Calcule la perdida de calor por pie de longitud del calentador.

7-11 Un conducto de 1 pie por lado transporta aire a una temperatura tal que la temperatura externa del conducto se mantiene a 60 °F y se expone a aire ambiente a 80 °F. Estime el calor ganado por el conducto por pie de longitud.

7-12 La pared externa de un edificio de 6 m de alto recibe un flujo de calor radiante promedio del Sol de 1100 W/m^2. Suponiendo que se conducen 95 W/m^2 a través de la pared, estime su temperatura externa. Suponga que el aire atmosférico a fuera del edificio está a 20 °C.

7-13 Suponga que la mitad de la transferencia de calor por convección libre a partir de un cilindro horizontal ocurre en un lado del cilindro, por razones de simetría. Siguiendo esta suposición, compare la transferencia de calor en cada lado del cilindro con la de una placa plana vertical que tiene una altura igual a la distancia circunferencia1 del punto de estancamiento del fondo, al punto de estancamiento superior en el cilindro. Trate esta comparación.

7-14 Dibuje los perfiles de velocidad de convección libre para una placa plana vertical isotérmica a 93 °C, expuesta al aire a 20 °C y 1 atm, en función de la distancia a partir de la superficie de la placa a posiciones x de 15, 30 y 45 cm.

7-15 Demuestre que $\beta = 1/T$ para un gas ideal que tiene la ecuación de estado $p = \rho RT$.

7-16 Dos placas verticales de 30 cm por lado están separadas por una distancia de 2.5 cm y aire a 1 atm. Las dos placas se mantienen a temperaturas de 200 y 90 °C, respectivamente. Calcule la rapidez de transferencia de calor a través del espacio de aire.

7-17 Un espacio horizontal de aire está separado por una distancia de 1.6 mm. Estime la rapidez de transferencia de calor por unidad de área para una diferencia de temperatura de 165 °C, con una placa a una temperatura de 90 °C.

7-18 Repita el Prob. 7-17 para un espacio horizontal lleno de agua.

7-19 Desarrolle una expresión para el espaciamiento óptimo para placas verticales en aire, para llevar a cabo transferencia de calor mínima, suponiendo que la transferencia de calor resulta de conducción pura a $Gr_\delta < 2000$. Grafique este espaciamiento óptimo en función de la diferencia de temperatura para aire a 1 atm.

7-20 Suponga que se van a comparar los coeficientes de transferencia de calor por convección forzada o libre sobre placas planas verticales. Desarrolle una relación aproximada entre los números de Grashof y Reynolds tal que los coeficientes de transferencia de calor por convección forzada pura y convección libre pura son iguales. Suponga flujo laminar.

7-21 Se fuerza aire a.20 °C y 1 atm hacia arriba a través de un tubo vertical de 2.5 cm de diámetro y 30 cm de largo. Calcule la rapidez de transferencia de calor cuando la pared del tubo se mantiene a 200 °C y el flujo tiene una velocidad de 45 cm/s.

7-22 Calcule la rapidez de pérdida de calor por convección libre a partir de una esfera de 30 cm de diámetro que se mantiene a 90 °C y se expone a aire atmosférico a 20 °C.

7-23 Una esfera de 2.5 cm de diámetro a 32 °C se sumerge en agua a 10 °C. Calcule la rapidez de pérdida de calor por convección libre.

7-24 Se fuerza aire a 1 atm y 38 °C a través de un tubo horizontal de 6.4 mm de diámetro, a una velocidad promedio de 30 m/s. La pared del tubo se mantiene a 540 °C, y el tubo tiene 30 cm de largo. Calcule el coeficiente de transferencia de calor promedio. Repita el cálculo para una velocidad de 30 m/s y una temperatura de pared del tubo de 800 °C.

7-25 Un espacio de aire en cierto edificio tiene 10 cm de espesor y 2 m de alto. Estime la transferencia de calor por convección libre a través de este espacio para una diferencia de temperatura de 17 °C.

7-26 Una ventana de doble vidrio se construye con 1.25 cm de espacio de aire. Las dimensiones de la placa son 1.2 X 1.8 m. Calcule la rapidez de transferencia de calor por convección libre a través del espacio de aire para una diferencia de temperatura de 30 °C y $T_1 = 20$ °C.

7-27 Un globo aerostático de 2.4 m de diámetro se eleva a una altitud en la que la presión ambiente es de 1.4 kN/m^2 y la temperatura ambiente es de − 50 °C. La superficie externa de la esfera está aproximadamente a 0 °C. Estime la pérdida de calor por convección libre a partir del exterior de la esfera. ¿Cómo se compara esto con la pérdida de calor por convección forzada de la misma esfera, con una velocidad de corriente libre aproximada de 30 cm/s?

7-28 Una placa vertical de 30 cm por lado se calienta eléctricamente de modo que se mantiene una condición de flujo de calor constante con una disipación de calor total de 20 W. El aire ambiente está a 1 atm y 20 °C. Calcule el valor del coeficiente de transferencia de calor a alturas de 15 y 30 cm. También calcule el coeficiente de transferencia de calor promedio para la placa.

7-29 Un bloque pequeño de cobre que tiene una base cuadrada de 2.5 por 2.5 cm y una altura de 5 cm se enfría en aire ambiente a 1 atm y 20 °C. El bloque está isotérmico a 90 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor.

7-30 Dos placas verticales de 30 cm por lado están separadas por una distancia de 1.25 cm y el espacio entre ellas está lleno de agua. Se impone una condición de flujo de calor constante sobre las placas, de manera que la temperatura promedio es de 38 °C para una y 60 °C para la otra. Calcule la rapidez de transferencia de calor bajo estas condiciones. Evalúe las propiedades a la temperatura media.

7-31 Una placa circular caliente de 15 cm de diámetro se mantiene a 150 °C en aire atmosférico. a 20 °C. Calcule la perdida de calor por convección libre cuando la placa está en posición horizontal.

7-32 Una esfera de 2.5 cm de diámetro se mantiene a 38 °C y sumergida en agua a 15 °C. Calcule la rapidez de la transferencia de calor bajo estas condiciones, suponiendo que la Ec. 7-48 se aplica.

7-33 Suponiendo que una persona puede aproximarse por un cilindro vertical de 1 pie de diámetro y 6 pies de altura, estime la pérdida de calor por convección libre para una temperatura de superficie de 75 °F en aire ambiente de 68 °F.

7-34 Una placa caliente de 20 x 20 cm, se inclina a un ángulo de 60° con la horizontal y se coloca en agua. Prevalecen condiciones aproximadas de flujo de calor constante con una temperatura media de placa de 40 °C y la superficie caliente orientada hacia abajo. La temperatura del agua es de 20 °C. Calcule el calor perdido por la placa.

7-35 Repita el Prob. 7-34 para una placa caliente orientada hacia arriba.

7-36 Una placa plana de 1 por 1 m está inclinada 30° con la horizontal y se expone a aire atmosférico a 30 °C y 1 atm. La placa recibe un flujo neto de energía radiante del Sol de 700 W/m^2, que después se disipa a los alrededores por convección libre. ¿Qué temperatura promedio alcanzará la placa?

7-37 Una placa horizontal en forma de triángulo equilátero de 40 cm por lado se mantiene a una temperatura constante de 55 °C y se expone a aire atmosférico a 25 °C. Calcule el calor perdido por la superficie superior de la placa.

7-38 Un calentador horizontal pequeño tiene forma de disco circular, con un diámetro de 3 cm. El disco se mantiene a 50 °C y se expone a aire atmosférico a 30 °C. Calcule la pérdida de calor.

7-39 Un calentador cilíndrico horizontal con d = 2 se coloca en un estanque con mezcla de sodio y potasio con 22% de sodio. La mezcla está a 120 °C y la superficie del calentador es constante a 200 °C. Calcule la transferencia de calor para un calentador de 40 cm de largo.

7-40 Un recinto contiene helio a una presión de 1.2 atm y tiene dos superficies verticales de calentamiento, que se mantienen a 80 y 20 °C, respectivamente. Las superficies verticales son de 40 x 40 cm y están separadas por un espacio de 2.0 cm. Calcule la transferencia de calor por convección libre entre las superficies verticales.

7-41 Una corona circular horizontal con diámetros interno y externo de 8 y 10 cm, respectivamente, contiene agua líquida. Las superficies interna y externa se mantienen a 40 y 20 °C, respectivamente. Calcule la transferencia de calor a través del espacio anular, por metro de longitud.

7-42 Un colector solar de placa plana tiene 1 m por lado y está inclinado a un ángulo de 20° con la horizontal. La superficie caliente a 160 °C se coloca en un recinto que está evacuado a una presión de 0.1 atm. Sobre la superficie caliente y paralela a ella, hay una ventana transparente que permite el paso de la energía radiante del Sol. La superficie caliente y la ventana están separadas por una distancia de 8 cm. Debido a convección a los alrededores, la temperatura de la ventana se mantiene a 40 °C. Calcule la transferencia de calor por convección libre entre la superficie caliente y la ventana transparente.

7-43 Dos esferas concéntricas están arregladas para almacenar salmuera dentro de la esfera interior a una temperatura de −10 °C. El diámetro de la esfera interna es de 2 m y el espacio de separación es de 5 cm. La esfera externa se mantiene a 30 °C, y el espacio desalojado a una presión de 0.05 atm. Estime la transferencia de calor por convección libre a través del espacio de separación.

7-44 Una barra de calentamiento horizontal que tiene un diámetro de 2.5 cm y una longitud de 1 m se coloca en un estanque de amoníaco líquido saturado a 20 °C. El calentador se mantiene a una temperatura de superficie constante de 80 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor.

7-45 Un calentador de aceite para motor consiste en un recipiente grande con una superficie cuadrada de calentamiento eléctrico en el fondo. La placa de calentamiento es de 30 x 30 cm y se mantiene a una temperatura constante de 100 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor para una temperatura del aceite de 20 "C.

7-46 Para calentar un área de trabajo en la que la temperatura del aire ambiente es de 17 °C, se utiliza vapor en condensación a 120 °C dentro de una tubería horizontal de 7.5 cm de diámetro. El calor total necesario es de 100 000 Btu/h. ¿Qué longitud de tubería sería necesaria para efectuar este calentamiento?

7-47 Una tina grande que se usa en el proceso de alimentos contiene un aceite caliente a 400 °F. Alrededor de la tina sobre los lados verticales hay una chaqueta que está enfriada a 140 °F. El espacio aéreo que separa la tina y la chaqueta es de 35 cm de alto y 3 cm de espesor. Estime la pérdida por convección libre, por metro cuadrado de área superficial.

7-48 Se construye una ventana especial de vidrio de doble hoja con dos placas de vidrio separadas por un intervalo de aire. Las placas son cuadradas, de 60 por 60 cm y están diseñadas para usarse con temperaturas de − 10 y + 20 °C en las placas respectivas. Suponiendo que el aire en el claro está a 1 atm, calcule y grafique la convección libre a través del claro en función del espaciado del claro para una ventana vertical. ¿Qué conclusiones puede deducir de esta gráfica desde el punto de vista del diseño?

7-49 Repita el Prob. 7-48 para una ventana horizontal con la superficie caliente en el lado inferior.

7-50 Unas cintas eléctricas calefactoras pequeñas, de 6 mm de ancho, se orientan en una posición horizontal. Las cintas se mantienen a 500 °C y se exponen al aire ambiente a 20 °C. Suponiendo que las cintas disipan calor tanto de la superficie superior como de la inferior, estime la longitud de la cinta que se requiere para disipar 2 kW de calor por convección libre.

7-51 Un espacio vertical de aire atmosférico de 4.0 pies de alto tiene un diferencial de temperatura de 20 °F a 300 K. Calcule y grafique k_e/k y el valor R para espaciados de 0 a 10 plg. ¿Aproximadamente a qué espaciado es un máximo de valor R?

7-52 Un bloque caliente de cerámica a 400 °C tiene dimensiones de 15 x 15 x 8 cm de alto. Se expone a aire ambiente a 27 °C. Calcule la pérdida de calor por convección libre.

7-53 Un amplificador magnético está empotrado en una caja cúbica de 6 plg por lado y debe disipar 50 W al aire circundante a 70 °F. Estime la temperatura superficial de la caja.

7-54 Un alambre delgado que tiene un diámetro de 0.001 plg. (0.0254 mm) se calienta por una corriente eléctrica y coloca horizontalmente en una cámara que contiene helio a 3 atm y 10 °C. Si la temperatura superficial del alambre no debe exceder de 240 °C, calcule la potencia eléctrica que debe suministrarse por unidad de longitud.

7-55 Un conducto circular grande de 3.0 m de diámetro transporta gases calientes a 250 °C. El exterior del conducto se expone a aire ambiente a 1 atm y 20 °C. Estime la pérdida de calor por unidad de longitud de conducto.

7-56 Un calentador de 2.0 cm de diámetro se coloca en un tanque de glicerina a 20 °C. La temperatura superficial del calentador es de 60 °C y su longitud es de 60 cm. Calcule la transferencia de calor.

7-57 Un cilindro de 3.5 cm de diámetro contiene un calentador eléctrico que mantiene un flujo de calor constante en la superficie de 1500 W/m^2. Si el cilindro está inclinado en un ángulo de 35" con la horizontal y expuesto a aire ambiente a 20 °C, estime la temperatura superficial promedio.

7-58 La superficie superior de una placa horizontal de 10 X 10 m se mantiene a 25 °C y se expone a temperatura ambiente de 28 °C. Estime la transferencia de calor.

7-59 Un calentador horizontal de 4 X 4 m se coloca en aire ambiente a 15 °C. Tanto la superficie superior como la inferior se calientan a 60 °C. Estime la pérdida de calor total por convección libre.

7-60 Dos placas verticales de 50 x 50 cm están separadas por un espacio de 4 cm que esta lleno de agua. Las temperaturas de las placas son 50 y 20 °C. Calcule la transferencia de calor a través del espacio.

7-61 Repita el Prob. 7-60 para las placas orientadas en una posición horizontal, con la superficie a 50 °C como placa inferior.

7-62 Dos placas verticales de 1.5 X 1,5 m están separadas por un espacio de aire de 4.0 cm. Las temperaturas de las superficies son 300 y 350 K. La transferencia de calor en el espacio puede reducirse disminuyendo la presión del aire. Calcule la gráfica k_e/k y el valor R como función de la presión. ¿A qué valor debe reducirse la presión para que $k_e/k = 1.0$?

7-63 Repita el Prob. 7-62 para dos placas horizontales con la superficie a 350 K en la parte inferior.

7-64 Un cilindro vertical de 30 cm de longitud se mantiene a 100 °C y se expone a aire ambiente a 15 °C. Calcule el diámetro mínimo que puede tener el cilindro para comportarse como una placa plana vertical.

Referencias

1 Eckert, E. R. G., and E. Soehngen: Interferometric Studies on the Stability and Transition to Turbulence of a Free Convection Boundary Layer, *Proc. Gen. Discuss. Heat Transfer ASME-IME, London, 1951.*

2 Eckert, E. R. G., and E. Soehngen: Studies on Heat Transfer in Laminar Free Convection with the Zehnder-Mach Interferometer, *USAF Tech. Rep. 5747,* December 1948.

3 Holman, J. P., H. E. Gartrell, and E. E. Soehngen: An Interferometric Method of Studying Boundary Layer Oscillations, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 80, August 1960.

4 McAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

5 Yuge, T.: Experiments on Heat Transfer from Spheres Including Combined Natural and Forced Convection, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 82, p. 214, 1960.

6 Jakob, M.: Free Convection through Enclosed Plane Gas Layers, *Trans. ASME,* vol. 68, p. 189, 1946.

7 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

6 Globe, S., and D. Dropkin: *J. Heat Transfer,* February 1969, pp. 24-28.

9 Evans, L. B., and N. E. Stefany: An Experimental Study of Transient Heat Transfer to Liquids in Cylindrical Enclosures, *AIChE Pap. 4, Heat Transfer Conf. Los Angeles, August* 1965.

10 Metais, B., and E. R. G. Eckert: Forced, Mixed, and Free Convection Regimes, *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 86, p. 295, 1964.

ll Bishop, E. N., L. R. Mack, and J. A. Scanlan: Heat Transfer by Natural Convection between Concentric Spheres, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 9, p. 649, 1966.

12 Dropkin, D., and E. Somerscales: Heat Transfer by Natural Convection in Liquids Confined by Two Parallel Plates Which Are Inclinad at Various Angles with Respect to the Horizontal, *J. Heat Transfer,* vol. 87, p. 71, 1965.

13 Gebhart, B.: "Heat Transfer," 2d ed., chap. 8, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

14 Gebhart, B.: Natural Convection Flow, Instability, and Transition, *ASME Pap.* 69-HT-29, August 1969.

15 Mollendorf, J. C., and B. Gebhart: An Experimental Study of Vigorous Transient Natural Convection, *ASME Pap.* 70-HT-2, May 1970.

16 Bayley, F. J.: An Analysis of Turbulent Free Convection Heat Transfer, *Proc. Znst. Mech. Eng.,* vol. 169, no. 20, p. 361, 1955.

17 Brown, C. K., and W. H. Gauvin: Combined Free and Forced Convection, 1, II, *Can. J. Chem. Eng.,* vol. *43,* no. **6,** pp. 306, 313, 1965

18. MacGregor, R. K., and A. P. Emery: Free Convection through Vertical Plane Layers: Moderate and High Prandtl Number Fluids, *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 391, 1969.

19 Newell, M. E., and F. W. Schmidt: Heat Transfer by Laminar Natural Convection within Rectangular Enclosures, *J. Heat Transfer,* vol. 92, pp. 159-168, 1970.

20 Husar, R. B., and E. M. Sparrow: Patterns of Free Convection Flow Adjacent to Horizontal Heated Sm-faces, *Znt. J. Heat Mass Trans.,* vol. ll, p. 1206, 1968.

21 Habne, E. W. P.: Heat Transfer and Natural Convection Patterns on a Horizontal Circular Plate, *Znt. J. Heat Mass* Transfer, vol. 12, p. 651, 1969.

22 Warner, C. Y., and V. S. Arpaci: An Experimental Investigation of Turbulent Natural Convection in Air at Low Pressure along a Vertical Heated Flat Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ll, p. 397, 1968.

23 Gunness, R. C., Jr., and B. Gebhart: Stability of Transient Natural Convection, *Phys. Fluids,* vol. 12, p. 1968, 1969.

24 Rotern, Z., and L. Claassen: Natural Convection above Unconfined Horizontal Surfaces, *J. Fluid Mech.,* vol. 39, pt. 1, p. 173, 1969.

25 Vliet, G. C.: Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces, *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 511, 1969.

26 Vliet, G. C., and C. K. Lin: An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers, *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 517, 1969.

27 Ostrach, S.: An Analysis of Laminar-Free-Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force, *NACA Tech. Rep* 1111, 1953.

28 Cheesewright, R.: Turbulent Natural Convedion from a Vertical Plane Surface, *J. Heat Transfer,* vol. 90, p. 1, February 1968.

29 Flack, R. D., and C. L. Witt: "Velocity Measurements in Two Natural Convection Air Flows Using a Laser Velocimeter," *J. Heat Trunsfer,* vol. 101, p. 256, 1979.

30 Eckert, E. R. G., and T. W. Jackson: Analysis of Turbulent Free Convection Boundary Layer on a Flat Plate, *NACA Rep.* 1015, 1951.

31 King, W. J.: The Basic Laws and Data of Heat Transmission, *Mech. Eng., vol. 54,* p. 347, 1932.

32 Sparrow, E. M., and J. L. Gregg: Laminar Free Convection from a Vertical Flat Plate, *Truns. ASME,* vol. 78, p. 435, 1956.

33 Benard, H.: Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, *Ann. Chim. Phys.,* vol. 23, pp. 62–144, 1901.

34 "Progress in Heat and Mass Transfer," vol. 2, Eckert Presentation Volume, Pergamon Press, New York, 1969.

35 Gebhart, B., T. Audunson, and L. Pera: *Fourth Znt. Heut Transfer Conf., Paris, August 1970.*

36 Sanders, C. J., and J. P. Holman: Franz Grashof and the Grashof Number, *Int. J. Heut Mass Trunsfer,* vol. 15, p. 562, 1972.

37 Clifton, J. V., and A. J. Chapman: "Natural Convection on a Finite-Size Horizontal Plate," *Int. J. Heut Mass Trunsfer,* vol. 12, p. 1573, 1969.

38 Emery, A. F., H. W. Chi, and J. D. Dale: "Free Convection through Vertical Plane Layers of Non-Newtonian Power Law Fluids," *ASME Pap.* 70-WA/HT-1.

39 Vliet, G. C.: "Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces," *Trans. ASME,* vol. 91C, p. 511, 1969.

40 Bergles, A. E., and R. R. Simonds: Combined Forced and Free Convection for Laminar Flow in Horizontal Tubes with Uniform Heat Flux, Znt. *J. Heat Mass Transfer,* vol. 14, p. 1989, 1971.

41 Aihara, T., Y. Yamada, and S. Endo: Free Convection along the Downward-facing Surface of a Heated Horizontal Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 2535, 1972.

42 Saunders, 0. A., M. Fishenden, and H. D. Mansion: Some Measurement of Convedion by an Optical Method, *Engineering,* May 1935, p. 483.

43 Weber, N., R. E. Rowe, E. H. Bishop, and J. A. Scanlan: Heat Transfer by Natural Convection between Vertically Eccentric Spheres, *ASME Pap.* 72-WA/HT-2.

44 Fujii, T., and H. Imura: Natural Convection Heat Transfer from a Plate with Arbitrary Inclination, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 755, 1972.

45 Pera, L., and B. Gebhart: Natural Convection Boundary Layer Flow over Horizontal and Slightly Inclined Surfaces, *Znt. J. Heat Mass Trunsfer,* vol. 16, p. 1131, 1973.

46 Hyman, S. C., C. F. Bonilla, and S. W. Ehrlich: Heat Transfer to Liquid Metals from Horizontal Cylinders, *AIChE Symp.* Heat *Trunsfer, Atlantic City, 1953,* p. 21.

47 Fand, R. M., and K. K. Keswani: Combined Natural and Forced Convection Heat Transfer from Horizontal Cylinders to Water, *Znt. J. Heat Mass Trunsfer,* vol. 16, p. 175, 1973.

48 Dale, J. D., and A. F. Emery: The Free Convection of Heat from a Vertical Plate to Severa1 Non-Newtonian Pseudoplastic Fluids, *ASME Pup.* 71-HT-S.

49 Fujii, T., 0. Miyatake, M. Fujii, H. Tanaka, and K. Murakami: Natural Convective Heat Transfer from a Vertical Isothermal Surface to a Non-Newtonian Sutterby Fluid, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 2177, 1973.

50 Soehngen, E. E.: Experimental Studies on Heat Transfer at Very High Prandtl Numbers, *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, p. 125, 1969.

51 Vliet, G. C., and D. C. Ross: Turbulent Natural Convection on Upward and Downward Facing Inclined Constant Heat Flux Sm-faces, *ASME Pup.* 74-WA/HT-32.

52 Lloyd, J. R., and W. R. Moran: Natural Convection Adjacent to Horizontal Surface of Various Planforms, *ASME Pap.* 74-WA/HT-66.

53 Goldstein, R. J., E. M. Sparrow, and D. C. Jones: Natural Convection Mass Transfer Adjacent to Horizontal Plates, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 16, p. 1025, 1973.

54 Holman, J. P., and J. H. Boggs: Heat Transfer to Freon 12 near the Critica1 State in a Natural Circulation Loop, *J.* Heat *Transfer,* vol. 80, p. 221, 1960.

55 Mull, W., and H. Reiher: Der Wärmeschutz von Luftschichten, *Beih. Gesund. Ing., ser.* 1, no. 28, 1930.

56 Krasshold, H.: Wärmeabgabe von zylindrischen Flussigkeitsschichten bei natürlichen Konvektion, *Forsch. Geb. Zngenieurwes,* vol. 2, p. 165, 1931.

57 Beckmann, W.: Die Wärmeübertragung in zylindrischen Gasschichten bei natürlicher Konvektion, *Forsch. Geb. Ingenieurwes,* vol. 2, p. 186, 1931.

56 Schmidt, E.: Free Convedion in Horizontal Fluid Spaces Heated from Below, *Proc. Znt. Heat Transfer Conf. Boulder, Colo., ASME,* 1961.

59 Graff, J. G. A., and Van der-Held, E. F. M.: The Relation between the Heat Transfer and Convection Phenomena in Enclosed Plain Air Layers, *Appl. Sci. Res., ser.* A, vol. 3, p. 393, 1952.

60 Liu, C. Y., W. K. Mueller, and F. Landis: Natural Convection Heat Transfer in Long Horizontal Cylindrical Annuli, *Int. Dev. Heat Transfer,* pt. 5, pap. 117, p. 976, 1961.

61 Emery, A., and N. C. Chu: Heat Transfer across Vertical Layers, *J. Heat Transfer,* vol. *87,* p. 110, 1965.

62 O'Toole, J., and P. L. Silveston: Correlation of Convective Heat Transfer in Confined Horizontal Layers, *Chem. Eng. Prog. Symp.,* vol. 57, no. 32, p. 81, 1961.

63 Goldstein, R. J., and T. Y. Chu: Thermal Convection in a Horizontal Layer of Air, *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, p. 55, 1969.

64 Singh, S. N., R. C. Birkebak, and R. M. Drake: Laminar Free Convection Heat Transfer

from Downward-facing Horizontal Surfaces of Finite Dimensions, *Prog. Heat Mass Transfer,* vol. 2, p. 87, 1989.

65 McDonald, J. S., and T. J. Connally: Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Liquid Sodium, *Nucl.* Sci. *Eng.* vol. *8,* p. 369, 1980.

66 Hollands, K. G. T., G. D. Baithby, and L. Konicek Correlation Equations for Free Convection Heat Transfer in Horizontal Layers of Air and Water, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 879, 1975.

67 Hollands, K. G. T., T. E. Unny, and G. D. Baithby: Free Convective Heat Transfer across Inclined Air Layers, *ASME Pap.* 75-HT-55, August 1976.

66 Depew, C. A., J. L. Franklin, and C. H. Ito: Combined Free and Forced Convection in Horizontal, Uniformly Heated Tubes, *ASME Pap.* 75-HT-19, August 1975.

69 Baithby, G. D., and K. G. T. Hollands: A General Method of Obtaining Approximate Solutions fo Laminar and Turbulent Free Convection Problems, *Advances in Heat Transfer,* Academic Press, New York, 1974.

70 Churchill, S. W., and H. H. S. Chu: Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a horizontal Cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 1049, 1975.

71 Churchill, S. W., and H. H. S. Chu: Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 18, p. 1323, 1975.

72 Churchill, S. W.; A Comprehenaive Correlating Equation for Laminar, Assisting, Forced and Free Convection, *AIChE J., vol. 23,* no. 1, p. 10, 1977.

73 Al-Arabi, M., and Y. K. Salman; Laminar Natural Convection Heat Transfer from an Inclined Cylinder, *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 23, pp. 45–51, 1980.

74 Holman, J. P.: "Heat Transfer," 4th ed., McGraw-Hill Book Co., New York. 1976.

8
Transferencia de Calor por Radiación

8-I Introducción

En los capítulos precedentes se mostró cómo se puede calcular la transferencia de calor por conducción y convección con la ayuda tanto de análisis matemáticos como de datos empíricos. Ahora deseamos considerar la tercera forma de transferencia de calor -radiación térmica-. Esta es la radiación electromagnética que emite un cuerpo como resultado de su temperatura. En este capítulo describiremos primero la naturaleza de la radiación térmica, sus características y las propiedades que se utilizan para describir materiales en lo que respecta a la radiación. En seguida, trataremos la transferencia de calor a través del espacio. Finalmente, analizaremos el problema general de transferencia de calor por radiación térmica, incluyendo la influencia que tienen las propiedades de los materiales y el arreglo geométrico de los cuerpos, sobre la energía total que se puede intercambiar.

8-2 Mecanismo físico

Existen muchos tipos de radiación electromagnética; la radiación térmica es tan sólo una de ellas. Sea cual fuere el tipo de radiación, decimos que ésta se propaga a la velocidad de la luz, 3×10^{10} cm/s. **Esta velocidad es igual al producto de la longitud de onda y frecuencia de la radiación,**

$$c = \lambda \nu$$

donde c **= velocidad de la luz**
λ **= longitud de onda**
ν **= frecuencia**

La unidad para λ pueden ser centímetros, angströms (1 Å = 10^{-8} cm) o micrómetros (1 μm = 10^{-6} m). En la Fig. 8-l se muestra una porción del espectro electromagnético. La radiación térmica fluctúa entre 0.1 a 100 μm, mientras que la porción de luz visible del espectro es muy pequeña, varía entre 0.35 a 0.75 μm.

La propagación de la radiación térmica ocurre en forma de cuantos discretos, en la que cada cuanto tiene una energía de

$$E = h\nu \tag{8-1}$$

en donde h es la constante de Planck y su valor es

$$h = 6.625 \times 10^{-34} \ \text{J·s}$$

Se puede obtener un cuadro físico muy burdo de la propagación de la radiación considerando cada cuanto como una partícula que tiene energía, masa y momento, tal como lo hicimos cuando consideramos las moléculas de un gas. Por tanto, en cierto sentido podemos pensar en la radiación como en un "gas de fotones" que puede fluir de un lugar a otro. Utilizando la relación relativista entre masa y energía, se pueden derivar expresiones para la masa y el momento de las "partículas"; es decir,

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$\text{Momento} = c\,\frac{h\nu}{c^2} = \frac{h\nu}{c}$$

Considerando la radiación como un gas tal, los principios de la termodinámica estadística cuántica pueden aplicarse para derivar una expresión para la densidad de energía de la radiación por volumen y longitud de onda unitarios como*

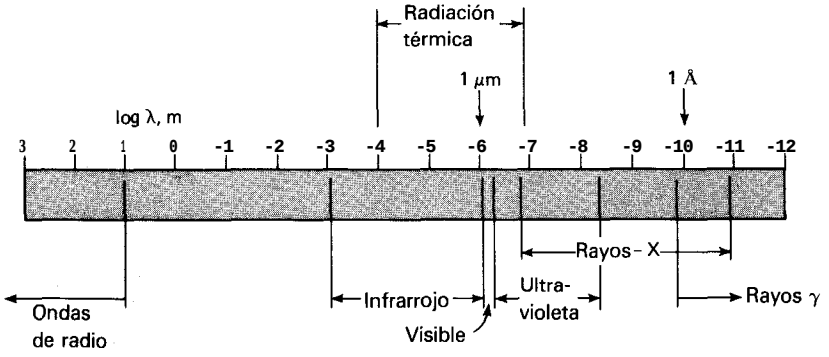


Fig. 8-l Espectro electromagnético.

* Como ejemplo, véase J. P. Holman, "Thermodynamics", 3a. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980, Pág. 350.

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{8-2}$$

en donde k es la constante de Boltzmann, 1.38066 $\times 10^{-23}$ J/molécula·K. Cuando la densidad de energía se integra sobre todas las longitudes de onda, la energía total es proporcional a la temperatura absoluta a la cuarta potencia:

$$E_b = \sigma T^4 \tag{8-3}$$

A la Ec. 8-3 se le denomina la ley de Stefan-Boltzmann, E_b es la energía radiada por tiempo y área unitarios por el radiador ideal, y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es:

$$\sigma = 5.669 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4 \quad [0.1714 \times 10^{-8}\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{R}^4]$$

cuando E_b está en watts por metro cuadrado y T en grados K. En el análisis termodinámico la densidad de energía está relacionada a la energía radiada desde una superficie por tiempo y área unitarios. Así, la superficie interior caliente de un recinto cerrado produce cierta densidad de energía de radiación térmica dentro del recinto. Estamos interesados en el intercambio radiante entre superficies -aquí la razón por la cual se da la expresión de radiación a partir de una superficie, en términos de su temperatura-. El subíndice b en la Ec. 8-3 denota que ésta es la radiación de un cuerpo negro. A ésta le llamamos radiación de cuerpo negro porque los materiales que obedecen esta ley parecen negros a la vista; parecen negros porque no reflejan radiación alguna. Así, a un cuerpo negro también se le considera como un cuerpo que absorbe todas las radiaciones que inciden sobre él. A E_b se le denomina el. *poder emisivo* de un cuerpo negro.

Es importante hacer notar en este momento que la "negrura" de una superficie de radiación térmica puede ser bastante engañosa en lo que concierne a las observaciones visuales. Una superficie recubierta con tizne aparece como negra a la vista y efectivamente es negra para el espectro de radiación térmica. Por otra parte, la nieve y el hielo parecen muy brillantes al ojo, pero son por naturaleza "negras" para la radiación térmica de longitud de onda grande. En lo que se refiere a la radiación por longitud de onda grande, muchas pinturas blancas son esencialmente negras. Trataremos este punto en secciones posteriores.

8-3 Propiedades de radiación

Cuando la energía radiante incide contra una superficie material, parte de la radiación se refleja, parte se absorbe y parte se transmite, tal como lo muestra la Fig. 8-2. Definimos la reflectividad ρ como la fracción reflejada, la absorbencia α como la fracción absorbida y la transmisividad τ como la fracción transmitida.
Así,

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \tag{8-4}$$

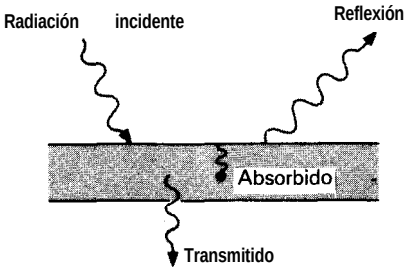


Fig. 8-2 Dibujo que muestra efectos de radiación incidente.

La mayor parte de los cuerpos sólidos no transmiten radiación térmica; de modo que para muchos de los problemas aplicados la transmisividad se puede tomar como cero. Entonces

$$\rho + \alpha = 1$$

Cuando la radiación choca con una superficie se pueden observar dos tipos de fenómenos. Si el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, a ésta se le llama especular. Por otra parte, cuando un rayo incidente se distribuye en forma uniforme en todas direcciones después de la reflexión, a ésta se le llama *difusa*. En la Fig. 8-3 se representan ambos tipos de reflexión. Obsérvese que la reflexión especular presenta al observador una imagen reflejada exacta a la de la fuente. Ninguna superficie real es especular o difusa. Un espejo corriente es especular completamente para la luz visible, pero no de un modo necesario especular a través de la gama entera de longitud de onda de radiación térmica. Por lo general, una superficie rugosa presenta con mayor facilidad un comportamiento difuso que una superficie perfectamente lisa. De manera similar, una superficie lisa es más especular que una rugosa. La influencia de la rugosidad de una superficie sobre las propiedades de radiación térmica de los materiales es un tema de gran interés y que continúa siendo objeto de investigación continua.

El poder emisivo E de un cuerpo se define como la energía emitida por el cuerpo por área y tiempo unitarios. Podríamos realizar mentalmente un experimento a fin de establecer una relación entre el poder emisivo de un cuerpo y las propiedades del ma-

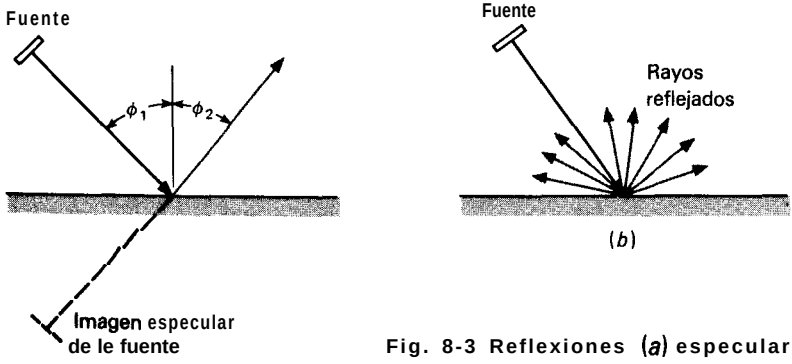


Fig. 8-3 Reflexiones (*a*) especular ($\phi_1 = \phi_2$) y (*b*) difusa.

terial que definimos anteriormente. Supóngase que se tiene un recinto de manera perfecta negro, es decir, uno que absorbe todas las radiaciones incidentes que chocan contra él, como se muestra en forma esquemática en la Fig. 8-4. Este recinto también emitirá radiación de acuerdo con la ley T^4. Sea $q_i \text{W/m}^2$ el flujo radiante que llega a cualquier punto del área del recinto. Supóngase ahora que se coloca dentro del recinto un cuerpo y se le permite alcanzar la temperatura de equilibrio junto con el recinto. En equilibrio, la energía absorbida por el cuerpo deberá ser igual a la energía emitida; de otra manera habría un flujo de energía hacia el interior o exterior del cuerpo que incrementaría o disminuiría su temperatura. En equilibrio escribiríamos

$$EA = q_i A \alpha \tag{8-5}$$

Si ahora reemplazamos el cuerpo dentro del recinto por un cuerpo negro del mismo tamaño y forma, y le permitimos alcanzar el equilibrio junto con el recinto *a la* misma *temperatura,*

$$E_b A = q_i A (1) \tag{8-6}$$

ya que la absorbencia de un cuerpo negro es igual a la unidad. Si se divide la Ec. 8-5 entre la Ec. 8-6,

$$\frac{E}{E_b} = \alpha$$

y encontramos que la proporción del poder emisivo de un cuerpo al poder emisivo de un cuerpo negro, *a la misma temperatura,* es igual a la absorbencia del cuerpo. Esta proporción se define como la emisividad ϵ del cuerpo,

$$\epsilon = \frac{E}{E_b} \tag{8-7}$$

de modo que

$$\epsilon = \alpha \tag{8-8}$$

A la Ec. 8-8 se le demonina la identidad de Kirchhoff. Aquí observaremos que las emisividades y absorbencias que se han tratado son las propiedades *totales* del material en

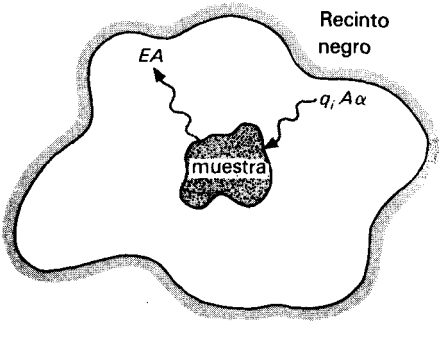


Fig. 8-4 Dibujo que muestra el modelo usado para derivar la ley de Kirchhoff.

particular; es decir, ellas representan el comportamiento integrado del material sobre todas las longitudes de onda. Las sustancias reales emiten menos radiación que las superficies negras ideales cuando se mide la emisividad del material. En realidad, la emisividad de un material varía con la temperatura y la longitud de onda de la radiación. Un cuerpo *gris* se define como tal que la emisividad monocromática ϵ_λ del cuerpo es independiente de la longitud de onda. La emisividad monocromática se define como la proporción del poder emisivo monocromático del cuerpo al poder emisivo monocromático de un cuerpo negro en la misma longitud de onda y temperatura. Así,

$$\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$$

Se puede relacionar la emisividad total del cuerpo con la emisividad monocromática observando que

$$E = \int_0^\infty \epsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda \qquad \text{y} \qquad E_b = \int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda = \sigma T^4$$

de modo que

$$\epsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\sigma T^4} \tag{8-9}$$

en donde $E_{b\lambda}$ es el poder emisivo de un cuerpo negro por unidad de longitud de onda. Si se aplica la condición de cuerpo gris, esto es, ϵ_λ = constante, la Ec. 8-9 se reduce a

$$\epsilon = \epsilon_\lambda \tag{8-10}$$

Las emisividades de diversas sustancias varían ampliamente con la longitud de onda, temperatura y condiciones de superficie. En el Apéndice A se dan algunos valores típicos de la emisividad total de diversas superficies. En la Ref. 14 se da un panorama completo de las propiedades de radiación.

Planck derivó la relación funcional para $E_{b\lambda}$ introduciendo el concepto de cuanto para la energía electromagnética. Ahora la derivación casi siempre se realiza por medio de métodos de termodinámica estadística, y se demuestra que $E_{b\lambda}$ está relacionada con la densidad de energía de la Ec. 8-2 por medio de

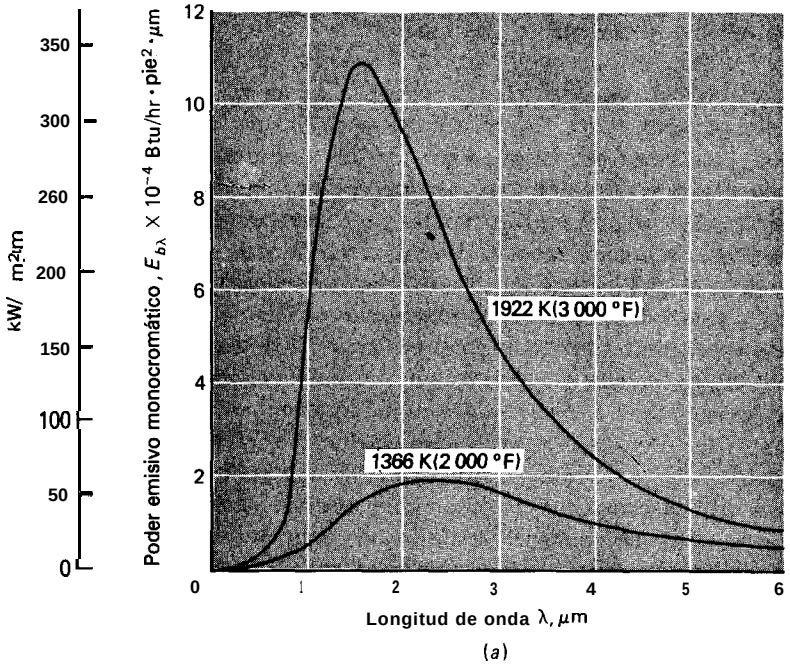
$$E_{b\lambda} = \frac{u_\lambda c}{4} \tag{8-11}$$

o

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \tag{8-12}$$

donde λ = longitud de onda, μm
T = temperatura, K
$C_1 = 3.743 \times 10^{-16}$ W·μm^4/m^2 [1.187×10^8 Btu·μm^4/h·pie^2]
$C_2 = 1.4387 \times 10^4$ μm·K [2.5896×10^4 μm·°R]

En la Fig. 8-5*a* se da una gráfica de $E_{b\lambda}$ como función de la temperatura y longitud de onda. Obsérvese que para las temperaturas más altas el pico de la curva se encuentra



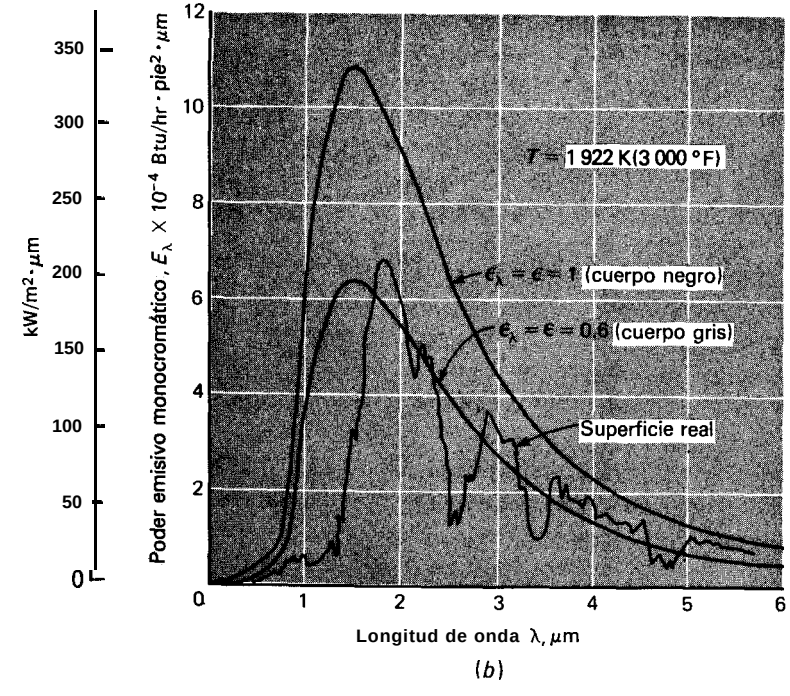


Fig. 8-5 (*a*) Poder emisivo de cuerpo negro como función de la longitud de onda y temperatura; (*b*) comparación del poder emisivo de cuerpos negros y grises ideales con el de una superficie real.

en las longitudes de onda menores. Estos puntos máximos en las curvas de radiación están relacionados por la ley de desplazamiento de Wien,

$$\lambda_{máx}\, T = 2897.6\ \mu m \cdot K \quad [5215.6\ \mu m \cdot {}^\circ R] \tag{8-13}$$

La Fig. 8-5*b* indica el espectro de radiación relativa de un cuerpo negro a 3000 °F y un cuerpo gris ideal correspondiente con una emisividad igual a 0.6. También se muestra una curva que indica un comportamiento aproximado para una superficie real, el cual puede variar considerablemente tanto de un cuerpo negro ideal, como de un cuerpo gris ideal. Para propósitos de análisis casi siempre se consideran las superficies como cuerpos grises, tomándose las emisividades como el valor promedio integrado.

El desplazamiento en el punto máximo de la curva de radiación explica el cambio en el calor de un cuerpo a medida que se le calienta. Como la banda de longitudes de onda visibles al ojo se encuentra entre 0.3 y 0.7 μm, a bajas temperaturas sólo una porción muy pequeña del espectro de energía radiante puede detectarse por el ojo. A medida que el cuerpo se calienta, la intensidad máxima se desplaza hacia las longitudes de onda menores, y la primera señal visible del incremento en la temperatura del cuerpo es un color rojo oscuro. Al incrementarse aún más la temperatura, el color cambia a rojo vivo, en seguida a amarillo vivo y finalmente a blanco. El material también parece más brillante a mayores temperaturas ya que una fracción mayor de la radiación total cae dentro del espectro visible.

A menudo nos interesa saber la cantidad de energía radiada desde un cuerpo negro en un intervalo de longitud de onda específico. La fracción del total de energía radiada entre 0 y λ está dada por

$$\frac{E_{b_{0-\lambda}}}{E_{b_{0-\infty}}} = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda} \tag{8-14}$$

Se puede volver a escribir la Ec. 8-12 dividiendo entre T^5 en ambos lados, de manera que

$$\frac{E_{b\lambda}}{T^5} = \frac{C_1}{(\lambda T)^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)} \tag{8-15}$$

Ahora, para cualquier temperatura específica, las integrales en la Ec. 8-14 pueden expresarse en términos de una sola variable *XT*. Los resultados han sido tabulados por Dunkle [2]. En la Fig. 8-6 se ha bosquejado la proporción en la Ec. 8-14 y se ha tabulado en la Tabla 8-1. Si se desea la energía radiante emitida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2, entonces,

$$E_{b_{\lambda 1-\lambda 2}} = E_{b_{0-\infty}} \left(\frac{E_{b_{0-\lambda 2}}}{E_{b_{0-\infty}}} - \frac{E_{b_{0-\lambda 1}}}{E_{b_{0-\infty}}} \right) \tag{8-16}$$

en donde $E_{b_{0-\infty}}$ es la radiación total emitida a través de todas las longitudes de onda,

Tabla 81 Funciones de radiación

AT		$E_{b\lambda}/T^5$		
$\mu m \cdot °R$	$\mu m \cdot K$	$\frac{Btu}{h \cdot pie^2 \cdot °R^5 \cdot \mu m}$ x 10'"	$\frac{W}{m^2 \cdot K^5 \cdot \mu m}$ x 10^{11}	$\frac{E_{b_{0-\lambda T}}}{UT^5}$
1000	555.6	0.000671	0.400 x 10"	0.170 x 10^{-7}
1 200	666.7	0.0202	0.120 x 10^{-3}	0.756 x 10^{-6}
1400	777.8	0.204	0.00122	0.106 x 10^{-4}
1 600	888.9	1.057	0.00630	0.738 x 10^{-4}
1800	1 000.0	3.544	0.02111	0.321 x 10^{-3}
2 000	1111.1	8.822	0.05254	0.00101
2 200	1222.2	17.776	0.10587	0.00252
2 400	1333.3	30.686	0.18275	0.00531
2 600	1444.4	47.167	0.28091	0.00983
2 800	1 555.6	66.334	0.39505	0.01643
3 000	1666.7	87.047	0.51841	0.02537
3 200	1 777.8	108.14	0.64404	0.03677
3400	1 888.9	128.58	0.76578	0.05059
3 600	2 000.0	147.56	0.87878	0.06672
3 800	2 111.1	164.49	0.97963	0.08496
4 000	2 222.2	179.04	1.0663	0.10503
4 200	2 333.3	191.05	1.1378	0.12665
4 400	2 444.4	200.51	1.1948	0.14953
4 600	2 555.6	207.55	1.2361	0.17337
4800	2 666.7	212.32	1.2645	0.19789
5000	2 777.8	215.06	1.2808	0.22285
5 200	2 888.9	216.00	1.2864	0.24803
5 400	3 000.0	215.39	1.2827	0.27322
5 600	3 111.1	213.46	1.2713	0.29825
5 800	3 222.2	210.43	1.2532	0.32300
6000	3 333.3	206.51	1.2299	0.34734
6 200	3 444.4	201.88	1.2023	0.37118
6 400	3 555.6	196.69	1.1714	0.39445
6 600	3 666.7	191.09	1.1380	0.41708
6 800	3 777.8	185.18	1.1029	0.43905
7000	3 888.9	179.08	1.0665	0.46031
7 200	4 000.0	178.86	1.0295	0.48085
7 400	4 111.1	166.60	0.99821	0.50066
7 600	4 222.2	160.35	0.95499	0.51974
7 800	4 333.3	154.16	0.91813	0.53809
8 000	4 444.4	148.07	0.88184	0.55573
8 200	4 555.6	142.10	0.84629	0.57267
8 400	4 666.7	136.28	0.81163	0.58891
8 600	4 777.8	130.63	0.77796	0.60449
8800	4 888.9	125.15	0.74534	0.61941
9 000	5 000.0	119.86	0.71383	0.63371
9 200	5 111.1	114.76	0.68346	0.64740
9 400	5 222.2	109.85	0.65423	0.66051
9 600	5 333.3	105.14	0.62617	0.67305
9 800	5 444.4	100.62	0.59925	0.68506
10 000	5 555.6	96.289	0.57346	0.69655
10 200	5 666.7	99.145	0.54877	0.70754
10.400	5 777.8	88.181	0.52517	0.71806

Tabla 8-1 (Continuación)

AT		$E_{b\lambda}/T^5$		
$\mu m \cdot °R$	$\mu m \cdot K$	$\frac{Btu}{h \cdot pie^2 \cdot °R^5 \cdot \mu m} \times 10^{15}$	$\frac{W}{m^2 \cdot K^5 \cdot \mu m} \times 10^{11}$	$\frac{E_{b_{0-\lambda T}}}{UT^5}$
10 600	5 888.9	**84.394**	0.50261	0.72813
10 800	6 000.0	80.777	0.48107	0.73777
ll 000	6 111.1	77.325	0.46051	0.74700
ll 200	6 222.2	74.031	0.44089	0.75583
ll 400	6 333.3	70.889	0.42218	0.76429
ll 600	6 444.4	67.892	0.40434	0.77238
ll 800	6 555.6	65.036	0.38732	0.78014
12 000	6 666.7	62.313	0.37111	0.78757
12 200	6 777.8	59.717	0.35565	0.79469
12 400	6 888.9	57.242	0.34091	0.80152
12 600	7 000.0	54.884	0.32687	0.80806
12 800	7 111.1	52.636	0.31348	0.81433
13 000	7 222.2	50.493	0.30071	0.82035
13 200	7 333.3	48.450	0.28855	0.82612
13 400	7 444.4	46.502	0.27695	0.83166
13 600	7 555.6	44.645	0.26589	0.83698
13 800	7 666.7	42.874	0.25534	0.84209
14 000	7 777.8	41.184	0.24527	0.64699
14 200	7 868.9	39.572	0.23567	0.85171
14 400	8 000.0	38.033	0.22651	0.85624
14 600	8 111.1	36.565	0.21777	0.86059
14 800	8 222.2	35.163	0.20942	0.86477
15 000	8 333.3	33.825	0.20145	0.86880
16 000	8 888.9	27.977	0.16662	0.88677
17 000	9 444.4	23.301	0.13877	0.90168
18 000	10 000.0	19.536	0.11635	0.91414
19 000	10 555.6	16.484	0.09817	0.92462
20 000	ll 111.1	13.994	0.08334	0.93349
21000	ll 666.7	ll.949	0.07116	0.94104
22 000	12 222.2	10.258	0.06109	0.94751
23 000	12 777.8	8.852	0.05272	0.95307
24 000	13 333.3	7.676	0.04572	0.95788
25 000	13 888.9	6.687	0.03982	0.96207
26 000	14 444.4	5.850	0.03484	0.96572
27 000	15 000.0	5.139	0.03061	0.96892
28 000	15.555.6	4.532	0.02699	0.97174
29 000	16 111.1	4.012	0.02389	0.97423
30 000	16 666.7	3.563	0.02122	0.97644
40 000	22 222.2	1.273	0.00758	0.98915
50 000	27 777.8	0.560	0.00333	0.99414
60 000	33 333.3	0.283	0.00168	0.99649
70 000	38 888.9	0.158	0.940×10^{-3}	0.99773
80 000	44 444.4	0.0948	0.564×10^{-3}	0.99845
90 000	50 000.0	0.0603	0.359×10^{-3}	0.99889
100 000	55 555.6	0.0402	0.239 x 10"	0.99918

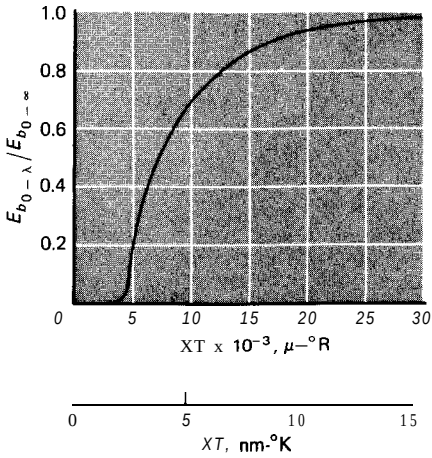


Fig. 8-6 Fracción de radiación de un cuerpo negro en un intervalo de longitud de onda.

$$E_{b_{0-\infty}} = \sigma T^4 \tag{8-17}$$

y se obtiene integrando la fórmula de distribución de Planck de la Ec. 8-12 a través de todas las longitudes de onda.

El concepto de un cuerpo negro es una idealización; es decir, no existe un cuerpo negro perfecto -todas las superficies reflejan radiación hasta cierto alcance aunque sea insignificante-. Sin embargo, se puede realizar una aproximación muy exacta de un cuerpo negro de la siguiente manera. (Como se muestra en la Fig, 8-7, se construye una cavidad de manera que ésta sea muy grande en comparación con el tamaño en el lado de la abertura. Un rayo incidente de energía se refleja muchas veces en el interior antes que escape finalmente del lado de la abertura. En cada reflexión se absorbe una fracción de la energía y esto corresponde a la absorbencia del interior de la cavidad. Después de todas estas absorciones, prácticamente toda la radiación incidente en el lado de la abertura se absorbe. Se deberá observar que la cavidad de la Fig. 8-7 se comporta más o menos como un emisor del cuerpo negro así como un absorbedor.

Ejemplo 8-I: Transmisión y absorción en una placa de vidrio

Para observar la radiación de un horno, se usa una placa de vidrio de 30 cm^2. La transmisividad del vidrio es 0.5 de 0.2 a 3.5 μm. Se puede suponer que la emisividad es de 0.3 hasta 3.5 μm y 0.9 para valores superiores.

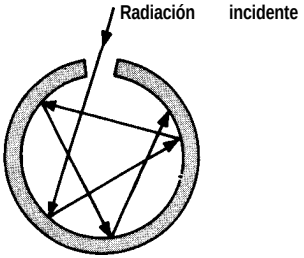


Fig. 8-7 Método para construir un recinto de cuerpo negro.

La transmisividad del vidrio es cero, excepto en el intervalo de 0.2 a 3.5 μm. Suponiendo que el horno es un cuerpo negro a 2000 °C, calcule la energía absorbida en el vidrio y la energía transmitida.

Solución

$$T = 2000\ ^\circ\text{C} = 2273\ \text{K}$$

$$\lambda_1 T = (0.2)(2273) = 454.6\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$$

$$\lambda_2 T = (3.5)(2273) = 7955.5\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$$

$$A = (0.3)^2 = 0.09\ \text{m}^2$$

De la Tabla 8-l

$$\frac{E_{b_{0-\lambda 1}}}{\sigma T^4} = 0 \qquad \frac{E_{b_{0-\lambda 2}}}{\sigma T^4} = 0.85443$$

$$\sigma T^4 = (5.669 \times 10^{-8})(2273)^4 = 1513.3\ \text{kW/m}^2$$

La radiación incidente total es

$$0.2\ \mu\text{m} < \lambda < 3.5\ \mu\text{m} = (1.5133 \times 10^6)(0.85443 - 0)(0.3)^2 = 116.4\ \text{kW}\quad [3.97 \times 10^5\ \text{Btu/h}]$$

$$\text{Radiación total transmitida} = (0.5)(116.5) = 58.2\ \text{kW}$$

$$\text{Radiación absorbida} = \begin{cases} (0.3)(116.4) = 34.92\ \text{kW} & \text{para } 0 < \lambda < 3.5\ \mu\text{m} \\ (0.9)(1 - 0.85443)(1513.3)(0.09) = 17.84\ \text{kW} & \text{para } 3.5\ \mu\text{m} < \lambda < \infty \end{cases}$$

$$\text{Radiación total absorbida} = 34.92 + 17.84 = 52.76\ \text{kW}\quad [180\,000\ \text{Btu/h}]$$

8-4 Factor de forma de la radiación

Considérense dos superficies negras A_1 y A_2, tal como se muestran en la Fig. 8-8. Deseamos obtener una expresión general para el intercambio de energía entre estas superficies cuando se les mantiene a temperaturas diferentes. El problema es en esencia la determinación de la cantidad de energía que sale de una superficie y alcanza la otra. Para resolver este problema los ***factores de forma*** de ***la radiación*** se definen como

F_{1-2} = fracción de energía que sale de la superficie 1 y que alcanza la superficie 2.
F_{2-1} = fracción de energía que sale de la superficie 2 y que alcanza la superficie 1.
F_{m-n} = fracción de energía que sale de la superficie m y alcanza la superficie n.

Factor de ***vista, factor*** *de* ***ángulo*** y *factor de* ***configuración*** son otros de los nombres para el factor de forma de la radiación. La energía que sale de la superficie 1 y alcanza la superficie 2 es

$$E_{b_1} A_1 F_{12}$$

Y la energía que deja la superficie 2 y que alcanza la superficie 1 es

$$E_{b_2} A_2 F_{21}$$

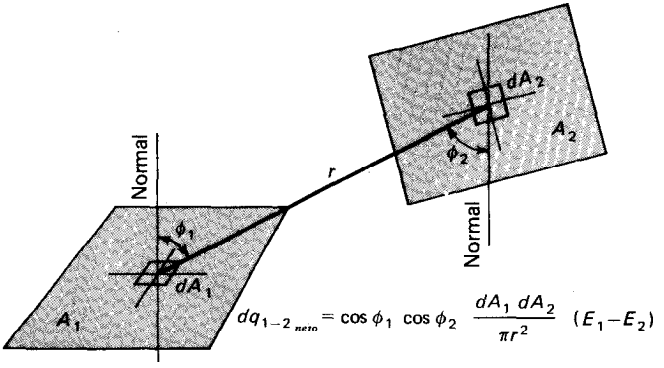


Fig. 8-8 Dibujo que muestra elementos de área utilizados en la derivación del factor de forma de la radiación.

Como las superficies son negras, toda la radiación incidente se absorberá y el intercambio de energía neto es

$$E_{b1}A_1F_{12} - E_{b2}A_2F_{21} = Q_{1-2}$$

Si ambas superficies se encuentran a la misma temperatura, no podrá haber intercambio de calor, esto es', $Q_{1-2} = 0$. También

$$E_{b1} = E_{b2}$$

de modo que

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{8-18}$$

Por tanto, el intercambio de calor neto es

$$Q_{1-2} = A_1F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = A_2F_{21}(E_{b1} - E_{b2}) \tag{8-19}$$

La Ec. 8-18 se conoce como una relación de reciprocidad, y se aplica en forma general para cualquier par de superficies *m y n:*

$$A_mF_{mn} = A_nF_{nm} \tag{8-18a}$$

Aunque la relación se ha derivado para superficies negras, también sirve para otras superficies siempre y cuando haya radiación difusa.

Ahora deseamos determinar una relación general para F_{12} (o F_{21}). Para lograr esto, consideramos los elementos de área dA_1 y dA_2 en la Fig. 8-8. Los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 se miden entre una normal a la superficie y la línea trazada entre los elementos de área r. La proyección de dA_1 en la línea que está entre los centros es

$$dA_1 \cos\phi_1$$

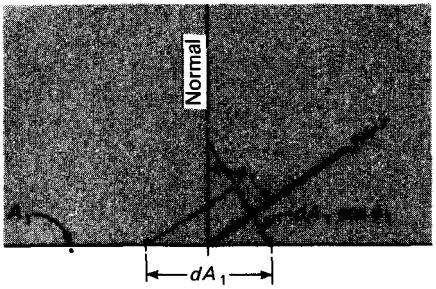


Fig. 8-9 Vista en elevación del área mostrada en la Fig. 8-8.

Esto se puede ver con mayor claridad en el dibujo en elevación que se muestra en la Fig. 8-9. Suponemos que las superficies son difusas, es decir, que la intensidad de la radiación es la misma en todas direcciones. La intensidad es la radiación emitida por área y ángulo sólido unitarios en una dirección específica. Por tanto, para obtener la energía emitida en cierta dirección por el elemento de área dA_1, debemos multiplicar la intensidad por la proyección de dA_1 en la dirección especificada. Así la energía que deja dA_1 en la dirección dada por el ángulo ϕ_1 es

$$I_b \, dA_1 \cos \phi_1 \qquad (a)$$

en donde I_b es la intensidad del cuerpo negro. La radiación que llega a algún elemento de área dA_n en una distancia r desde A_1 será

$$I_b \, dA_1 \cos \phi_1 \frac{dA_n}{r^2} \qquad (b)$$

en donde dA_n se construye normal al radiovector. La cantidad dA_n/r^2 representa el ángulo sólido subtendido por el área dA_n. La intensidad se puede obtener en términos del poder emisivo integrando la expresión (b) a través de un recinto hemisférico del elemento de área dA_1. En un sistema de coordenadas esféricas así como en la Fig. 8-10,

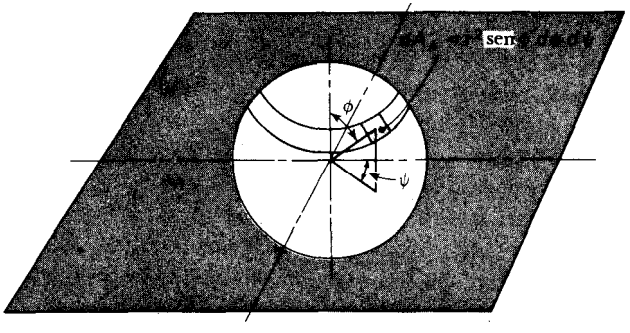


Fig. 8-10 Sistema de coordenadas esféricas utilizado en la derivación del factor de forma de la radiación.

$$dA_n = r \operatorname{sen} \phi \, d\psi \, r \, d\phi$$

Entonces

$$E_b \, dA_1 = I_b \, dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\psi$$
$$= \pi I_b \, dA_1$$

de modo que

$$E_b = \pi I_b \tag{8-20}$$

Ahora podemos regresar al problema de intercambio de energía indicado en la Fig. 8-8. El elemento de área dA_n se expresa por

$$dA_n = \cos \phi_2 \, dA_2$$

de manera que la energía que sale de dA_1 y que alcanza dA_2 es

$$dq_{1-2} = E_{b1} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \frac{dA_1 \, dA_2}{\pi r^2}$$

La energia que sale de dA_2 y llega a dA_1 es

$$dq_{2-1} = E_{b2} \cos \phi_2 \cos \phi_1 \frac{dA_2 \, dA_1}{\pi r^2}$$

y el intercambio de energía neto es

$$q_{\text{neto}\,1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \int_{A_2} \int_{A_1} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \frac{dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \tag{8-21}$$

De acuerdo con la Ec. 8-19 la integral es tanto A_1F_{12} como A_2F_{21}. Para evaluar la integral, se debe conocer la geometría específica de las superficies A_1 y A_2. Presentaremos un problema elemental y daremos los resultados en forma gráfica para geometrías mis complicadas.

Considérese la radiación desde un área pequeña dA_1 hacia el disco plano A_2, tal como la muestra la Fig. 8-11. Se escoge el elemento de área dA_2 como el anillo circular del radio x. Así

$$dA_2 = 2\pi x \, dx$$

Observamos que $\phi_1 = \phi_2$ y aplicamos la Ec. 8-21 integrando a través del área A_2:

$$dA_1 F_{dA_1-A_2} = dA_1 \int_{A_2} \cos^2 \phi_1 \frac{2\pi x \, dx}{\pi r^2}$$

Realizando las sustituciones

$$r = (R^2 + x^2)^{1/2} \qquad y \qquad \cos \phi_1 = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

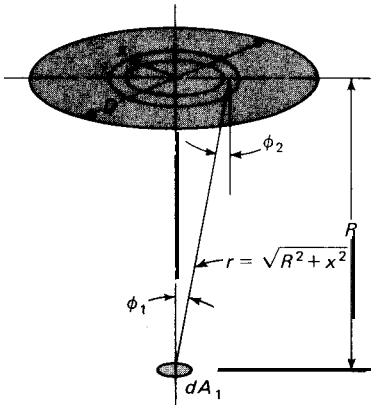


Fig. g-II Radiación de un pequeño elemento de área hacia un disco.

tenemos $$dA_1 F_{dA_1-A_2} = dA_1 \int_0^{D/2} \frac{2R^2 x\, dx}{(R^2 + x^2)^2}$$

Llevando a cabo la integración tenemos

$$dA_1 F_{dA_1-A_2} = -dA_1 \left(\frac{R^2}{R^2 + x^2}\right)^{D/2} = dA_1 \frac{D^2}{4R^2 + D^2}$$

de modo que $$F_{dA_1-A_2} = \frac{D^2}{4R^2 + D^2} \qquad (8\text{-}22)$$

El cálculo de los factores de forma se puede extender a geometrías más complejas, tal como se describe en las Refs. 3, 5 y 24; esta última proporciona un catalogo muy completo de relaciones analíticas para factores de forma. Para nuestros propósitos, sólo damos los resultados de algunas geometrías, tal como se muestran en las Figs. 8-12 a la 8-16.

Comportamiento en superficies reales

Las superficies reales exhiben interesantes desviaciones con respecto a la superficies ideales descritas en los párrafos precedentes. Por ejemplo, las superficies reales no se difunden de manera perfecta y por consiguiente la intensidad de la radiación emitida no es constante en todas las direcciones. Las características direccionales de emisión de diversos tipos de superficie, se muestran en la Fig. 8-17. Estascurvas ilustran el comportamiento característicamente diferente de los conductores y no conductores eléctricos. Los conductores emiten más energía en una dirección que tenga un amplio ángulo acimutal. Este comportamiento puede explicarse en forma satisfactoria por medio de la teoría básica de ondas electromagnéticas y se trata en la Ref. 24. Como resultado de este comportamiento básico de conductores y no conductores, podemos anticipar la apariencia de una esfera, la cual ha sido calentada hasta temperaturas de incandescencia, tal como se muestra en la Fig. 8-18. Una esfera electroconductora se ve-

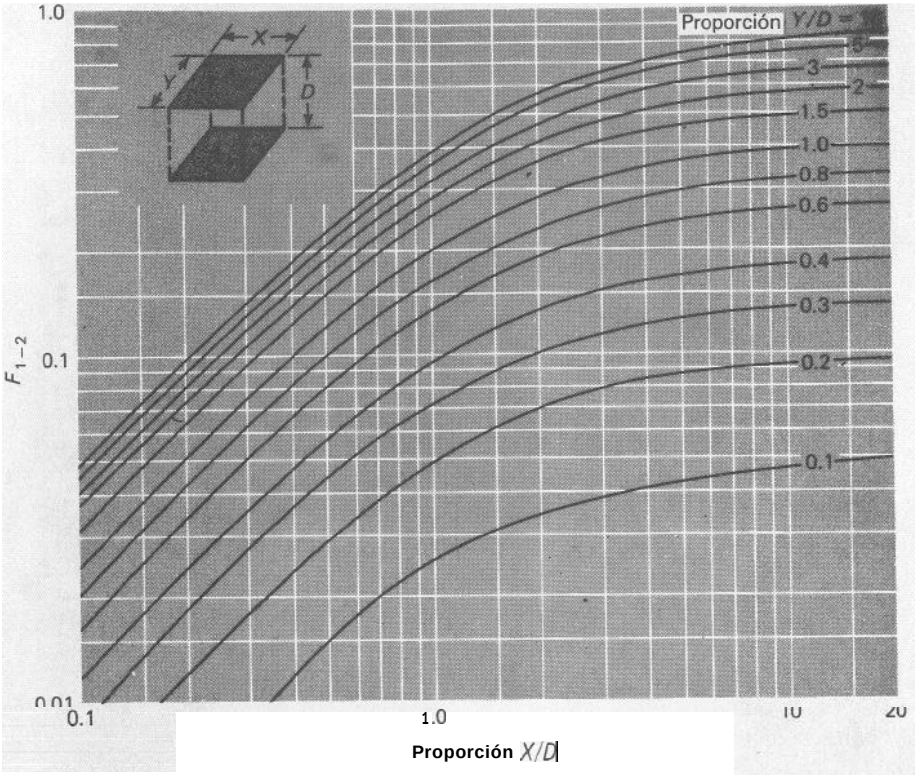


Fig. 8-12 Factor de forma de la radiación para radiaciones entre rectángulos paralelos.

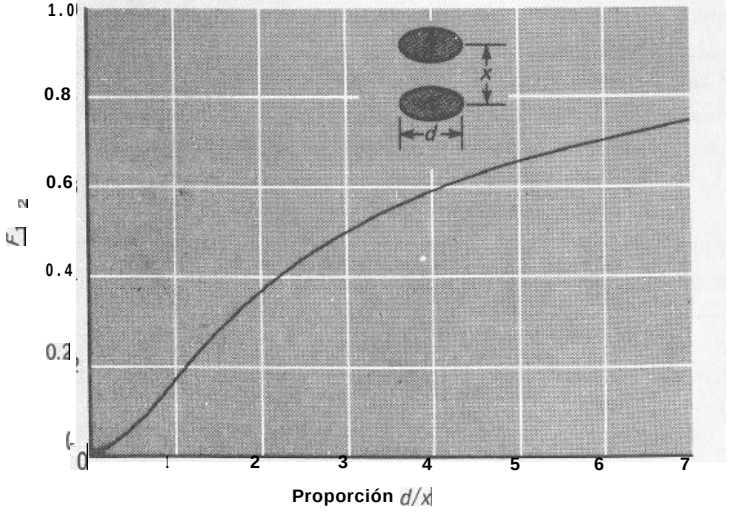


Fig. 8-13 Factor de forma de la radiación para radiaciones entre discos paralelos.

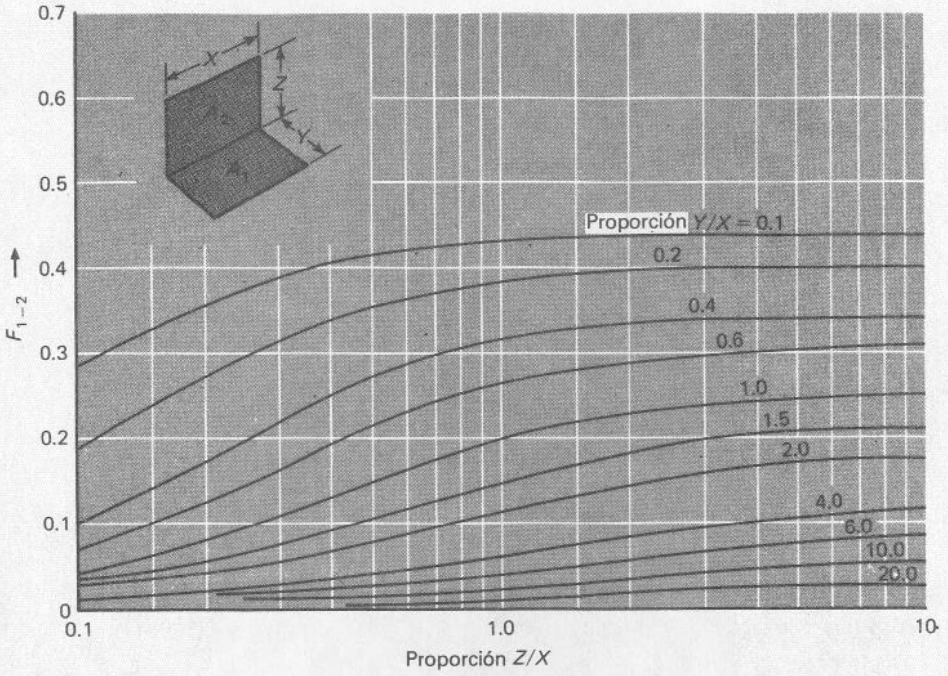


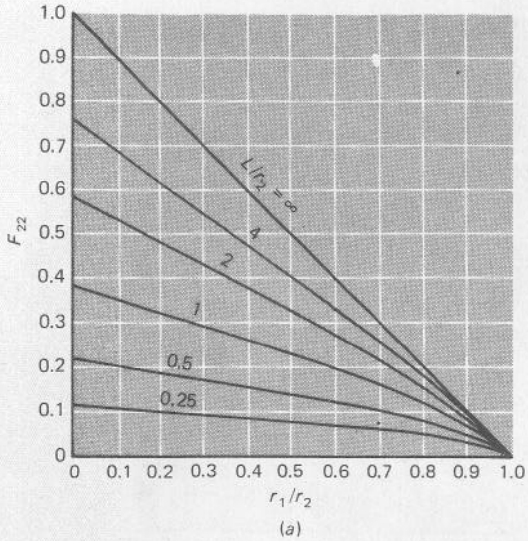
Fig. 8-14 Factor de forma de la radiación para radiaciones entre rectángulos perpendiculares con un borde común.

rá brillante alrededor del borde ya que en ángulos amplios ϕ se emite más energía. Una esfera fabricada con material no conductor presentará un comportamiento opuesto y aparecerá brillante en el centro y oscura alrededor de los bordes.

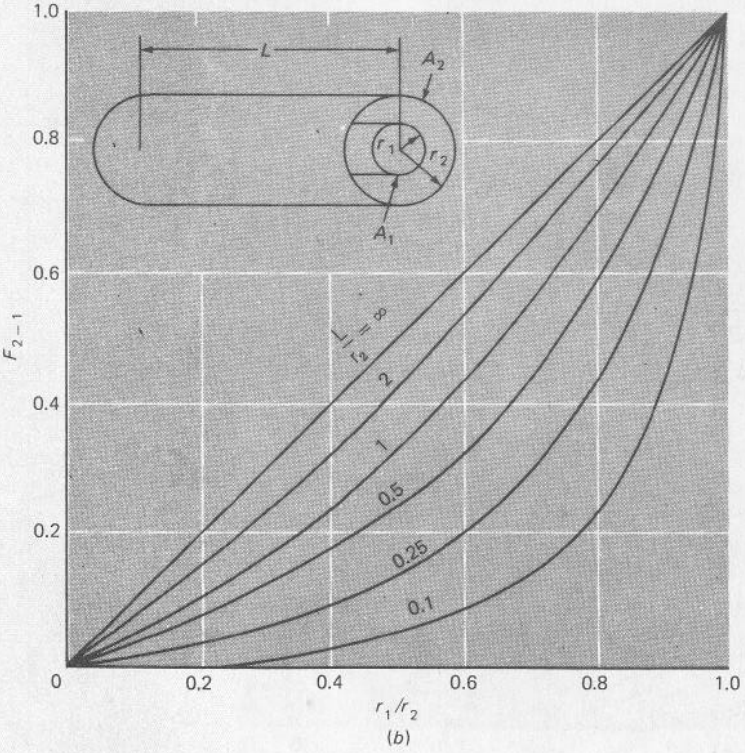
El reflejo y la absorción de la radiación térmica desde superficies reales son funciones no sólo de la superficie misma, sino también de los alrededores. Estas propiedades dependen de la dirección y longitud de onda de la radiación incidente. Pero la distribución de la intensidad de la radiación incidente con la longitud de onda puede ser una función muy complicada de las temperaturas y superficies características de todas las superficies, lo que incluye los alrededores. Señalamos como G_λ la radiación incidente total sobre una superficie, por tiempo, área y longitud de onda unitarios. Entonces la absorbencia total se expresará como la proporción de la energía total absorbida a la energía total incidente sobre la superficie, o

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda \, d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda \, d\lambda} \qquad (8\text{-}23$$

Si tenemos la fortuna de tener un cuerpo gris de manera que $\epsilon_\lambda = \epsilon$ = constante, esta relación se simplifica considerablemente. Se puede demostrar que la ley de Kirchhoff (Ec. 8-8) se puede expresar para la radiación monocromática como



(a)



(b)

Fig. 8-15 Factores de forma de la radiación para dos cilindros concéntricos de longitud finita (*a*) cilindro externo a sí mismo. (*b*) cilindro externo a cilindro interno.

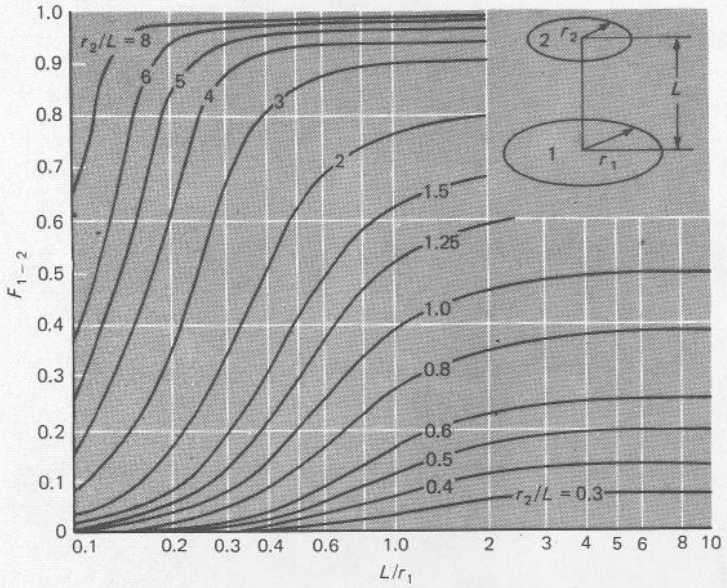


Fig. 8-16 Factor de forma de la radiación para radiaciones entre dos discos concéntricos paralelos.

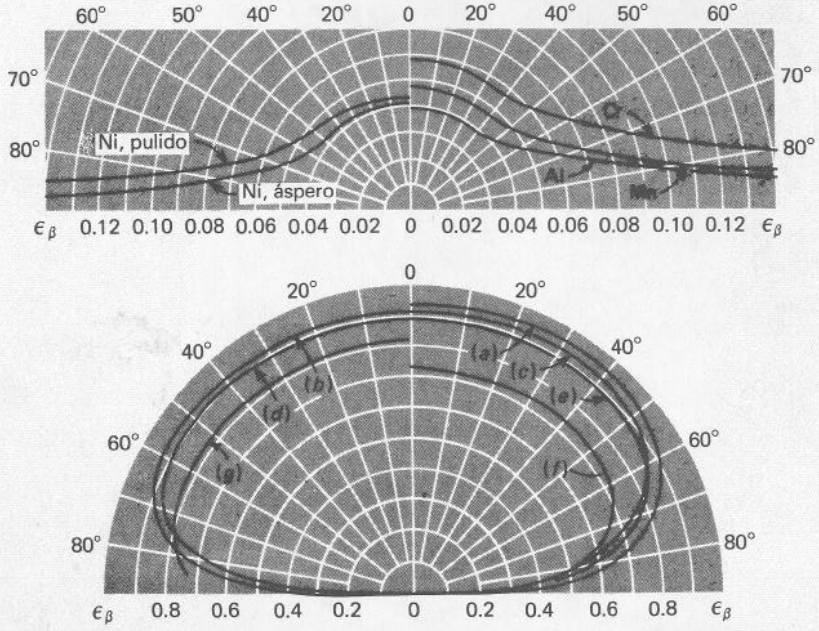


Fig. 8-17 Emisividad direccional para materiales de acuerdo a la Ref. 9: (*a*) hielo húmedo; (*b*) madera; (*c*) vidrio; (*d*) papel; (*e*) arcilla; (*f*) óxido de cobre; (*g*) óxido de aluminio.

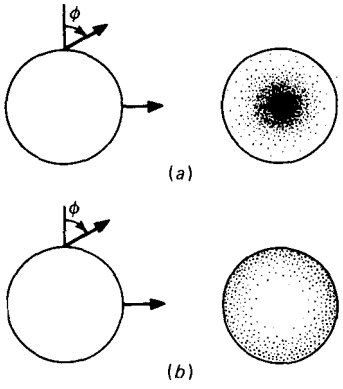


Fig. 8-18 Efecto de la emisión direccional como aparece en una esfera incandescente: (*a*) electroconductora (*b*) no electroconductora.

$$\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda \tag{8-24}$$

Por consiguiente, para un cuerpo gris, α_λ = constante, y la Ec. 8-23 expresa el resultado que la absorbencia total es también constante e independiente de la distribución de longitud de onda de radiación incidente. Además, puesto que para un cuerpo gris la emisividad y la absorbencia son constantes sobre todas las longitudes de onda también deberán ser independientes de la temperatura. Por desgracia, las superficies reales en existencia no siempre son "grises", y el suponer un comportamiento de cuerpo gris puede conducir a errores significativos. Por otra parte, el análisis de intercambio de radiación utilizando comportamiento de superficie real es tan complicado que la facilidad y simplicidad de la suposición de cuerpo gris se justifica por la utilidad práctica que proporciona. Wiebelt [ll] presenta comparaciones de cálculos de transferencia de calor basados tanto en análisis de cuerpos grises como no grises.

Ejemplo 8-2: Transferencia de calor entre superficies negras

Dos placas negras paralelas de 0.5 por 1.0 m se encuentran a 0.5 m una de la otra. Una de las placas se mantiene a 1000 °C y la otra a 500 °C. ¿Cuál es el intercambio de calor radiante neto entre las dos placas?

Solución

Las proporciones que se utilizan con la Fig. 8-12 son

$$\frac{Y}{D} = \frac{0.5}{0.5} = 1.0 \qquad \frac{X}{D} = \frac{1.0}{0.5} = 2.0$$

de manera que $F_{12} = 0.285$. La transferencia de calor se calcula de

$$q = A_1 F_{12}(E_{b_1} - E_{b_2}) = \sigma A_1 F_{12}(T_1^4 - T_2^4)$$
$$= (5.669 \times 10^{-8})(0.5)(0.285)(1273^4 \quad 7734)$$
$$= 18.33 \text{ kW } [62{,}540 \text{ Btu/h}]$$

8-5 Relaciones entre factores de forma

Se pueden obtener algunas relaciones útiles entre factores de forma considerando el sistema que se muestra en la Fig. 8- 19. Supóngase que se desea obtener el factor de forma para radiaciones desde A_3 hacia las áreas combinadas $A_{1,2}$. Este factor de forma se deberá dar sencillamente como

$$F_{3-1,2} = F_{3-1} + F_{3-2} \tag{8-25}$$

es decir, el factor de forma total es la suma de sus partes. También podríamos escribir la Ec. 8-25 como

$$A_3F_{3-1,2} = A_3F_{3-1} + A_3F_{3-2} \tag{8-26}$$

y utilizando las relaciones de reciprocidad

$$A_3F_{3-1,2} = A_{1,2}F_{1,2-3}$$
$$A_3F_{3-1} = A_1F_{1-3}$$
$$A_3F_{3-2} = A_2F_{2-3}$$

la expresión se podría volver a escribir como

$$A_{1,2}F_{1,2-3} = A_1F_{1-3} + A_2F_{2-3} \tag{8-27}$$

lo que simplemente establece que la radiación total que llega a la superficie 3 es la suma de las radiaciones que parten de las superficies 1 y 2. Supóngase que deseamos determinar el factor de forma F_{1-3} para las superficies en la Fig. S-20, en términos de los factores de forma conocidos para los rectángulos perpendiculares con un lado común. Podemos escribir

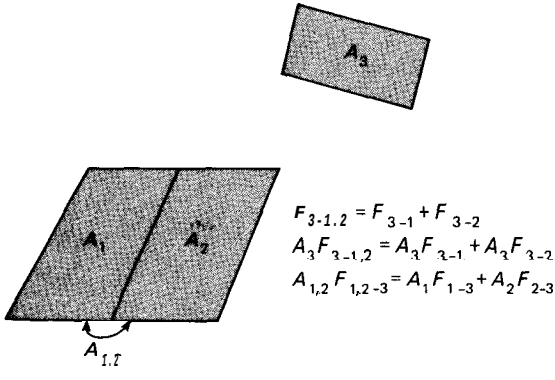


Fig. 9-19 Esquema que muestra algunas relaciones entre los factores de forma.

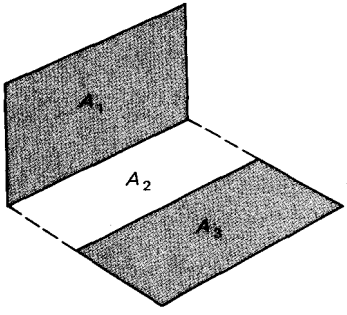


Figura 8-20

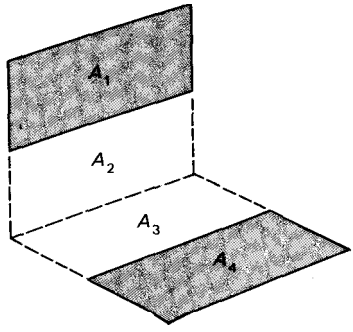


Figura 8-21

$$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$$

de acuerdo con la Ec. 8-25. Tanto $F_{,\ -2\ 3}$ como F_{1-2} se pueden determinar a partir de la Fig. 8-14, de manera que F_{1-3} se puede calcular fácilmente cuando se conocen las dimensiones. Considérese ahora una situación algo más complicada que mostramos en la Fig. 8-21. Se desea obtener una expresión para el factor de forma F_{1-4} en términos de los factores de forma conocidos para rectángulos perpendiculares con un borde común. Escribimos

$$A_{1,2}F_{1,2-3,4} = A_1F_{1-3,4} + A_2F_{2-3,4} \qquad (a)$$

de acuerdo con la Ec. 8-25. Tanto $F_{1,2-3,4}$ como $F_{2-3,4}$ se puede obtener de la Fig. 8-14 $F_{,\ -3\ 4}$ se puede expresar como

$$A_1F_{1-3,4} = A_1F_{1-3} + A_1F_{1-4} \qquad (b)$$

También,

$$A_{1,2}F_{1,2-3} = A_1F_{1-3} + A_2F_{2-3} \qquad (c)$$

Resolviendo para A_1F_{1-3} a partir de (c), insertando esto en (b), y en seguida insertando en (a) la expresión resultante para $A_1F_{1\ -3\ 4}$ nos da

$$A_{1,2}F_{1,2-3,4} = A_{1,2}F_{1,2-3} - A_2F_{2-3} + A_1F_{1-4} + A_2F_{2-3,4} \qquad (d)$$

Obsérvese que todos los factores de forma con excepción de F_{1-4} se pueden determinar a partir de la Fig. 8-14. Así

$$F_{1-4} = \frac{1}{A_1}(A_{1,2}F_{1,2-3,4} + A_2F_{2-3} - A_{1,2}F_{1,2-3} - A_2F_{2-3,4}) \qquad (8\text{-}28)$$

En el tratamiento anterior se ha hecho la suposición tácita de que los diferentes cuerpos no se ven así mismos, es decir,

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \cdots$$

Para ser general perfectamente, deberemos incluir la posibilidad de superficies curvas cóncavas, que en este caso sí se podían ver a sí mismos. Por tanto, la relación general es

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1.0 \qquad (8\text{-}29)$$

en donde F_{ij} es la fracción de la energía total que deja la superficie i la cual llega a la superficie j. Así, para un recinto de 3 superficies escribiremos

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1.0$$

y F_{11} representa la fracción de energía que deja la superficie 1 y que choca consigo mismo. Se necesita cierto cuidado al analizar los intercambios de radiación entre superficies curvas.

Hamilton y Morgan [5] han presentado las relaciones generalizadas para rectángulos paralelos perpendiculares en términos de los factores de forma que se pueden obtener de las Figs. 8-12 y 8-14. Las dos situaciones de interés se muestran en las Figs. 8-22 y 8-23. Se puede ver que para los rectángulos perpendiculares de la Fig. 8-22 se aplican las siguientes relaciones de reciprocidad [5]:

$$A_1 F_{13'} = A_3 F_{31'} = A_{3'} F_{3'1} = A_{1'} F_{1'3} \qquad (8\text{-}30)$$

Utilizando estas relaciones de reciprocidad, se puede expresar el factor de forma de radiación F_{13}, con

$$\begin{aligned} A_1 F_{13'} = \tfrac{1}{2}[&K_{(1,2,3,4,5,6)^2} - K_{(2,3,4,5)^2} - K_{(1,2,5,6)^2} \\ &+ K_{(4,5,6)^2} - K_{(4,5,6)-(1',2',3',4',5',6')} \\ &- K_{(1,2,3,4,5,6)-(4',5',6')} + K_{(1,2,5,6)-(5'6')} \\ &+ K_{(2,3,4,5)-(4',5')} + K_{(5,6)-(1',2',5',6')} \\ &+ K_{(4,5)-(2',3',4',5')} + K_{(2,5)^2} - K_{(2,5)-5'} \\ &- K_{(5,6)^2} - K_{(4,5)^2} - K_{5-(2',5')} + K_{5^2}] \end{aligned} \qquad (8\text{-}31)$$

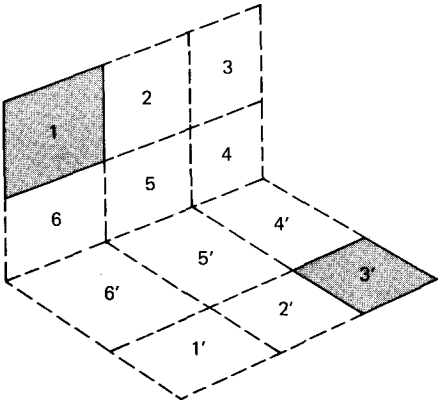


Fig. 8-22 Arreglo generalizado de rectángulo perpendicular.

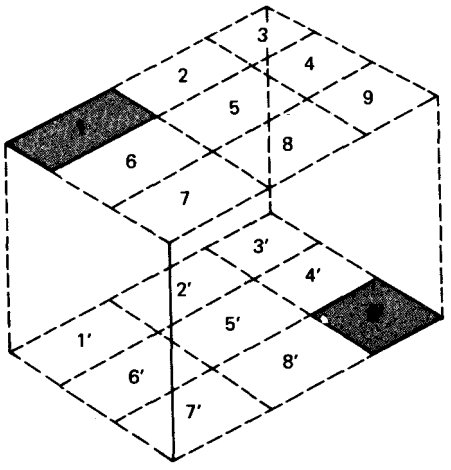


Fig. 8-23 Arreglo generalizado de rectángulo paralelo.

en donde los términos K se definen por

$$K_{m-n} = A_m F_{m-n} \tag{8-32}$$

$$K_{(m)^2} = A_m F_{m-m'} \tag{8-33}$$

En la Fig. 8-23 se presenta el arreglo generalizado de rectángulo paralelo. Las relaciones de reciprocidad que se aplican en este caso se dan en la Ref. 5 como

$$A_1 F_{19'} = A_3 F_{37'} = A_9 F_{91'} = A_7 F_{73'} \tag{8-34}$$

Utilizando estas relaciones es posible derivar el factor de forma F_{19}, como

$$\begin{aligned} A_1 F_{19'} = \tfrac{1}{4}[&K_{(1,2,3,4,5,6,7,8,9)^2} - K_{(1,2,5,6,7,8)^2} \\ &- K_{(2,3,4,5,8,9)^2} - K_{(1,2,3,4,5,6)^2} + K_{(1,3,5,6)^2} \\ &+ K_{(2,3,4,5)^2} + K_{(4,5,8,9)^2} - K_{(4,5)^2} - K_{(5,8)^2} \\ &- K_{(5,6)^2} - K_{(4,5,6,7,8,9)^2} + K_{(5,6,7,8)^2} \\ &+ K_{(4,5,6)^2} + K_{(2,5,8)^2} - K_{(2,5)^2} + K_{(5)^2}] \end{aligned} \tag{8-35}$$

La nomenclatura para los términos K es igual a la que se da en las Ecs. 8-32 y 8-33.

Ejemplo 8-3: Algebra de los factores de forma

Dos cilindros concéntricos tienen diámetros de 10 y 20 cm y una longitud de 20 cm. Calcule el factor de forma entre los extremos abiertos de los cilindros.

Solución

Para este problema utilizamos la nomenclatura de la Fig. 8-15 y designamos los lados abiertos como las superficies 3 y 4. Tenemos $L/r_2 = 20/10 = 2.0$ y $r_1/r_2 = 0.5$; así de la Fig. 8-15 obtenemos

$$F_{21} = 0.43 \qquad F_{22} = 0.33$$

Utilizando la relación de reciprocidad (Ec. E-18) tenemos

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \quad \text{y} \quad F_{12} = (d_2/d_1)F_{21} = (20/10)(0.43) = 0.86$$

Para la superficie 2 tenemos

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24} = 1.0$$

Por simetría $F_{23} = F_{24}$ de manera que

$$F_{23} = F_{24} = (\tfrac{1}{2})(1 - 0.43 - 0.33) = 0.12$$

Utilizando de nuevo la reciprocidad,

$$A_2F_{23} = A_3F_{32}$$

y

$$F_{32} = \frac{\pi(10)(20)}{\pi(20^2 - 10^2)/4}\, 0.12 = 0.64$$

Observamos que $F_{11} = F_{33} = F_{44} = 0$ y para la superficie 3

$$F_{31} + F_{32} + F_{34} = 1.0 \qquad (a)$$

De manera, que si se puede determinar F_{31}, podemos calcular la cantidad deseada F_{34}. Para la superficie 1

$$F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1.0$$

y de la simetría $F_{13} = F_{14}$ de manera que

$$F_{13} = (\tfrac{1}{2})(1 - 0.86) = 0.07$$

Utilizando reciprocidad nos da

$$A_1F_{13} = A_3F_{31}$$

$$F_{31} = \frac{\pi(10)(20)}{\pi(20^2 - 10^2)/4}\, 0.07 = 0.187$$

Entonces de la Ec. a

$$F_{34} = 1 - 0.187 \quad 0.64 = 0.173$$

Ejemplo 8-4: Algebra del factor de forma

Un cono truncado tiene 10 cm de diámetro superior, 20 cm de diámetro inferior y 10 cm de altura. Calcule el factor de forma entre la superficie superior y el lado, así como el factor de forma entre el lado y él mismo.

Solución

Para la solución de este problema empleamos la Fig. 8-16 y tomamos la nomenclatura como se indica, designando la superficie superior como superficie 2, la inferior como superficie 1 y el lado como superficie 3. Por

tanto, las cantidades requeridas son F_{23} y F_{33}. Tenemos $L/r_1 = 10/10 = 1.0$ y $r_2/L = 5/10 = 0.5$. Así, de la Fig. 8-16

$$F_{12} = 0.12$$

Por reciprocidad (Ec. 8-18)

$$A_1F_{12} = A_2F_{21}$$

$$F_{21} = (20/10)(0.12) = 0.24$$

y

$$F_{22} = 0$$

de modo que

$$F_{21} + F_{23} = 1.0$$

y

$$F_{23} = 1 - 0.24 = 0.76$$

Para la superficie 3,

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1.0 \qquad (a)$$

de manera que debemos encontrar F_{31} y F_{32} a fin de evaluar F_{33}. Puesto que $F_{11} = 0$ tenemos

$$F_{12} + F_{13} = 1.0 \qquad \text{y} \qquad F_{13} = 1 - 0.12 = 0.88$$

y por reciprocidad

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \qquad (b)$$

El área de la superficie del lado es

$$A_3 = \pi(r_1 + r_2)[(r_1 - r_2)^2 + L^2]^{1/2}$$
$$= \pi(5 + 10)(5^2 + 10^2)^{1/2} = 526.4 \text{ cm}^2$$

Por tanto, de la Ec. b

$$F_{31} = \frac{\pi(10^2)}{526.9}\,0.88 = 0.525$$

A la superficie 2 se le aplica un procedimiento similar, de manera que

$$F_{32} = \frac{\pi(5)^2}{526.9}\,0.76 = 0.113$$

Finalmente, de la Ec. a

$$F_{33} = 1 - 0.525 - 0.113 = 0.362$$

8-6 Intercambio de calor entre cuerpos que no son negros

El cálculo de la transferencia de calor por radiación entre dos superficies negras es relativamente fácil ya que toda la energía radiante que incide sobre una superficie se absorbe. El problema principal es la determinación del factor de forma geométrica, pero una vez determinado el cálculo del intercambio de calor es muy simple. Cuando se tienen cuerpos que no son negros, la situación es mucho más compleja, porque no toda la energía que incide sobre el cuerpo se absorberá; parte de ella se reflejará a su vez sobre otra superficie con transferencia de calor, y parte puede reflejarse completamente fuera del sistema. El problema se complica porque la energía radiante puede reflejarse de un lado a otro entre la superficie con transferencia de calor a otra varias veces.

El análisis del problema debe tomar en cuenta estas reflexiones múltiples si se quieren obtener conclusiones correctas.

Supondremos que todas las superficies consideradas en nuestro análisis son difusas y de temperatura uniforme y que las propiedades reflejantes y emisivas son constantes sobre toda la superficie. Se pueden definir dos nuevos términos:

G = irradiación
= radiación total incidente sobre una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área
J = radiosidad
= radiación total que deja la superficie por unidad de tiempo y unidad de área.

Además de las suposiciones antes mencionadas, supondremos que la radiosidad e irradiación son uniformes sobre cada superficie. Esta suposición no es estrictamente correcta, aun para superficies de difusión grises ideales, pero cuando no se impone esta restricción los problemas se vuelven demasiado complejos. Sparrow y Cess [10] proporcionan un estudio de estos problemas. La radiosidad es la suma de la energía emitida y de la energía reflejada cuando no se transmite energía, o

$$J = \epsilon E_b + \rho G \tag{8-36}$$

en donde ϵ es la emisividad y E_b es poder emisivo del cuerpo negro. Como se supoñe que la transmisividad es cero, la reflectividad se puede expresar como

$$\rho = 1 - \alpha = 1 - \epsilon$$

de modo que

$$J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon)G \tag{8-37}$$

La energía neta que deja la superficie es la diferencia entre la radiosidad e irradiación:

$$\frac{q}{A} = J - G = \epsilon E_b + (1 - \epsilon)G - G$$

Resolviendo para G en términos de J a partir de la Ec. S-37,

$$q = \frac{\epsilon A}{1 - \epsilon}(E_b - J)$$

o

$$q = \frac{E_b - J}{(1 - \epsilon)/\epsilon A} \tag{8-38}$$

En este punto introducimos una interpretación muy útil para la Ec. S-38. Si se considera el denominador del lado derecho como la resistencia de la superficie hacia la transferencia de calor, el numerador como una diferencia de potencial y el flujo de calor como la "corriente", entonces se podría dibujar un elemento de la red, como ocurre en la Fig. 8-24, para representar la situación física. Este es el primerpaso en el método de red de los análisis ideados por Oppenheim [20].

Considérese ahora el intercambio de energía radiante de dos superficies, A_1 y A_2. De la radiación total que sale de la superficie 1, la cantidad que llega a la superficie 2 es

$$J_1 A_1 F_{12}$$

y de toda esa energía que deja la superficie 2, la cantidad que alcanza la superficie 1 es

$$J_2 A_2 F_{21}$$

El intercambio neto entre las dos superficies es

$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21}$$

Pero $$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

de modo que $$q_{1-2} = (J_1 - J_2) A_1 F_{12} = (J_1 - J_2) A_2 F_{21}$$

o
$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}} \tag{8-39}$$

Por consiguiente podremos construir un elemento de red que representa la Ec. 8-39, tal como se muestra en la Fig. 8-25. Los dos elementos de red que se muestran en las Figs. 8-24 y 8-25 representan lo esencial del método de red de radiación. Para construir una red para un problema específico de transferencia de calor por radiación sólo será necesario conectar una "resistencia de superficie" $(1 - \epsilon)/\epsilon A$ a cada superficie y una "resistencia de espacio" $1/A_m F_{m-n}$ entre los potenciales de radiosidad. Por ejemplo, dos superficies que intercambian calor entre ellas y ***nada*** más estarán representadas por la red que se muestra en la Fig. 8-26. En este caso la transferencia de calor neta será la diferencia de potencial total dividida entre la suma de las resistencias:

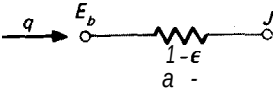


Fig. 8-24 Elemento que representa una "resistencia de superficie" en el método de red de radiación.

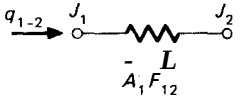


Fig. 8-25 Elemento que representa una "resistencia espacial" en el método de red de radiación.

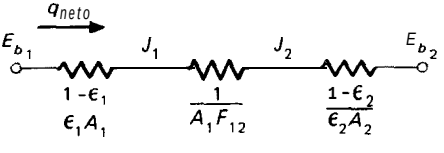


Fig. 8-26 Red de radiación para dos superficies que se miran entre ellas y nada más.

$$q_{\text{neto}} = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{(1-\epsilon_1)/\epsilon_2 A_1 + 1/A_1 F_{12} + (1-\epsilon_2)/\epsilon_2 A_2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(1-\epsilon_1)/\epsilon_2 A_1 + 1/A_1 F_{12} + (1-\epsilon_2)/\epsilon_2 A_2} \tag{8-40}$$

En la Fig. 8-27 se muestra un problema de tres cuerpos. En este caso cada cuerpo intercambia calor con los otros dos. El intercambio de calor entre el cuerpo 1 y el cuerpo 2 será

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}}$$

y el intercambio entre los cuerpos 1 y 3,

$$q_{1-3} = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{13}}$$

Para determinar los flujos de calor en un problema de este tipo se deben calcular los valores de la radiosidad. Esto se puede lograr por medio de los métodos de análisis estándar que se utilizan en la teoría de circuitos de corriente directa. El método más conveniente es una aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff para el circuito, la cual establece que la suma de las corrientes que entran a un nodo es cero. En el Ej. 8-5 se ilustra el uso de este método para el problema de tres cuerpos.

Un problema que se puede resolver fácilmente con el método de red es el de las dos superficies planas que intercambian calor entre ellas, pero están conectadas a una tercera que no intercambia calor, es decir, una superficie perfectamente aislada. Sin embargo, esta tercera superficie influye en el procesc de transferencia de calor porque absorbe y devuelve energía hacia las otras dos superficies que intercambian calor. La red para este sistema se muestra en la Fig. 8-28. Obsérvese que el nodo J_3 no está conectado a una resistencia de superficie de radiación porque la superficie 3 no intercambia energía. Obsérvese también que los valores para las resistencias de espacio se han escrito como

$$F_{13} = 1 - F_{12}$$

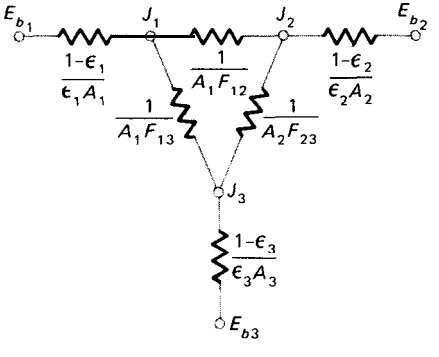


Fig. 8-27 Red de radiación para tres superficies que sólo se miran entre ellas y nada más.

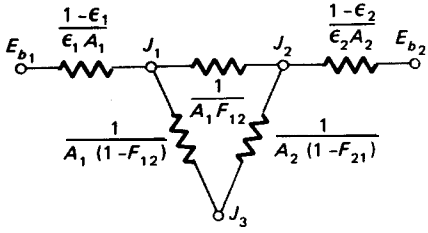


Fig. 8-28 Red de radiación para dos superficies circundadas por una tercera superficie, la cual no es conductora pero sí irradia de nuevo.

$$F_{23} = 1 - F_{21}$$

ya que la superficie 3 rodea por completo las otras dos. La red en la Fig. 8-28 es un sistema simple en serie y en paralelo, y para el flujo de calor puede resolverse como

$$q_{\text{neto}} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}}{A_2 - A_1 (F_{12})^2} + \left(\dfrac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \tag{8-41}$$

en donde la relación de reciprocidad

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

se ha usado para simplificar la expresión. Se ***deberá observar que las Ecs. 8-41 sólo se aplican a las superficies que no se ven a ellas mismas, es decir, $F_{11} = F_{22} = 0$.***

Esta red y otras que utilizaremos suponen que el único intercambio de calor se realiza por radiación. Por el momento se ignoran la conducción y la convección.

Ejemplo 8-5: Placas calientes en una habitación

Dos placas paralelas de 0.5 por 1.0 m se encuentran a 0.5 m de distancia ente ellas. Una de las placas se mantiene a 1000 °C y la otra a 500 °C. Las emisividades de las placas son 0.2 y 0.5, respectivamente. Las placas se encuentran dentro de una habitación muy amplia cuyas paredes se mantienen a 27 "C. Las placas intercambian calor entre ellas y con la habitación, pero sólo se considerarán las superficies de las placas que se miran entre sí. Encuentre la transferencia neta para cada placa y para la habitación.

Solución

Este es un problema de tres cuerpos, las dos placas y la habitación, de manera que en la Fig. 8-27 podemos ver la red de radiación. Por los datos del problema tenemos que

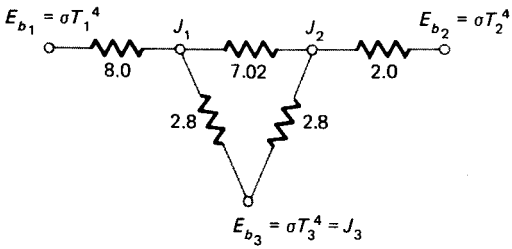


Figura Ejemplo 8-5

$$T_1 = 1000\ ^\circ\text{C} = 1273\ \text{K} \qquad A_1 = A_2 = 0.5\ \text{m}^2$$
$$T_2 = 500\ ^\circ\text{C} = 773\ \text{K} \qquad \epsilon_1 = 0.2$$
$$T_3 = 27\ ^\circ\text{C} = 300\ \text{K} \qquad \epsilon_2 = 0.5$$

Como el área de la habitación A_3 *es muy* grande, la resistencia $(1 - \epsilon_3)/\epsilon_3 A_3$ *se* puede tomar como cero y obtenemos $E_{b3} = J_3$. El factor de forma se da en el Ej. 8-2:

$$F_{12} = 0.285 = F_{21}$$
$$F_{13} = 1 - F_{12} = 0.715$$
$$F_{23} = 1 - F_{21} = 0.715$$

Las resistencias en la red se calculan como

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} = \frac{(1 - 0.2)}{(0.2)(0.5)} = 8.0 \qquad \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2} = \frac{(1 - 0.5)}{(0.5)(0.5)} = 2.0$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{(0.5)(0.285)} = 7.018 \qquad \frac{1}{A_1 F_{13}} = \frac{1}{(0.5)(0.715)} = 2.797$$

$$\frac{1}{A_2 F_{23}} = \frac{1}{(0.5)(0.715)} = 2.797$$

Tomando como cero la resistencia $(1 - \epsilon_3)/\epsilon_3 A_3$, tenemos la red como se muestra. Para calcular los flujos de calor en cada superficie debemos determinar las radiosidades J_1 y J_2. La red se resuelve estableciendo la suma de las corrientes de calor e introduciendo los nodos J_1 y J_2 *igual* a *cero:*

nodo J_1:
$$\frac{E_{b_1} - J_1}{8.0} + \frac{J_2 - J_1}{7.018} + \frac{E_{b_3} - J_1}{2.797} = 0 \qquad (a)$$

nodo J_2:
$$\frac{J_1 - J_2}{7.018} + \frac{E_{b_3} - J_2}{2.797} + \frac{E_{b_2} - J_2}{2.0} \qquad (b)$$

Ahora
$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 148.87\ \text{kW/m}^2\ [47\,190\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2]$$
$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 20.241\ \text{kW/m}^2\ [6416\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2]$$
$$E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 0.4592\ \text{kW/m}^2\ [145.6\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2]$$

Al introducir los valores de E_{b1}, E_{b2}, y E_{b3} en las Ecs. (a) y(b), tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas J_1 y J_2 que pueden resolverse simultáneamente para obtener

$$J_1 = 33.469\ \text{kW/m}^2 \qquad J_2 = 15.054\ \text{kW/m}^2$$

La pérdida total de calor de la placa 1 es

$$q_1 = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1} = \frac{148.87 - 33.469}{8.0} = 14.425\ \text{kW}$$

y el calor total perdido por la placa 2 es

$$q_2 = \frac{E_{b_2} - J_2}{(1 - \epsilon_2)/\epsilon_2 A_2} = \frac{20.241 - 15.054}{2.0} = 2.594\ \text{kW}$$

El calor total que recibe la habitación es

$$q_3 = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1F_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{1/A_2F_{23}}$$
$$= \frac{33.469 - 0.4592}{2.797} + \frac{15.054 - 0.4592}{2.797} = 17.020 \text{ kW} \quad [58\,070 \text{ Btu/h}]$$

Desde el punto de vista del equilibrio total tenemos que tener

$$q_3 = q_1 + q_2$$

porque la energía neta perdida por las dos placas debe absorberse por la habitación

Ejemplo 8-6: Superficie en equilibrio radiante

Dos rectángulos de 50 por 50 cm se colocan perpendicularmente con un borde en común. Una de las superficies tiene T_1 = 1000 K, ϵ_1 = 0.6 mientras la otra superficie está aislada yen equilibrio radiante con la enorme habitación que los rodea y que se encuentra a 300 K. Determine la temperatura de la superficie aislada y el calor perdido por la superficie a 1000 K

Solución

La red de radiación se muestra en la figura adjunta en la que la superficie 3 es la habitación y la superficie 2 es la superficie aislada. Obsérvese que $J_3 = E_{b3}$ ya que la habitación es grande y $(1 - \epsilon_3)/\epsilon_3 A_3$ se aproxima a cero. Como la superficie 2 está aislada su transferencia de calor es cero y $J_2 = E_{b2}$. J_2 "flota" en la red y se determina a partir del equilibrio radiante total. Según la Fig. 8-14 los factores de forma son

$$F_{12} = 0.2 = F_{21}$$

Como $F_{11} = 0$ y $F_{22} = 0$ tenemos que

$$F_{12} + F_{13} = 1.0 \qquad \text{y} \qquad F_{13} = 1 - 0.2 = 0.8 = F_{23}$$
$$A_1 = A_2 = (0.5)^2 = 0.25 \text{ m}^2$$

Las resistencias son

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} = \frac{0.4}{(0.6)(0.25)} = 2.667$$

$$\frac{1}{A_1F_{13}} = \frac{1}{A_2F_{23}} = \frac{1}{(0.25)(0.8)} = 5.0$$

$$\frac{1}{A_1F_{12}} = \frac{1}{(0.25)(0.2)} = 20.0$$

También tenemos

$$E_{b_1} = (5.669 \times 10^{-8})(1000)^4 = 5.669 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$
$$J_3 = E_{b_3} = (5.669 \times 10^{-8})(300)^4 = 459.2 \text{ W/m}^2$$

El circuito total es un arreglo en serie y en paralelo y la transferencia de calor es

$$q = \frac{E_{b_1} - E_{b_3}}{R_{\text{equiv}}}$$

Tenemos

$$R_{\text{equiv}} = 2.667 + \frac{1}{\frac{1}{5} + 1/(20 + 5)} = 6.833$$

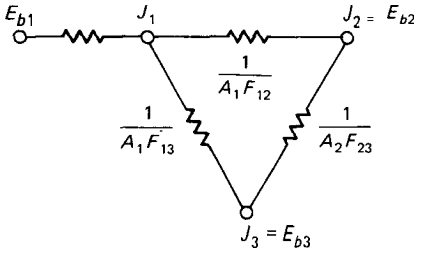


Figura Ejemplo 8-8

$$q = \frac{56\,690 - 459.2}{6.833} = 8.229 \text{ kW} \quad [28\,086 \text{ Btu/h}]$$

Esta transferencia de calor también se puede escribir como

$$q = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1}$$

Insertando los valores obtenemos

$$J_1 = 34\,745 \text{ W/m}^2$$

El valor de J_2 se determina realizando una proporción de las resistencias entre J_1 y J_3 de manera que

$$\frac{J_1 - J_2}{20} = \frac{J_1 - J_3}{20 + 5}$$

$$J_2 = 7316 = E_{b_2} = \sigma T_2^4$$

Finalmente, obtenemos la temperatura corno

$$T_2 = \left(\frac{7316}{5.669 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 599.4 \text{ K} \quad [619\ ^\circ\text{F}]$$

8-7 Planos paralelos infinitos

Cuando se consideran dos planos paralelos infinitos, A_1 y A_2 son iguales y el factor de forma de radiación es una unidad ya que toda la radiación que sale de un plano llega hasta el otro. La red es la misma que se ve en la Fig. 8-26, y el flujo de calor por unidad de área se puede obtener de la Ec. 8-40 haciendo $A_1 = A_2$ y $F_{12} = 1.0$. Así

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} \tag{8-42}$$

Cuando dos cilindros concéntricos largos, como se muestran en la Fig. 8-29, intercambian calor, podemos aplicar de nuevo la Ec. 8-40. Reescribiendo la ecuación y observando que $F_{12} = 1.0$,

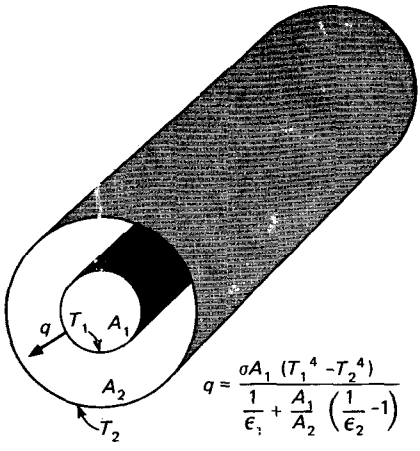


Fig. 8-29 Intercambio de radiación entre dos superficies cilíndricas.

$$q = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\epsilon_2 - 1)} \tag{8-43}$$

La proporción de áreas A_1/A_2 se puede reemplazar por la proporción de diámetros d_1/d_2 cuando se trata de cuerpos cilíndricos.

La Ec. 8-43 es de particular importancia cuando se aplican al caso límite de un objeto convexo encerrado por completo por una superficie cóncava. En este caso $A_1/A_2 \to 0$ y tenemos como resultado la relación sencilla:

$$q = \sigma A_1 \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \tag{8-43a}$$

Esta ecuación se aplica con facilidad al cálculo de la pérdida de calor de un objeto caliente en una habitación amplia.

8-8 Protección contra la radiación

Una manera de reducir la transferencia de calor radiante entre dos superficies específicas es utilizar materiales que sean altamente reflejantes. Un método alternativo es la utilización de protecciones contra la radiación entre las dos superficies que intercambian calor. Estas protecciones no aportan ni extraen calor alguno del sistema total; sólo proporcionan una nueva resistencia en la trayectoria del flujo de calor de manera que la transferencia total de calor se retrasa. Considérense los dos planos paralelos infinitos que se muestran en la Fig. 8-30*a*. Hemos demostrado que el intercambio de calor entre estas superficies.se puede calcular con la Ec. 8-42. Considérense ahora estos mismos dos planos, pero esta vez con una protección colocada entre ellos, como se ve en la Fig. 8-30*b*. Se calculará la transferencia de calor para este último caso y se le comparará con la transferencia de calor sin la protección.

Como la protección no aporta ni extrae calor del sistema, la transferencia de calor entre la placa 1 y la protección será exactamente la misma que entre la protección y la placa 2, y esto es la transferencia total de calor. Así

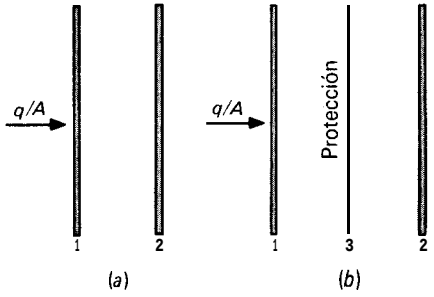


Fig. 8-30 Radiación entre planos infinitos paralelos con y sin protección contra radiación.

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_3 - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_3 + 1/\epsilon_2 - 1} \tag{8-44}$$

La única incógnita en la Ec. 8-44 es la temperatura de la protección T_3. Una vez obtenida esta temperatura se calcula fácilmente la transferencia de calor. Si las emisividades de las tres superficies son iguales, es decir, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, obtendremos la sencilla relación

$$T_3^4 = \tfrac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) \tag{8-45}$$

y la transferencia de calor es

$$\frac{q}{A} = \frac{\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_3 - 1}$$

Pero como $\epsilon_3 = \epsilon_2$, observamos que este flujo de calor es sólo la mitad del que se tendría si no hubiera protección. En la Fig. 8-31 se da la red de radiación que corresponde a la situación que se muestra en la Fig. 8-306.

Los problemas de radiación múltiple con protección se pueden tratar de una manera similar a la que acabamos de ver. Cuando las emisividades de todas las superficies son diferentes, la transferencia de calor total puede calcularse con mayor facilidad utilizando una red de radiación en serie con el número de elementos adecuados, similar a la que se muestra en la Fig. 8-31. Si las emisividades de todas las superficies son iguales se puede derivar una relación más simple para la transferencia de calor cuando las superficies se puedan considerar como planos paralelos infinitos. Sea n el número de protecciones. Considerando la red de radiación para el sistema, todas las "resistencias de superficie" serán las mismas ya que las emisividades son iguales. Habrá dos de estas resistencias para cada protección y una para cada superficie con transferencia de calor. Habrá $n + 1$ "resistencias de espacio" y todas ellas serán unitarias ya que los factores de forma de radiación son unitarios para los planos paralelos infinitos. La resistencia total en la red será entonces

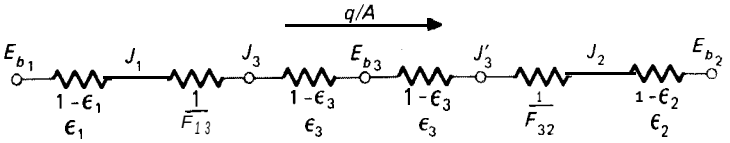


Fig. 8-31 Red de radiación pata dos planos paralelos separados por una protección contra radiación.

$$R(n \text{ protecciones}) = (2n + 2)\frac{1 - \epsilon}{\epsilon} + (n + 1)(1) = (n + 1)\left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right)$$

Cuando no hay protección la resistencia es

$$R(\text{sin protección}) = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \quad 1 = \frac{2}{\epsilon} - 1$$

Dijimos que la resistencia es $n + 1$ veces mayor cuando hay protección que cuando no la hay. Así

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\substack{\text{con} \\ \text{protecciones}}} = \frac{1}{n + 1}\left(\frac{q}{A}\right)_{\substack{\text{sin} \\ \text{protecciones}}} \tag{8-46}$$

si las temperaturas de las superficies de transferencia de calor se mantienen igual para ambos casos. El método de red de radiación también se puede aplicar a problemas con protección que involucran sistemas cilíndricos. En estos casos se deben usar las relaciones de área apropiadas.

Obsérvese que el análisis anterior, que trata de planos paralelos infinitos, se ha realizado sobre una base de área unitaria, ya que todas las áreas son iguales.

Ejemplo 8-7: Reducción de transferencia de calor con protección

Dos planos paralelos muy grandes con emisividades de 0.3 y 0.8 intercambian calor. Encuentre el porcentaje de reducción en la transferencia de calor cuando se coloca entre ellos una protección contra la radiación de aluminio pulido ($\epsilon = 0.04$).

Solución

La transferencia de calor sin protección se expresa por

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} = 0.279\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

En la Fig. 8-31 se muestra la red de radiación para el problema con protección. Las resistencias son

$$\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = 2.333$$

$$\frac{1-\epsilon_3}{\epsilon_3} = \frac{1-0.04}{0.04} = 24.0$$

$$\frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{1-0.8}{0.8} = 0.25$$

La resistencia total es

$$2.333 + (2)(24.0) + (2)(1) + 0.25 = 52.583$$

y la transferencia de calor

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{52.583} = 0.01902\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

de manera que la transferencia de calor se reduce en un 93.2%.

Ejemplo 8-8: Protección cilíndrica abierta

Los dos cilindros concéntricos del Ej. 8-3 tienen $T_1 =$ 1000 K, $\epsilon_1 = 0.8$, $\epsilon_2 = 0.2$ y están colocados en una habitación grande a 300 K. El cilindro exterior se encuentra en equilibrio radiante. Calcule la temperatura del cilindro exterior y el calor total perdido Por el cilindro interior.

Solución

La red para este problema se muestra en la figura que lo acompaña. A la habitación se le designa como superficie 3 y $J_3 = E_{b3}$, ya que la habitación es muy grande. En este problema debemos considerar el interior y el exterior de la superficie 2, por tanto colocaremos los subíndices i y o para designar las cantidades respectivas. Los factores de forma se pueden obtener del Ej. 8-3 como

$$F_{12} = 0.86 \qquad F_{2i} = (2)(0.07) = 0.14$$

$$F_{23i} = (2)(0.12) = 0.24 \qquad F_{23o} = 1.0$$

También,

$$A_1 = \pi(0.1)(0.2) = 0.06283 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi(0.2)(0.2) = 0.12566 \text{ m}^2$$

$$E_{b_1} = (5.669 \times 10^{-8})(1000)^4 = 5.669 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

$$E_{b_3} = (5.669 \times 10^{-8})(300)^4 = 459.2 \text{ W/m}^2$$

y las resistencias se pueden calcular como

$$\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} = 3.979 \qquad \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2} = 31.83$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = 18.51 \qquad \frac{1}{A_2 F_{23i}} = 33.16$$

$$A_2 F_{23o} = 2.958 \qquad A_1 F_{13} = 113.7$$

Podríamos resolver la red como una serie de circuitos paralelos para obtener la transferencia de calor, pero como de todas maneras necesitaremos las radiosidades, estableceremos tres ecuaciones nodales para resolver Para J_1, J_2, y J_{2o}. Sumamos las corrientes dentro de cada nodo y las establecemos como iguales a cero:

nodo J_1:

$$\frac{E_{b_1} - J_1}{3.979} + \frac{E_{b_3} - J_1}{113.7} + \frac{J_{2i} - J_1}{18.51} = 0$$

nodo J_{2i}:

$$\frac{J_1 - J_2}{18.51} + \frac{E_{b_3} - J_{2i}}{33.16} + \frac{J_{2o} - J_{2i}}{(2)(31.83)} = 0$$

Nodo J_{2o}:

$$\frac{E_{b_3} - J_{2o}}{7.958} + \frac{J_{2i} - J_{2o}}{(2)(31.83)} = 0$$

Estas ecuaciones tienen como solución

$$J_1 = 50\,148 \text{ W/m}^2$$
$$J_{2i} = 27\,811 \text{ W/m}^2$$
$$J_{2o} = 3498 \text{ W/m}^2$$

Se calcula *entonces* la transferencia de calor corno

$$q = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1} = \frac{56\,690 - 50\,148}{3.979} = 1644 \text{ W} \quad [5611 \text{ Btu/h}]$$

A partir de la red podemos observar que

$$E_{b_2} = \frac{J_{2i} + J_{2o}}{2} = \frac{27\,811 + 3498}{2} = 15\,655 \text{ W/m}^2$$

$$T_2 = \left(\frac{15655}{5.669 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 724.9 \text{ K} \quad [845 \text{ °F}]$$

Si el cilindro exterior no hubiera estado colocado de manera que actuara como una "protección", el calor perdido por el cilindro 1 se hubiera podido calcular a partir de la Ec. 8-43*a* como

$$q = \epsilon_1 A_1 (E_{b_1} - E_{b_3})$$
$$= (0.8)(0.06283)(56\,690 - 459.2) = 2856 \text{ W} \quad [9645 \text{ Btu/h}]$$

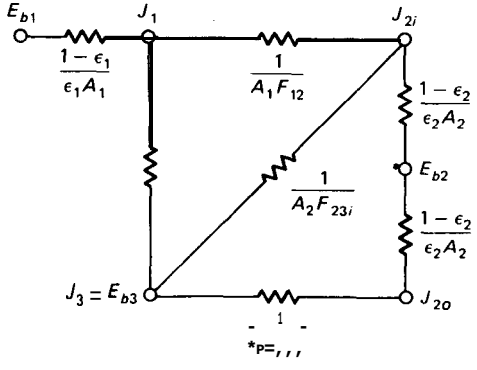


Figura Ejemplo 8-8

8-9 Radiación en gases

El intercambio de radiación entre un gas y una superficie de transferencia de calor se considera más complejo que las situaciones que describimos en las secciones precedentes. A diferencia de la mayor parte de los sólidos, en la generalidad de los casos los gases son transparentes a la radiación. Cuando absorben y emiten radiaciones, en general lo hacen sólo en ciertas bandas estrechas de longitud de onda. Algunos gases, como el N_2, 0_2 y otros con estructura molecular simétrica no polar, son esencialmente transparentes a bajas temperaturas, mientras que el CO_2, H_20 y varios gases de hidrocarburos pueden emitir radiación en forma considerable.

Considerando el sistema que se muestra en la Fig. 8-32, la absorción de radiación en capas de gas se puede describir analíticamente de la siguiente manera. Un rayo monocromático de radiación que tenga una intensidad I_λ incide sobre la capa de gas de espesor dx. Se supone que la disminución en intensidad que resulta de la absorción en la capa será proporcional al espesor y a la intensidad de la radiación en ese punto. Así

$$dI_\lambda = -a_\lambda I_\lambda \, dx \tag{8-47}$$

en donde la constante de proporcionalidad a_λ se conoce como el coeficiente de absorción monocromática. Integrando esta ecuación se obtiene

$$\int_{I_{\lambda 0}}^{I_{\lambda x}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \int_0^x -a_\lambda \, dx$$

$$\frac{I_{\lambda x}}{I_{\lambda 0}} = e^{-a_\lambda x} \tag{8-48}$$

A la Ec. 8-48 se le llama ley de Beer, y representa la conocida fórmula de decaimiento exponencial que se encuentra en muchos tipos de análisis de radiación que tratan con absorción. De acuerdo con las definiciones que dimos en la Sec. 8-3, la transmisividad monocromática se expresa como

$$\tau_\lambda = e^{-a_\lambda x} \tag{8-49}$$

Si el gas no es reflejante, tenemos

$$\tau_\lambda + \alpha_\lambda = 1$$

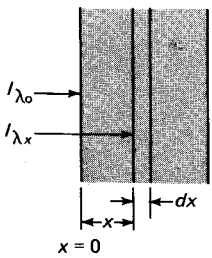


Fig. 8-32 Absorción en una capa de gas.

$$\alpha_\lambda = 1 - e^{-a_\lambda x} \tag{8-50}$$

Como se dijo anteriormente, con frecuencia los gases sólo absorben en bandas estrechas de longitud de onda, lo que se muestra en la Fig. 8-33 para el caso del vapor de agua. Estas curvas también indican el efecto del espesor de la capa de gas sobre la absorbencia monocromática.

El cálculo de las propiedades de radiación en gases es bastante complicado y para información detallada se deberán consultar las Refs. 23 a 25. Hottel [23] ha presentado un procedimiento simplificado para los cálculos de ingeniería que se pueden usar en el caso de emisiones de vapor de agua y gases de bióxido de carbono. También disponemos de métodos para la evaluación del intercambio de radiación entre estos gases y recintos.

Longitud media del haz

Las Ecs. 8-48 y 8-50 describen la variación en intensidad y la absorbencia para una capa de gas de espesor x. Estos son los valores que esperaríamos poder medir en un experimento de laboratorio, con radiaciones que pasan directamente a través de la capa. Si imaginamos un problema práctico, el de un gas encerrado entre dos grandes placas paralelas que emiten la radiación de una manera difusa, podemos ver que la energía radiante transmitida a través del gas recorre mucha distancia; la energía transmitida a la superficie, de manera normal, recorre una distancia igual a la distancia entre los planos; la energía emitida en los ángulos obtusos se absorbe en el gas sobre una distancia mucho mayor, y así sucesivamente. Después de una cuidadosa correlación de diversas fuentes de datos experimentales, Hottel y Egbert [29] pudieron presentar las emisividades de gas para el bióxido de carbono y el vapor de agua, tal como se muestra en las Figs. 8-34 y 8-35. En estas figuras L_e es una dimensión característica del sistema denominado la ***longitud media del*** haz. En la Tabla 8-2 se presentan tabulaciones de estas longitudes, de acuerdo con Hottel [22] y Eckert y Drake [25]. En ausencia de información sobre la longitud media del haz para una geometría específica, se podrá obtener una aproximación satisfactoria a partir de

$$L_e = 3.6\frac{V}{A} \tag{8-51}$$

en donde V es el volumen total del gas y A es el área de superficie total. En las Figs. 8-34 y 8-35 la presión total de la mezcla es 1 atm, y p_c y p_w representan las presiones parciales de bióxido de carbono y vapor de agua, respectivamente. Para presiones totales que no sean 1 atm, se proporcionan factores de corrección en las Figs. 8-36 y 8-37 Cuando se encuentran presentes tanto en vapor de agua como el bióxido de carbono se deberá sustraer del total de las emisividades de los dos componentes una corrección adicional $\Delta\epsilon$ de la Fig. 8-38; así la emisividad total de gas de la mezcla ϵ_g se expresa como

$$\epsilon_g = C_c\epsilon_c + C_w\epsilon_w - \Delta\epsilon \tag{8-52}$$

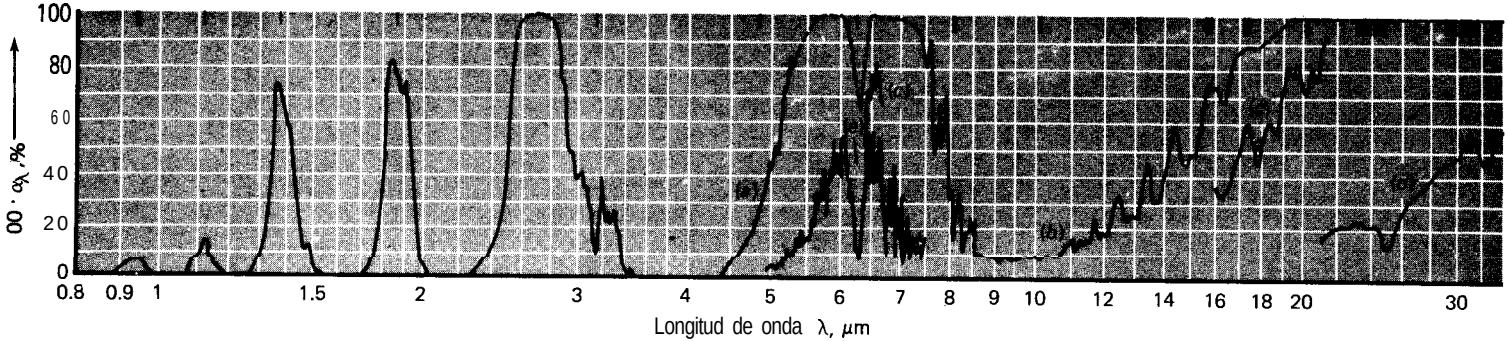


Fig. 8-33 Absorbencia monocromática del vapor de agua de acuerdo con la Ref. 8. Para longitudes de onda de 0.8 a 4 pm, temperatura del vapor 127 "C, espesor de capa 109 cm; longitudes de onda de 4 a 34 μm; (*a*) temperatura 127 "C, espesor de capa 109 cm; (*b*) temperatura 127 "C, espesor de capa 104 cm; (*c*) temperatura 127 "C, espesor de capa 32.4 cm; (*d*) temperatura 81 "C, espesor de capa 32.4 cm, mezcla con corriente de aire correspondiente a una capa de vapor de espesor aproximado de 4 cm; (*e*) temperatura ambiente, capa de aire húmedo de 200 cm de espesor correspondiente a una capa de vapor a presión atmosférica de espesor aproximado de 7 cm.

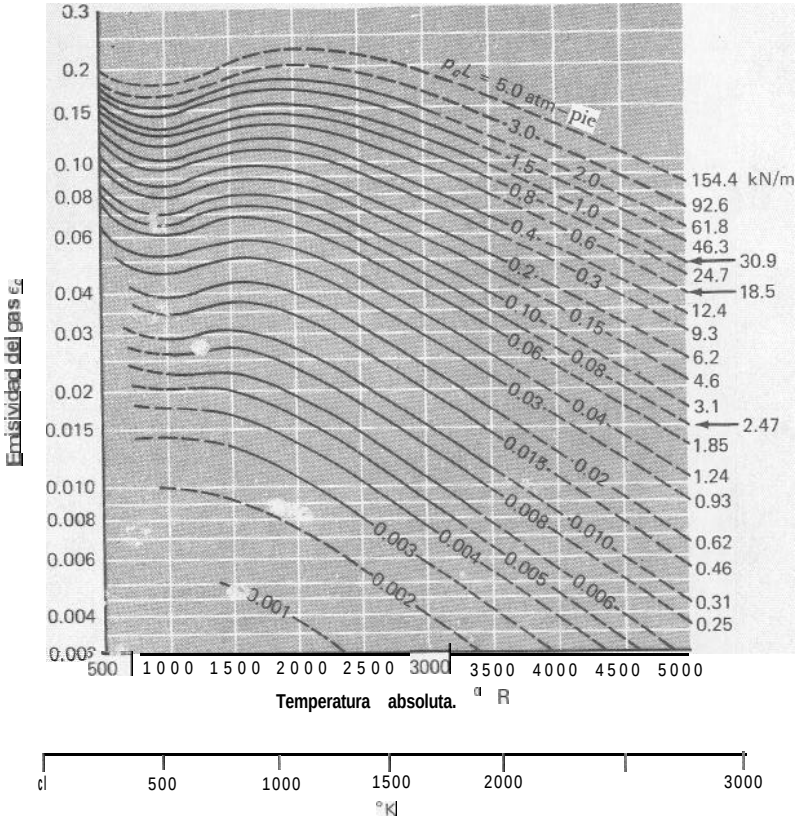


Fig. 8-34 Emisividad para bióxido de carbono, para una presión total = 1 atm; 1 .0 kN/m = 0.03238 atm·pie, de acuerdo con la Ref. 22.

Intercambio de calor entre un volumen de gas y un recinto negro

Considérese ahora un volumen de gas a una temperatura uniforme T_g encerrado por una superficie negra a una temperatura T_w. Debido a la estructura de bandas del gas, la absorción de la energía emitida por la pared en T_w diferirá de la energía emitida por el gas en T_g. Por tanto, la transferencia neta de calor del gas hacia el recinto es

$$\frac{q}{A} = \text{energía emitida por el gas-energía del recinto absorbida por el gas}$$

$$= \epsilon_g(T_g)\sigma T_g^4 - \alpha_g(T_w)\sigma T_w^4 \qquad (8\text{-}53)$$

en donde $\epsilon_g(T_g)$ es la emisividad del gas en T_g, la cual se evalúa tal como se describió anteriormente, $\alpha_g(T_w)$ es la del gas para la radiación que proviene del recinto negro en T_w y una función de ambas T_w y T_g. Para una mezcla de bióxido de carbono y vapor de agua, una relación empírica para α_g sería

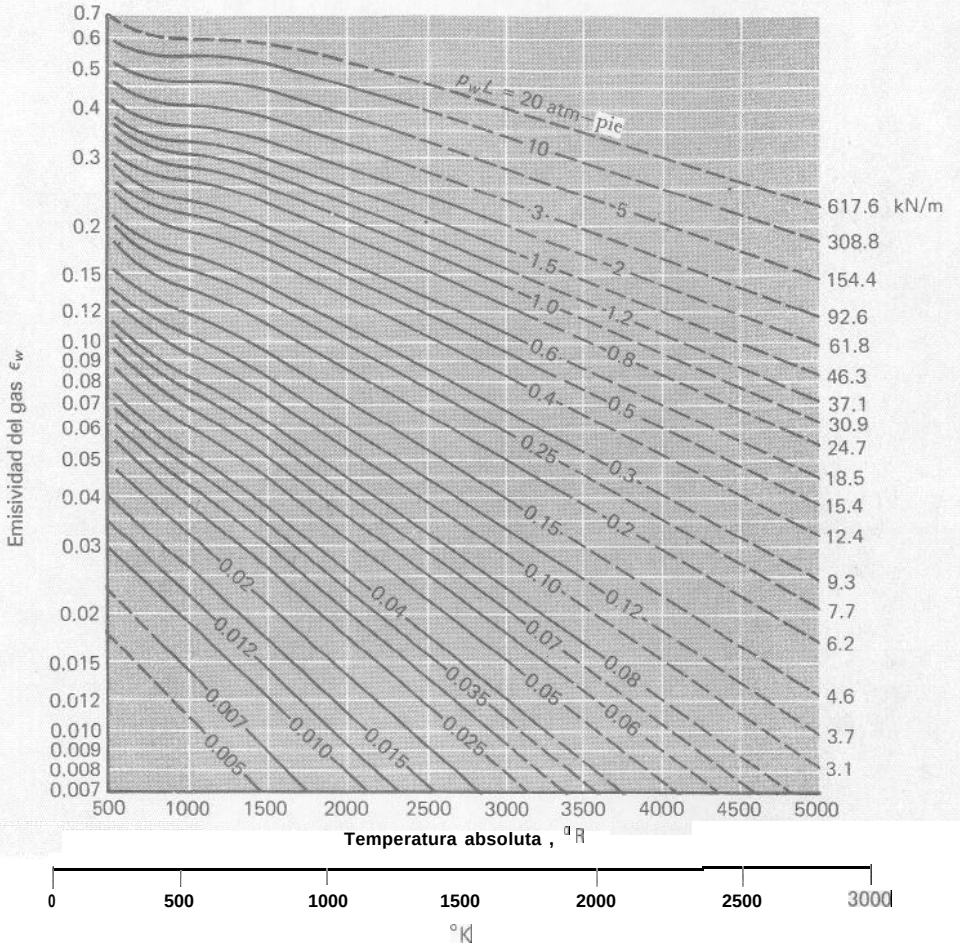


Fig. 8-35 Emisividad para el vapor de agua para presión total = 1 atm; 1.0 kN/m = 0.03238 atm·pie, de acuerdo con la Ref. 22.

$$\alpha_g(T_w) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha \tag{8-54}$$

en donde

$$\alpha_c = C_c \epsilon'_c \left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.65} \tag{8-55}$$

$$\alpha_w = C_w \epsilon'_w \left(\frac{T_g}{T_w}\right)^{0.45} \tag{8-56}$$

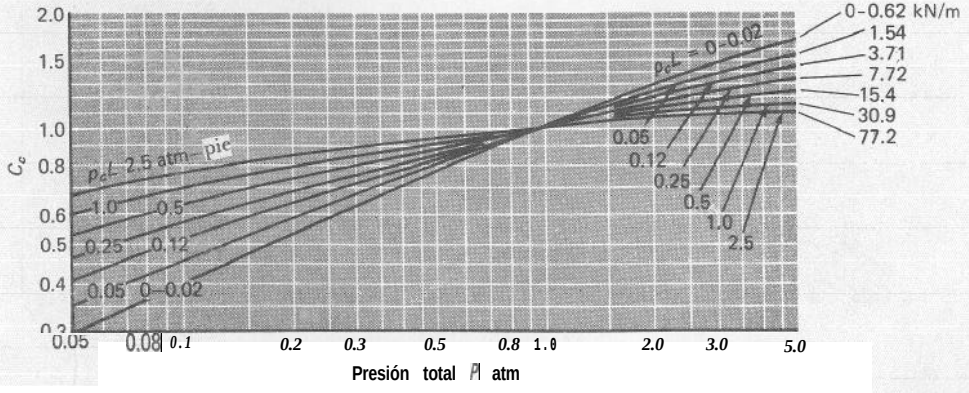
$$\Delta\alpha = \Delta\epsilon \quad \text{en } T_w \tag{8-57}$$

Los valores de ϵ'_c y ϵ'_w se evalúan a partir de las Figs. 8-34 y 8-35 por medio de una abscisa de T_w pero con parámetros de longitud, presión y haz de $p_c L_e (T_w/T_g)$ y $p_w L_e (T_w/T_g)$ respectivamente.

Tabla 8-2 Longitud media L_e equivalente para la radiación desde volúmenes de gas enteros, de acuerdo con las Refs. 22 y 25

Volumen de gas	*Dimensión característica*	L_e
Volumen entre dos planos infinitos	Distancia de separación L	$1.8L$
Cilindro circular con altura = al diámetro, radiación hacia el centro de la base	Diámetro D	0.710
Hemisferio, radiación hacia el elemento en el centro de la base	Radio R	R
Esfera, radiación hacia la superficie completa	Diámetro D	0.650
Cilindro circular infinito, radiación hacia la superficie convexa que lo encierra	Diámetro D	0.950
Cilindro circular con altura = diámetro, radiación hacia la superficie completa	Diámetro D	$0.60D$
Cilindro circular, altura semiinfinita, radiación a la base completa	Diámetro D	0.650
Cubo, radiación hacia cualquier cara	Borde L	$0.60L$
Volumen que rodea a un manojo de tubos infinito, radiación a un solo tubo	Diámetro D del tubo, distancia entre los centros S de los tubos	
Arreglo de triángulos equiláteros		
$S = 2D$		$3.0(S - D)$
$S = 3D$		$3.8(S - D)$
Arreglo cuadrado		$3.5(S - D)$

Se escribió la Ec. 8-53 para el intercambio de calor entre un volumen de gas y un recinto negro a una temperatura uniforme. Consideremos ahora un caso más complicado, en el que el volumen de gas se encuentra encerrado entre dos planos negros paralelos a temperaturas diferentes T_1 y T_2. En este caso debemos realizar un balance de energía en cada placa. Para la placa 1 la *ganancia* neta de energía es



1. 8-36 Factor de corrección para emisividad de CO, de erdo con la Ref. 22.

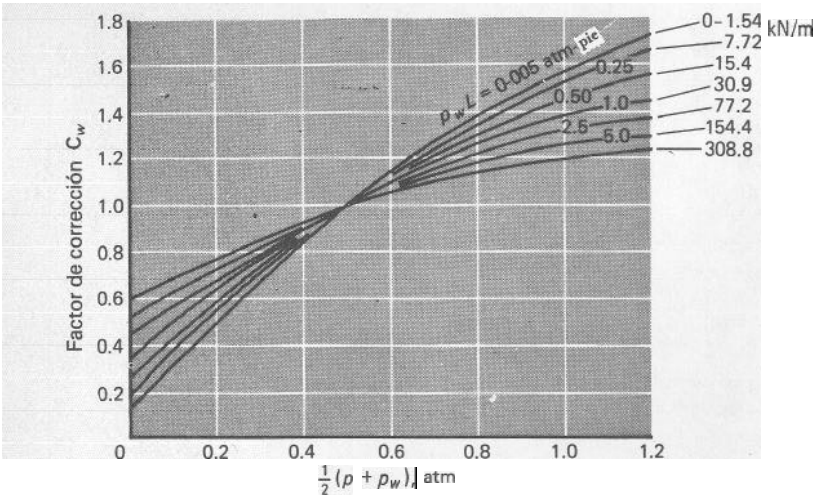


Fig. 8-37 Factor de corrección para emisividad de H_2O de acuerdo con la Ref. 22.

$$q_1 = G_1 A_1 - E_{b_1} A_1 \tag{8-58}$$

De manera similar, para la placa 2

$$q_2 = G_2 A_2 - E_{b_2} A_2 \tag{8-59}$$

Las irradiaciones G_1 y G_2 se deben evaluar en términos de la energía total que llega a cada superficie. Para la superficie 1

Irradiación en la superficie 1 = irradiación a partir del gas
+ irradiación de la superficie 2 transmitida a través del gas

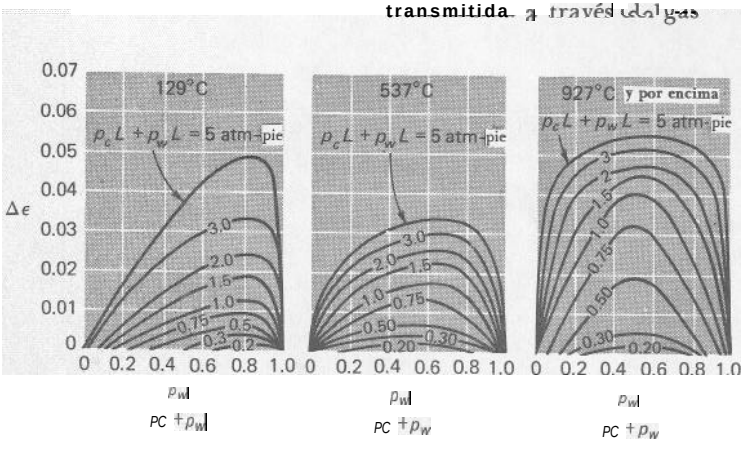


Fig. 8-38 Factor de corrección cuando están presentes CO_2 y H_2O en un recinto, de acuerdo con la Ref. 22: 1.0 atm·pie, = 30.881 kN/m

$$G_1 A_1 = A_g F_{g_1} \epsilon_g(T_g) E_{b_g} + A_2 F_{21} \tau_g(T_2) E_{b_2} \tag{8-60}$$

La transmisividad para la radiación desde T_2 se obtiene a partir de

$$\tau_g(T_2) = 1 - \alpha_g(T_2)$$

en donde α_g se evalúa como antes.

De manera similar, la irradiación sobre la superficie 2 será

$$G_2 A_2 = A_g F_{g_2} \epsilon_g(T_g) E_{b_g} + A_1 F_{12} \tau_g(T_1) E_{b_1} \tag{8-61}$$

Si para el sistema de placas paralelas tomamos las áreas como $A_g = A_1 = A_2$; entonces $F_{g1} = F_{g2} = 1.0$. También $F_{12} = F_{21} = 1.0$. Una vez determinadas G_1 y G_2, se puede calcular la transferencia de calor a cada superficie a partir de las Ecs. 8-58 y 8-59.

Intèrcambio de calor entre un volumen de gas y un recinto gris

Hasta este punto, los métodos de cálculo para radiación en gases que se estudiaron se ocupaba sólo de las superficies negras que intercambian calor con el gas. En muchas aplicaciones de ingeniería las paredes del recinto están sucias y manchadas, la emisividad de la pared es muy alta y el cálculo de transferencia de calor por medio de la Ec. 8-53 puede ser una aproximación razonable. Un análisis de superficies grises es muy complejo debido a que el fenómeno de reflexión múltiple debe tomar en cuenta la característica de absorción en bandas del gas. Para los cálculos ingenieriles Hottel [22] ha mostrado que la transferencia de calor neta hacia una superficie gris que tiene una emisividad ϵ_w puede manejarse de una manera aproximada multiplicando la Ec. 8-53 por un factor tal que

$$\frac{q_{gris}}{q_{negro}} \simeq \frac{\epsilon_w + 1}{2} \quad \text{para } \epsilon_w > 0.8 \tag{8-62}$$

Para valores de ϵ_w C 0.8 se deberán emplear procedimientos más elaborados para el cálculo de la transferencia de calor.

Ejemplo 8-9: Radiación de gas en un horno

Un horno cúbico de 0.5 m por lado tiene paredes interiores esencialmente negras. El gas dentro del horno es de 20% bióxido de carbono, 80% nitrógeno y se encuentra a 1 atm de presión total a 1500 K de temperatura. Las paredes del horno se mantienen a 300 °C. Calcule el enfriamiento que se requiere para mantener las paredes a la temperatura especificada.

Solución

Para este cálculo usamos la Ec. 8-53

$$\frac{q}{A} = \epsilon_g(T_g)\sigma T_g^4 - \alpha_g(T_w)\sigma T_w^4 \tag{a}$$

en donde $\sigma T_g^4 = (5.669 \times 10^{-8})(1500)^4 = 287 \text{ kW/m}^2$ [90 980 Btu/h·pie²]

$\sigma T_w^4 = (5.669 \times 10^{-8})(573)^4 = 6.11 \text{ kW/m}^2$ [1937 Btu/h·pie²]

Según la Tabla 8-2 la longitud equivalente del haz es

$$L_e = (0.6X0.5) = 0.3 \text{ m LO.984 pie}^2]$$

y la presión parcial del CO_2 es 0.2 atm, o

$$p_c = (0.2X1.0132 \times 10^5) = 20.26 \text{ kN/m}^2 \text{ [2.94 lb/plg}^2 \text{ abs]}$$

Entonces $p_c L_e = 6.08$ kN/m, y entramos en la Fig. 8-34 en 1500 K para obtener

$$\epsilon_c = 0.072 = \epsilon_g(T_g)$$

No hay factor de corrección ya que la presión total es 1 atm. Para evaluar $\alpha_g(T_w)$ "salnos una temperatura de 573 K y un parámetro de presión, longitud y haz de

$$p_c L_e \frac{T_w}{T_g} = 6.08 \frac{573}{1500} = 2.32 \text{ kN/m}$$

De la Fig. S-34, $\epsilon_c' = 0.065$, $C_c = 1.0$, y usamos la Ec. 8-55 para obtener

$$\alpha_g(T_w) = \alpha_c = (0.065)\left(\frac{1500}{573}\right)^{0.65} = 0.121$$

Ahora, usando la Ec. (a), tenemos

$$\frac{q}{A} = (0.072)(287) - (0.121)(6.11) = 19.92 \text{ kW/m}^2$$

Hay seis lados interiores: por tanto la transferencia total de calor es

$$q = (19.92X1.5) = 29.88 \text{ kW} \quad [102\,000 \text{ Btu/h}]$$

Ejemplo 8-10

Dos placas negras paralelas se encuentran separadas a 0.7 m de distancia y se les mantiene a una temperatura de 200 y 500 °C, respectivamente. Entre las placas hay una mezcla de gas compuesto por 20% de CO_2, 15% vapor de agua, 65% de N_2 y se encuentra a una presión de 3 atm. La temperatura del gas es 1000 °C. Calcule el intercambio de calor con cada una de las placas.

Solución

Para este problema debemos utilizar las Ecs. 8-58 y 8-59 lo cual requiere la evaluación de cierto número de propiedades. Estableciendo

$$T_{,,} = 1000 \text{ °C} = 1273 \text{ K} \quad T_1 = 200 \text{ °C} = 473 \text{ K} \quad T_2 = 500 \text{ °C} = 773 \text{ K}$$

tenemos

$$\sigma T_g^4 = E_{b_g} = 148.9 \text{ kW/m}^2$$

$$\sigma T_1^4 = E_{,,,} = 2.84 \text{ kW/m}^2$$

$$\sigma T_2^4 = E_{b_2} = 20.24 \text{ kW/m}^2$$

Utilizando la Tabla 8-2 calculamos la longitud media del haz como

$$L_e = (1.8)(0.7) = 1.26 \text{ m}$$

Para la mezcla a 3 atm, las presiones parciales de CO, y H_2O son

$$p_c = (0.20)(3)(1.0132 \times 10^5) = 60.8 \text{ kN/m}^2 \quad [8.82 \text{ lb/plg}^2 \text{ absl}$$

$$p_w = (0.15)(3)(1.0132 \times 10^5) = 45.6 \text{ kN/m}^2 \quad 16.61 \text{ lb/plg}^2 \text{ absl}$$

Entonces

$$p_c L_e = (60.8)(1.26) = 76.6 \text{ kN/m} = 2.48 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

$$p_w L_e = (45.6)(1.26) = 57.5 \text{ kN/m} = 1.87 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

$$p_c L_e + p_w L_e = 134.1 \text{ kN/m} = 4.35 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

También, $(\frac{1}{2})(p + p_w) = (0.5)(3 + 0.45) = 1.725$ atm., y

$$\frac{p_w}{p_c + p_w} = \frac{0.45}{0.6 + 0.45} = 0.429$$

Consultando diversas tablas de cálculo, obtenemos

$$\epsilon_w = 0.22 \qquad C_w \approx 1.4$$

$$\bullet \quad C = 0.17 \qquad C_c = 1.1 \qquad \Delta\epsilon = 0.055$$

de manera que. de la Ec. 8-52

$$\epsilon_g(T_g) = (1.1)(0.17) + (1.4)(0.22) - 0.055 = 0.44$$

Ahora debemos determinar los valores de α_g en T_1 y T_2. En $T = T_1 = 473$ K

$$p_c L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 76.6 \frac{473}{1273} = 28.5 \text{ kN/m}$$

$$p_w L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 57.5 \frac{473}{1273} = 21.4 \text{ kN/m} = 0.69 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

A partir **de las tablas de cálculo**

$$\epsilon'_w = 0.26 \qquad C_w \approx 1.5$$

$$\epsilon'_c = 0.13 \qquad \text{c!,} = 1.15 \qquad \cdot \Delta\epsilon = \Delta\alpha = 0.02$$

Ahora, de las Ecs. 8-55 y 8-56

$$\alpha_c = (1.15)(0.13)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0.65} = 0.285$$

$$\alpha_w = (1.5)(0.26)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0.45} = 0.608$$

Y

$$\alpha_g(T_1) = \alpha_c + \alpha_w - \text{ha} = 0.285 + 0.608 - 0.02 = 0.874$$

$$\tau_g(T_1) = 1 - \alpha_g(T_1) = 0.126$$

En $T = T_2 = 773$ K,

$$p_c L_e \frac{T_2}{T_g} = 76.6 \frac{773}{1273} = 46.5 \text{ kN/m} = 1.51 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

$$p_w L_e \frac{T_2}{T_g} = 57.5 \frac{773}{1273} = 34.9 \text{ kN/m} = 1.13 \text{ atm} \cdot \text{pie}$$

De las tablas **de cálculo tenemos**

$$\epsilon'_w = 0.24 \qquad C_w = 1.45$$

$$\epsilon'_c = 0.17 \qquad C_c = 1.13 \qquad \Delta\epsilon = \Delta\alpha = 0.028$$

$$\alpha_c = (1.13)(0.17)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0.65} = 0.266$$

$$\alpha_w = (1.45)(0.24)\left(\frac{1273}{473}\right)^{0.45} = 0.436$$

Entonces

$$\alpha_g(T_2) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha = 0.266 + 0.436 - 0.028 = 0.674$$

Y

$$\tau_g(T_2) = 1 - \alpha_g(T_2) = 0.326$$

Para el sistema de placas paralelas todas las áreas son iguales y todos los factores de forma son unidad, de manera que la Ec. 8-60 se convierte en

$$G_1 = \epsilon_g(T_g)E_{b_g} + \tau_g(T_2)E_{b_2}$$
$$= (0.44)(148.9) + (0.326)(20.24) = 72.1 \text{ kW/m}^2 \quad [22{,}860 \text{ Btu/h pie}^2]$$

De manera similar

$$G_2 = \epsilon_g E_{b_g} + \tau_g(T_1)E_{b_1}$$
$$= (0.44)(148.9) + (0.126)(2.84) = 65.9 \text{ kW/m}^2$$

Las dos superficies son negras; por consiguiente, la *ganancia* **de calor en cada superficie es:**

$$\frac{q_1}{A} = G_1 - E_{b_1} = 72.1 - 2.84 = 69.3 \text{ kW/m}^2$$

$$\frac{q_2}{A} = G_2 - E_{b_2} = 65.9 - 20.24 = 45.7 \text{ kW/m}^2$$

La pérdida neta de energía sufrida por el gas es la suma de estas dos cifras, o 115 kW/m² de área de placa.

8-10 Red de radiación para un medio absorbente y transmisor

Los estudios anteriores han demostrado los métodos que se pueden usar para calcular la transferencia de calor por radiación entre superficies separadas por un medio perfectamente transparente. En estos tipos de problemas se utiliza con gran provecho el método de red de radiación.

Muchos problemas prácticos involucran transferencia de calor por radiación a través de un medio a la vez absorbente y transmisor. Un ejemplo de este tipo de medio son las diversas sustancias de vidrio; otros son los gases. Ya hemos observado algunas de las complicaciones que surgen en la radiación en gases. Ahora examinaremos un método de red de radiación para el análisis de sistemas absorbentes y transmisores, teniendo en cuenta los muchos problemas en los que se verán involucrados con gases.

Para comenzar, consideremos un caso sencillo, el de dos superficies no transmisoras que se miran exclusivamente entre ellas. Además, supongamos que el espacio entre estas superficies está ocupado por un medio absorbente y transmisor. Un problema práctico sería el de dos grandes planos separados ya sea por un gas absorbente o bien

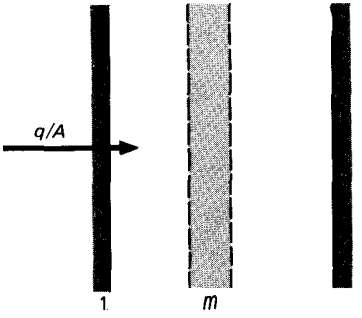


Fig. 8-39 Sistema de radiación consistente en un medio transmisor ente dos planos.

por una lámina de vidrio o plástico transparente. La situación se muestra en forma esquemática en la Fig. 8-39. El medio transparente se designa con el subíndice m. Suponemos que el medio no es reflejante y que se aplica la identidad de Kirchoñ, de manera que

$$\alpha_m + T_{,,,} = 1 = E_{,,,} + \tau_m \tag{8-63}$$

La suposición sobre el medio no reflejante es válida cuando se consideran gases. Para las placas de vidrio o plástico esto no será necesariamente cierto y es común una reflectividad del orden de 0.1 para muchas sustancias de vidrio. Además, las propiedades transmisoras de los vidrios casi siempre se encuentran limitadas a una estrecha gama de longitudes de onda entre 0.2 y 4 μm. Por tanto, el análisis que se da a continuación está altamente idealizado y sirve más que todo, para proporcionar un punto de partida para la solución de problemas en los que se deberán considerar transmisión de radiación. Más adelante se mencionarán otras complicaciones con gases. Cuando se tienen que tomar en cuenta tanto la transmisión como la reflexión, se deberán emplear las técnicas de análisis examinadas en la Sec. 8-12.

Volviendo al análisis, observamos que el medio puede emitir y transmitir radiaciones de una superficie a otra. Nuestro trabajo será determinar los elementos de red que se usan para describir estos dos tipos de procesos de intercambio. La energía transmitida se puede analizar de la siguiente manera. La energía que sale de la superficie 1, que es transmitida a través de un medio y que llega a la superficie 2 es

$$J_1 A_1 F_{12} \tau_m$$

y aquella que sale de la superficie 2 y que llega a la superficie 1 es

$$J_2 A_2 F_{21} \tau_m$$

El intercambio neto en el proceso de transmisión es en consecuencia

$$q_{1-2_{\text{transmitido}}} = A_1 F_{12} \tau_m (J_1 - J_2) = A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

$$q_{1-2_{\text{transmitido}}} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}(1 - \epsilon_m)} \tag{8-64}$$

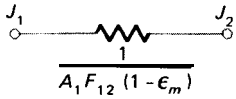


Fig. 8-40 Elemento de red para radiación transmitida a través del medio.

y en la Fig. 8-40 se muestra el elemento de red que puede usarse para describir este proceso.

Considérese ahora el proceso de intercambio entre la superficie 1 y el medio transmisor. Como hemos supuesto que el medio no es reflejante, la energía que sale del medio (diferente a la energía transmitida, que ya hemos considerado) es precisamente la energía que emite el medio

$$J_m = \bullet \quad ,E_{,,rr,}$$

Y de la energía que sale del medio, la cantidad que alcanza la superficie 1 es

$$A_m F_{m1} J_m = A_m F_{m1} \epsilon_m E_{bm}$$

De esa energía que sale de la superficie 1, la cantidad que alcanza el medio transparepte es

$$J_1 A_1 F_{1m} \alpha_m = J_1 A_1 F_{1m} \epsilon_m$$

En este punto observamos que la absorción en el medio quiere decir que la radiación incidente ha "alcanzado" el medio. De acuerdo con las relaciones anteriores, el intercambio neto de energía entre el medio y la superficie 1 es la diferencia entre la cantidad emitida por el medio hacia la superficie 1 y la absorbida que surgió de la superficie 1. Así

$$q_{m-1_{\text{net}}} = A_m F_{m1} \epsilon_m E_{bm} - J_1 A_1 F_{1m} \epsilon_m$$

Utilizando la relación de reciprocidad

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

tenemos

$$q_{m-1\,\text{neto}} = \frac{E_{bm} - J_1}{1/A_1 F_{1m} \epsilon_m} \tag{8-65}$$

Este proceso de intercambio de calor está representado por el elemento de red que se muestra en la Fig. 8-41. La red total para la situación física de la Fig. 8-39 se muestra en la Fig. 8-42.

Si se mantiene el medio de transporte a una temperatura fija, entonces se fijará el potencial E_{bm} de acuerdo con

$$E_{bm} = \sigma T_m^4$$

Fig. 8-41 Elemento de red para intercambio de radiación entre medio y superficie.

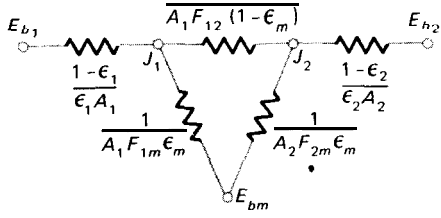


Fig. 8-42 Red de radiación total para el sistema de la Fig. 8-39.

Por otra parte, si no existe ninguna transmisión neta de energía hacia el medio, entonces E_{bm} se convierte en un modo flotante, y su potencial se determinará por medio de otros elementos de red.

En realidad, para este ejemplo, los factores de forma de radiación F_{1-2} F_{1-m} y F_{2-m} son unidad, de manera que la expresión para el flujo de calor se podría simplificar hasta cierto punto. Sin embargo, estos factores se incluyen en las resistencias a fin de que el análisis sea más general.

Cuando nos enfrentamos a un problema práctico de intercambio de calor entre superficies grises a través de un gas absorbente, la mayor dificultad será determinar la transmisividad y emisividad del gas. Estas propiedades son funciones no sólo de la temperatura del gas sino también del espesor de la capa de gas; es decir, las capas de gas delgadas transmiten más radiación que las gruesas. El problema práctico habitual casi siempre involucra más de dos superficies de transferencia de calor, tal como ocurre en el ejemplo sencillo anterior. En consecuencia, la transmisividad entre las diversas superficies transmisoras de calor pueden ser muy diferentes, según sea su orientación geométrica. Como la temperatura del gas varia, las propiedades de transmisividad y emisividad variarán de acuerdo con su localización en el gas. Una manera de tratar esta situación es dividir el cuerpo gaseosos en capas y plantear de acuerdo con esto una red de radiación permitiendo que los potenciales de los diferentes nodos "floten", y llegando así a la distribución de temperatura del gas. Aun con este procedimiento, se tendrá que usar eventualmente un método iterativo debido a que las propiedades de radiación del gas son funciones de los "potenciales flotantes" que no se conocen. Claro está, que si la temperatura del gas es uniforme, la solución será más fácil.

No presentaremos la solución a un problema complejo de radiación en gases ya que el tedioso esfuerzo que requiere su resolución está fuera de los límites de nuestro presente estudio; no obstante, es conveniente analizar un sistema transmisor de dos capas, a fin de mostrar el esquema de razonamiento general que se podría aplicar a problemas más complejos.

Considérese la situación física que se muestra en la Fig. 8-43. Las dos superficies radiantes y absorbentes se encuentran separadas por dos capas de un medio absorbente y transmisor. Estas dos capas podrían representar dos hojas de medio transparente, por ejemplo un vidrio, o podría representar por motivos de facilidad en el análisis, la

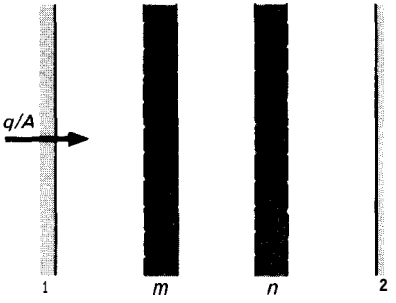


Fig. 8-43 Sistema de radiación que consiste en dos capas transmisoras entre dos planos.

división en dos de un gas separador. Designaremos con los subíndices m y n las dos capas transmisora y absorbente. El intercambio de energía entre la superficie 1 y m lo da

$$q_{1-m} = A_1 F_{1m} \epsilon_m J_1 - A_m F_{m1} \epsilon_m E_{bm} = \frac{J_1 - E_{bm}}{1/A_1 F_{1m} \epsilon_m} \tag{8-66}$$

y el que ocurre entre la superficie 2 y n es

$$q_{2-n} = A_2 F_{2n} \epsilon_n J_2 - A_n F_{n2} \epsilon_n E_{bn} = \frac{J_2 - E_{bn}}{1/A_2 F_{2n} \epsilon_n} \tag{8-67}$$

De la energía que parte de la superficie 1, la cantidad que llega a la superficie 2 es

$$q_{1-2} = A_1 F_{12} J_1 \tau_m \tau_n = A_1 F_{12} J_1 (1 \quad \epsilon_m)(1 \quad \epsilon_n)$$

y de la energía que parte de la superficie 2, la cantidad que llega a la superficie 1 es

$$q_{2-1} = A_2 F_{21} J_2 \tau_n \tau_m = A_2 F_{12} J_2 (1 - \bullet \quad)(1 - \epsilon_m)$$

de manera que el intercambio neto de energía por transmisión entre las superficies 1 y 2 es

$$q_{1-2\ \text{transmitida}} = A_1 F_{12} (1 - \epsilon_m)(1 - \epsilon_n)(J_1 - J_2) = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12} (1 - \epsilon_m)(1 - \epsilon_n)} \tag{8-68}$$

y el'elemento de red que representa esta transmisión se muestra en la Fig. 8-44. De la energía que deja la superficie 1, la cantidad que se absorbe en n es

$$q_{1-n} = A_1 F_{1n} J_1 \tau_m \epsilon_n = A_1 F_{1n} J_1 (1 - \epsilon_m) \epsilon_n$$

También,

$$q_{n-1} = A_n F_{n1} J_n \tau_m = A_n F_{n1} \epsilon_n E_{bn} (1 - \epsilon_m)$$

ya que

$$J_n = \epsilon_n E_{bn}$$

El intercambio neto entre la superficie 1 y ***n es*** por consiguiente

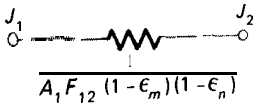


Fig. 8-44 Elemento de red para radiación transmitida entre planos.

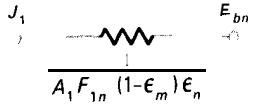


Fig. 8-45 Elemento de red para radiación transmitida del medio n al plano 1.

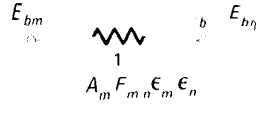


Fig. 8-46 Elemento de red para intercambio de radiación entre dos capas transparentes.

$$q_{1-n_{\text{neto}}} = A_1F_{1n}(1-\epsilon_m)\epsilon_n(J_1 - E_{bn}) = \frac{J_1 - E_{bn}}{1/A_1F_{1n}(1-\epsilon_m)\epsilon_n} \tag{8-69}$$

y el elemento de red que representa estasituación se muestra en la Fig. 8-45. De manera similar, el intercambio neto entre las superficies 2 y n es

$$q_{2-m_{\text{neto}}} = \frac{J_2 - E_{bm}}{1/A_2F_{2m}(1-\epsilon_n)\epsilon_m} \tag{8-70}$$

De la radiación que sale de m, la cantidad absorbida en n es

$$q_{m-n} = J_mA_mF_{mn}\alpha_n = A_mF_{mn}\epsilon_nE_{bm}$$

Y

$$q_{n-m} = A_nF_{nm}\epsilon_mE_{bn}$$

de manera que el intercambio de energía entre m y n es

$$q_{m-n_{\text{neto}}} = A_mF_{mn}\epsilon_m\epsilon_n(E_{bm} - E_{bn}) = \frac{E_{bm} - E_{bn}}{1/A_mF_{mn}\epsilon_m\epsilon_n} \tag{8-71}$$

y el elemento de red que representa esta transferencia de energía se da en la Fig. 8-46.

La red definitiva para el proceso total de transferencia de calor se muestra en la Fig. 8-47; se le añadieron las resistencias de superficie. Si las dos capas transmisoras m y n se mantienen a una temperatura dada, la solución a la red se puede obtener con relativa facilidad ya que para establecer las diversas cantidades de flujo de calor sólo se tendrán que determinar los dos potenciales desconocidos J_1 y J_2. En este caso las dos capas transmisoras absorberán o perderán cierta cantidad de energía, dependiendo de la temperatura a la que se les mantiene.

Cuando no se proporciona energía neta a las capas transmisoras, los nodos E_{bm} y E_{bn} se deberán dejar "flotantes" en el análisis, y en este sistema específico se requerirán cuatro ecuaciones nodales para la resolución del problema.

Ejemplo 8-11: Red para radiación de gas

Dos planos paralelos grandes se encuentran a T_1 = 800 K, ϵ_1 = 0.3, T_2 = 400 K, ϵ_2 = 0.7 yestánseparados solamente por un gas gris que tiene ϵ_g = 0.2, τ_g = 0.8. Calcule la velocidad de transferencia de calor entre

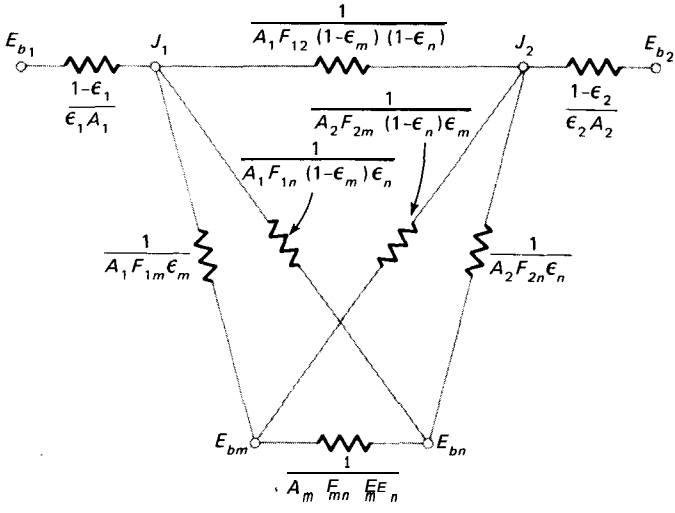


Fig. 8-47 Red total de radiación para el sistema de la Fig. 8-43.

los dos planos y la temperatura del gas utilizando una red de radiación. Compare con la transferencia de calor sin la presencia del gas.

Solución

La red que se muestra en la Fig. 8-42 sirve para este problema. Todos los factores de forma son unidad para los planos grandes y las diferentes resistencias se pueden calcular en una base de área unitaria como

$$\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} = \frac{0.7}{0.3} = 2.333 \qquad \frac{1}{F_{12}(1+\epsilon_g)} = \frac{1}{1-0.2} = 1.25$$

$$\frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} = \frac{0.3}{0.7} = 0.4286 \qquad \frac{1}{F_{1g}\epsilon_g} = \frac{1}{F_{2g}\epsilon_g} = \frac{1}{0.2} = 5.0$$

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 23{,}220 \text{ W/m}^2 \qquad E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 1451 \text{ W/m}^2$$

La resistencia equivalente del centro del "triángulo" es

$$R = \frac{1}{111.25 + 1/(5.0 + 5.0)} = 1.1111$$

La transferencia total de calor es entonces

$$\frac{q}{A} = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{\Sigma R} = \frac{23\,200 - 1451}{2.333 + 1.111 + 0.4286} = 5616 \text{ W/m}^2$$

Si no estuviera presente gas alguno, la transferencia de calor se expresaría por la Ec. 8-42:

$$\frac{q}{A} = \frac{23\,200 - 1451}{110.3 + 1/0.7 + 1} = 5781 \text{ W/m}^2$$

Las radiosidades se pueden calcular a partir de

$$\frac{q}{A} = (E_{b_1} - J_1)\left(\frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1}\right) = (J_2 - E_{b_2})\left(\frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}\right) = 5616 \text{ W/m}^2$$

lo que da $J_1 = 10\,096$ W/m^2 y $J_2 = 3858$ W/m^2. Para la red E_{bg} es sólo la media de estos valores

$$E_{bg} = \tfrac{1}{2}(10\,096 + 3858) = 6977 = \sigma T_g^4$$

de manera que la temperatura del gas es

$$T_g = 592.3 \text{ K}$$

8-11 Intercambio de radiación con superficies especulares

En todos los estudios precedentes se consideró el intercambio de radiación entre superficies difusas. De hecho, los factores de radiación definidos por la Ec. 8-21 sólo son apropiados para radiaciones difusas, debido a que se supuso que la radiación no tenla dirección preferencial en la derivación de esta relación. En esta sección ampliamos el análisis a fin de abarcar algunas formas geométricas sencillas que contienen superficies que pueden tener reflexión de tipo especular. Ninguna superficie real es completamente difusa o especular. Sin embargo, supondremos que todas las superficies que se considerarán ***emiten*** radiación en forma difusa, pero que pueden ***reflejar*** radiación en parte de una manera especular y parte de una manera difusa. Por consiguiente, tomamos la reflectividad como la suma de los componentes especular y difuso:

$$\rho = \rho_S + \rho_D \tag{8-72}$$

Seguimos suponiendo que la identidad de Kirchhoff es aplicable de manera que

$$\epsilon = \alpha = 1 - \rho \tag{8-73}$$

El calor neto perdido por una superficie es la diferencia entre la energía emitida y absorbida

$$q = A(\epsilon E_b - \alpha G) \tag{8-74}$$

Definimos la *radiosidad difusa* J_D como la energía difusa total que deja la superficie por área y tiempo unitarios, es decir

$$J_D = \epsilon E_b + \rho_D G \tag{8-75}$$

Resolviendo para la irradiación G a partir de la Ec. 8-75 e insertando en la Ec. 8-74 da

$$q = \frac{\epsilon A}{\rho_D}[E_b(\epsilon + \rho_D) - J_D]$$

o. escrito de forma diferente,

$$q = \frac{E_b - J_D/(1 - \rho_s)}{\rho_D/[\epsilon A(1 - \rho_s)]} \tag{8-76}$$

en donde $1 - \varrho_s$ se ha sustituido por e + ϱ_D. Es fácil ver que la Ec. 8-76 se puede representar con el elemento de red que se muestra en la Fig. 8-48. Una rápida inspección nos muestra que para el caso de una superficie que refleja sólo en forma difusa, es decir, para $\varrho_s = 0$, este elemento se reduce al que se ve en la Fig. 8-24.

Calculemos ahora el intercambio de radiación entre dos superficies especulares y difusas. Por el momento, suponemos que las superficies están orientadas como se ven en la Fig. 8-49. En este arreglo cualquier radiación difusa que deje la superficie 1 que sea reflejado por la 2 en forma especular, no será reflejado directamente a la superficie 1. Este es un punto importante porque al eliminar estas reflexiones consideramos solamente el intercambio difuso ***directo*** entre las dos superficies. En los párrafos subsecuentes mostraremos cómo se deberán analizar las reflexiones especulares. Para las superficies en la Fig. 8-49 los intercambios ***difusos*** se expresan por

$$4_{1\text{-}Z} = J_{1D}A_1F_{12}(1 \quad \rho_{2s}) \tag{8-77}$$

$$q_{2\rightarrow 1} = J_{2D}A_2F_{21}(1 - \rho_{1s}) \tag{8-78}$$

La Ec. 8-77 expresa la radiación difusa que parte de 1 y que llega a 2, y que puede contribuir en una radiosidad difusa de la superficie 2. El factor $1 - \varrho_s$ representa la fracción reflejada en forma difusa. La inclusión de este factor es de mucha importancia ya que estamos considerando sólo el intercambio difuso directo, y por tanto, por el momento hacemos a un lado la contribución por reflexión especular. El intercambio neto se expresa por la diferencia entre las Ecs. 8-77 y 8-78 de acuerdo con la Ref. 21.

$$q_{12} = \frac{J_{1D}/(1 - \rho_{1s}) - J_{2D}/(1 \quad \rho_{2s})}{1/[A_1F_{12}(1 \quad \rho_{1s})(1 - \rho_{2s})]} \tag{8-79}$$

El elemento de red que representa a la Ec. 8-79 se muestra en la Fig. 8-50.

Para analizar la reflexión especular utilizamos la técnica que se presenta en las Refs. 12 y 13. Considérese el recinto de cuatro superficies largas que se ve en la **Fig.**

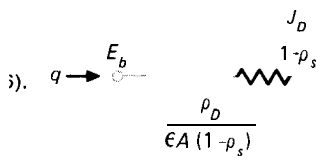


Fig. 8-48 Elemento de red que representa la Ec. 8-76.

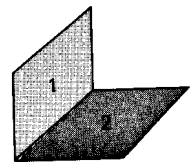


Figura 8-49

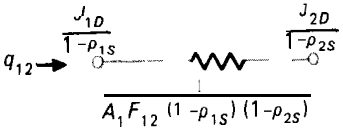


Fig. **8-50** **Elemento de red que representa la Ec. 8-79.**

8-51. Las superficies 1, 2 y 4 reflejan en forma difusa, mientras que en la superficie 3 tiene componentes tanto difusa como especular de reflexión. Las líneas de trazos representan imágenes espejo de las superficies 1, 2 y 4 sobre la superficie 3. (Una reflexión especular produce una imagen espejo.) La nomenclatura Z(3) indica la imagen espejo de la superficie 2 en el espejo 3.

Considérese ahora la radiación que sale de 2 y llega a 1. Hay una radiación difusa directa de

$$(q_{2\to 1})^{\text{difusa}}_{\text{directa}} = J_2 A_2 F_{21} \tag{8-80}$$

Parte de la radiación difusa de 2 se refleja especularmente en 3 y llega a 1. Esta radiación reflejada en forma especular actúa como energía *difusa* que proviene de la superficie imagen 2(3). Así podemos escribir

$$(q_{2\to 1})^{\text{reflejado}}_{\text{especular}} = J_2 A_{2(3)} F_{2(3)1} \rho_{3s} \tag{8-81}$$

El factor de forma de radiación $F_{2(3)1}$ es el factor entre la superficie 2(3) y la superficie 1. La reflectividad ρ_{3s} se inserta porque sólo esta fracción de la radiación llega a 1. Desde luego, $A_2 = A_{2(3)}$. Ahora tenemos

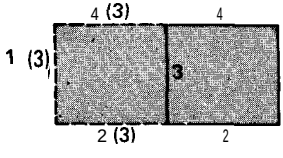
$$q_{2\to 1} = J_2 A_2 (F_{21} + \rho_{3s} F_{2(3)1}) \tag{8-82}$$

Un razonamiento semejante nos conduce a

$$q_{1\to 2} = J_1 A_1 (F_{12} + \rho_{3s} F_{1(3)2}) \tag{8-83}$$

Combinando las Ecs. 8-82 y 8-83 y utilizando la relación de reciprocidad $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$ obtenemos

$$q_{12} = \frac{J_1 - J_2}{1/[A_1 (F_{12} + \rho_{3s} F_{1(3)2})]} \tag{8-84}$$



1, 2, 4 Reflector difuso
3 Reflector especular difuso

Fig. 8-51 **Sistema con una superficie especular difusa.**

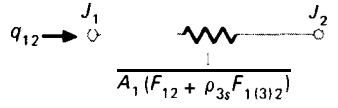


Fig. 8-52 Elemento de red para la Ec. 8-84.

El elemento de red representado por la Ec. 8-84 se muestra en la Fig. 8-52.

Se podrán desarrollar elementos de red análogos para la radiación entre otras superficies de la Fig. 8-51, de manera que el elemento de red completo se convierta en el que se muestra en la Fig. 8-53. Se deberá observar que los elementos que llegan a J_{3D} son simples modificaciones del que se muestra en la Fig. 8-50 ya que $Q_{1s} = Q_{2s} = Q_{4s} = 0$.

Para el caso en que $Q_{3D} = 0$ podemos hacer una observación interesante de esta red. En este caso la superficie 3 es completamente especular y

$$J_{3D} = \epsilon_3 E_{b3}$$

de manera que quedamos con sólo tres incógnitas, J_1, J_2 y J_4, cuando la superficie 3 es totalmente reflejante especular.

Compliquemos un poco más el problema permitiendo que el recinto tenga dos superficies especulares difusas, como se muestra en la Fig. 8-54. En este caso como se ve, se pueden formar imágenes múltiples. La superficie $1(3, 2)$ representa la imagen de 1 después de verse a través de 3 y luego de 2. En otras palabras, es la imagen de la superficie l(3) en el espejo 2. En el mismo lugar está la superficie $1(2, 3)$, la cual es la imagen de la superficie l(2) en el espejo 3.

Este problema es complicado debido a que deben considerarse reflexiones especulares múltiples. Considérese el intercambio entre las superficies 1 y 4. La energía difusa que parte de 1 puede alcanzar a 4 de cinco maneras diferentes:

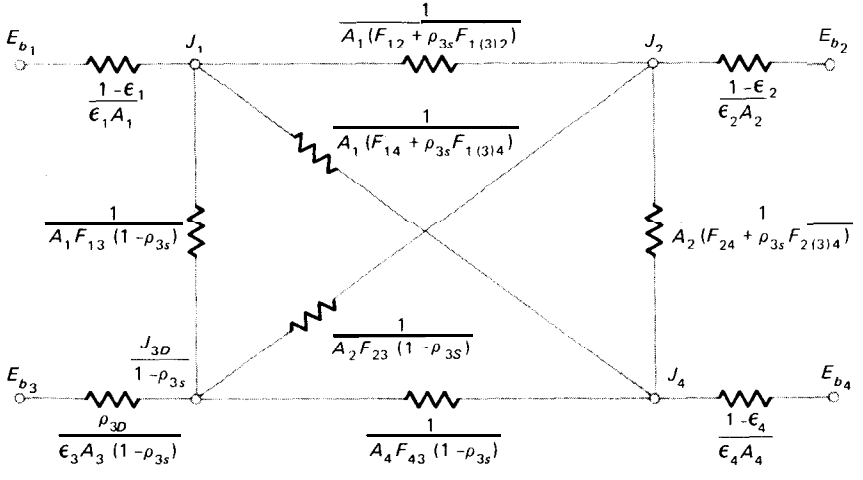


Fig. 8-53 Red de radiación completa para el sistema de la Fig. 8-51.

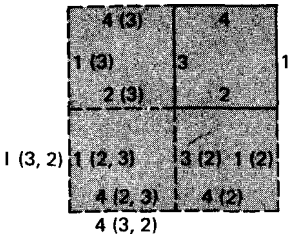


Fig. 8-54 Sistema con dos superficies especulares difusas.

directo: $J_1 A_1 F_{14}$

reflexión sólo en 2: $J_1 A_1 F_{1(2)4} \rho_{2s}$

rejlexión sólo en 3: $J_1 A_1 F_{1(3)4} \rho_{3s}$

reflexión en 2 primero y después en 3: (8-85)

$$J_1 A_1 \rho_{3s} \rho_{2s} F_{1(2,3)4}$$

rejlexión **en 3** *primero y luego en 2:*

$$J_1 A_1 \rho_{2s} \rho_{3s} F_{1(3,2)4}$$

El último factor de forma $F_{1(3,2)4}$ es cero porque la superficie 1(3, 2) no puede ver la superficie 4 cuando se mira a través del espejo 3. La suma de los términos anteriores se da como

$$q_{1\to4} = J_1 A_1 (F_{14} + \rho_{2s} F_{1(2)4} + \rho_{3s} F_{1(3)4} + \rho_{3s} \rho_{2s} F_{1(2,3)4}) \tag{8-86}$$

De manera semejante,

$$q_{4\to1} = J_4 A_4 (F_{41} + \rho_{2s} F_{4(2)1} + \rho_{3s} F_{4(3)1} + \rho_{3s} \rho_{2s} F_{4(3,2)1}) \tag{8-87}$$

Sustrayendo estas dos ecuaciones y aplicando la relación de reciprocidad habitual obtenemos el elemento de red que se muestra en la Fig. 8-55.

Considérese ahora el intercambio difuso entre las superficies 1 y 3. De la energía que sale de 1, la cantidad que contribuye a la radiosidad de la superficie 3 es

$$q_{1\to3} = J_1 A_1 F_{13} (1 - \rho_{3s}) + J_1 A_1 \rho_{2s} F_{1(2)3} (1 - \rho_s) \tag{8-88}$$

El primer término representa el intercambio directo, y el segundo término representa el intercambio después de una reflexión especular en el espejo 2. Como antes, se incluye el factor 1 $- \rho_{3s}$ a fin de no tener que considerar la reflexión especular a partir de

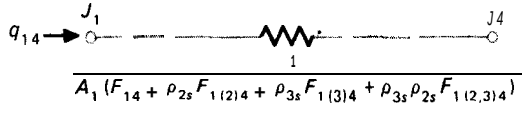


Fig. 8-55 Elemento de red que representa intercambio entre las superficies 1 y 4 de la Fig. 8-54.

3. Claro está que esta reflexión sí se toma en cuenta en otros términos. La energía *difusa* que va de 3 a 1 es

$$q_{3\to 1} = J_{3D}A_3F_{31} + J_{3D}A_3\rho_{2s}F_{3(2)1} \qquad (8\text{-}89)$$

El primer término es la radiación directa y el segundo término es la que se refleja en forma especular en el espejo. 2. Combinando las Ecs. 8-88 y 8-89 tenemos el elemento de red que se muestra en la Fig. 8-56.

Los dos elementos anteriores son típicos en el recinto que muestra la Fig. 8-54 y los demás elementos se pueden deducir por analogía. Por consiguiente, la red completa definitiva se muestra en la Fig. 8-57.

Si tanto la superficie 2 como la 3 son simples reflectores especulares, es decir,

$$\rho_{2D} = \quad \rho_{3D} = \quad 0$$

Tenemos

$$J_{2D} = \epsilon_2 E_{b2} \qquad J_{3D} = \epsilon_3 E_{b3}$$

y en tales circunstancias la red sólo contiene dos incógnitas, J_1 y J_4.

Podríamos complicar aún más los cálculos colocando las superficies especulares una frente a otra. En este caso habría un número infinito de imágenes y tendríamos que obtener una solución en serie; sin embargo, las series para tales problemas casi

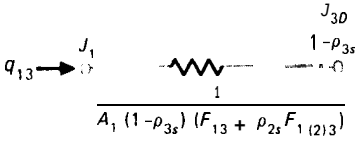


Fig. 8-55 Elemento de red que representa intercambio entre las superficies 1 y 3 de la Fig. 8.54.

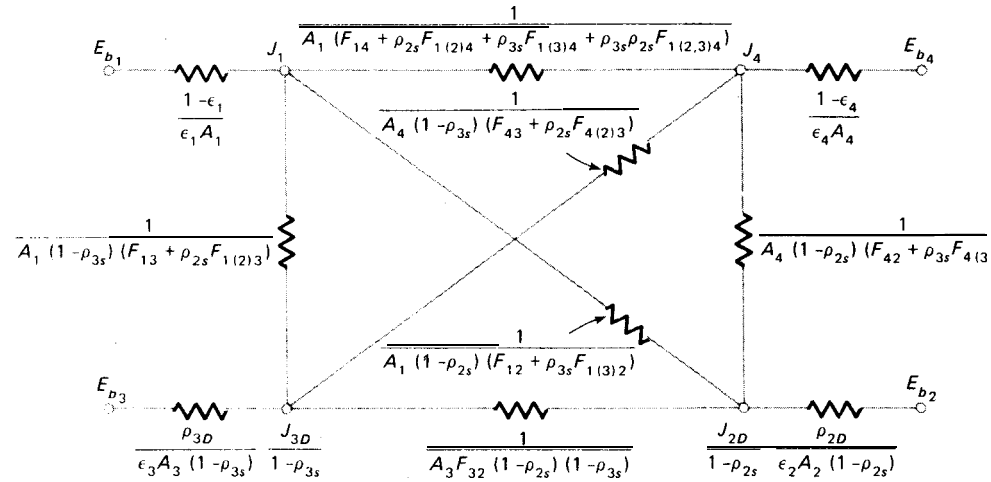


Fig. 8-57 Red completa de radiación para el sistema de la Fig. 8-54.

siempre convergen con gran rapidez: Para mayor iniformación sobre este aspecto de intercambio de radiación entre superficies especulares, el lector deberá consultar la Ref. 13.

8-12 Intercambio de radiación con medios transmisivo, reflejante y absorbente.

Ahora consideraremos una sencilla extensión de las representaciones de las Secs. 8-10 y 8-11 a fin de analizar un medio en el que los modos de reflexión, transmisión y absorción son todos importantes. Como en la Sec. 8-10, analizaremos un sistema de dos planos paralelos difusos con un medio entre ellos que puede absorber, transmitir y reflejar la radiación. Para generalizar, supondremos que la superficie del medio transmisor puede tener un componente de reflexión tanto especular como difuso. Este sistema se muestra en la Fig. 8-58.

Para el medio transmisor m tenemos

$$\alpha_m + \rho_{mD} + \rho_{ms} + \tau_m = 1 \tag{8-90}$$

también,

$$\epsilon_m = \alpha_m$$

La radiosidad difusa de una superficie específica del medio se define por

$$J_{mD} = \epsilon_m E_{bm} + \rho_{mD} G \tag{8-91}$$

en donde G es la irradiación sobre la superficie específica. Obsérvese que J_{mD} ya no representa la energía difusa total que sale de una superficie. Ahora sólo representa la emisión y reflexión difusas. La energía transmitida se analizará con términos adicionales. Como anteriormente, el intercambio de calor se escribe

$$q = A(\epsilon E_b - \alpha G) \tag{8-92}$$

Resolviendo para G a partir de la Ec. 8-91 y utilizando la Ec. 8-90 tenemos

$$q = \frac{E_{bm} - J_{mD}/(1 - \tau_m - \rho_{ms})}{\rho_{mD}/[\epsilon_m A_m (1 - \tau_m - \rho_{ms})]} \tag{8-93}$$

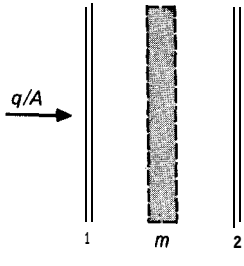


Fig. 8-58 Sistema físico para análisis de capas transmisoras y reflectoras.

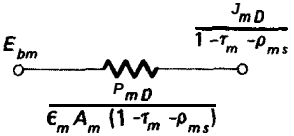


Fig. 8-59 Elemento de red que representa la Ec. 8-93.

El elemento de red que representa la Ec. 8-93 se muestra en la Fig. 8-59. Este elemento es muy similar al que se muestra en la Fig. 8-48, sólo que aquí tendremos que tomar en cuenta la transmisividad.

El intercambio de calor transmitido entre las superficies 1 y 2 es igual al de la Sec. 8-10; es decir

$$q = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12} \tau_m} \tag{8-94}$$

El intercambio de calor entre las superficies 1 y m **se calcula de la siguiente manera.** De la energía que parte de la superficie 1, la cantidad que llega a m y que contribuye a la radiosidad difusa de m es

$$q_{1\to m} = J_1 A_1 F_{1m}(1 - \tau_m \quad \rho_{ms}) \tag{8-95}$$

La energía difusa que sale de m y que llega a 1 es

$$q_{m\to 1} = J_{mD} A_m F_{m1} \tag{8-96}$$

Sustrayendo la Ec. 8-96 de la 8-95 y usando la relación de reciprocidad

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

da

$$q_{1m} = \frac{J_1 - J_{mD}/(1 - \tau_m \quad \rho_{ms})}{1/[A_1 F_{1m}(1 - \tau_m \quad \rho_{ms})]} \tag{8-97}$$

El elemento de red que corresponde a la Ec. 8-97 es bastante similar al que se muestra en la Fig. 8-50. Se puede escribir una ecuación similar a la Ec. 8-97 para el intercambio de radiación entre las superficies 2 y m. Finalmente, se puede trazar la red completa tal y como se muestra en la Fig. 8-60. Se deberá observar que J_{mD} representa la radiosidad difusa del lado izquierdo de m, mientras que J'_{mD} representa la radiosidad difusa del lado derecho de m.

Si se mantiene a m en una temperatura fija, entonces se deberán obtener J_1 y J_2 como una solución a las ecuaciones nodales para la red. Por otra parte, si no se envía energía neta a m, entonces E_{bm} es un nodo flotante y la red se reduce a un arreglo sencillo en serie y paralelo. En este último caso la temperatura de m se deberá obtener resolviendo la red para E_{bm}.

Podríamos continuar el análisis unos pasos más haciendo una distinción entre las transmisiones especular y difusa. Una transmisión especular es aquella en la que la radiación incidente pasa "directamente a través" del material, mientras que encontrare-

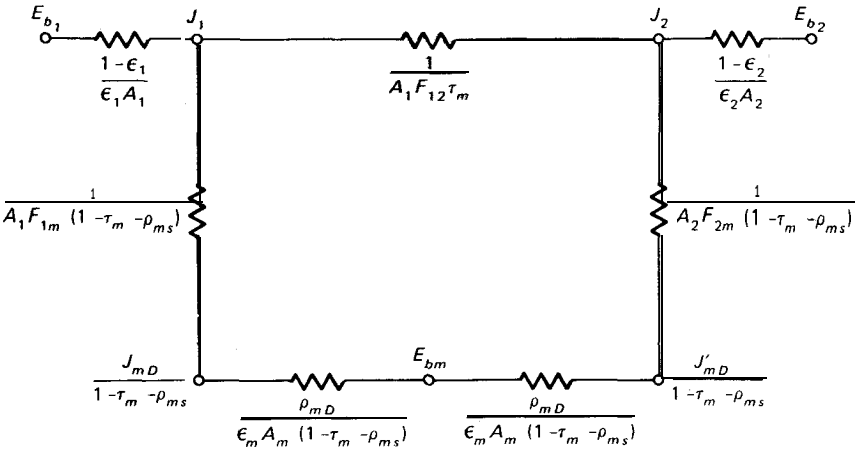


Fig. 8-60 Red completa de radiación para el sistema de la Fig. 8-58.

mos una transmisión difusa cuando la radiación incidente se dispersa al pasar a través del material, de manera que emerge del otro lado con una orientación espacial aleatoria. Al igual que con la energía reflejada, suponemos que la transmisividad se puede representar con un componente especular y uno difuso:

$$\tau = \tau_s + \tau_D \tag{8-98}$$

La radiosidad difusa se sigue definiendo como en la Ec. 8-91 y el intercambio neto de energía con una superficie transmisora se expresa por la Ec. 8-93. Sin embargo, el análisis del intercambio de energía transmitida con otras superficies debe manipularse de modo diferente. Por ejemplo, considérese el arreglo de la Fig. 8-61. Dos superficies opacas están separadas por un plano reflector y transmisor especular difuso. Para este ejemplo, se supone que todos los planos son de extensión infinita. El intercambio de transmisión especular entre las superficies 1 y 3 se puede calcular inmediatamente con

$$(q_{13})_{\text{transmitido especular}} = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{13} \tau_{2s}} \tag{8-99}$$

El intercambio transmitido en forma *difusa* entre 1 y 3 es un poco más complicado. La energía que sale de 1 y que es transmitida en forma difusa a través de 2 es

$$J_1 A_1 F_{12} \tau_{2D}$$

De esta cantidad transmitida a través de 2, la cantidad que llega a 3 es

$$(q_{13})_{\text{transmitido difuso}} = J_1 A_1 F_{12} \tau_{2D} F_{23} \tag{8-100}$$

De manera similar, la cantidad que deja 3 y que es transmitida en forma difusa a 1 es

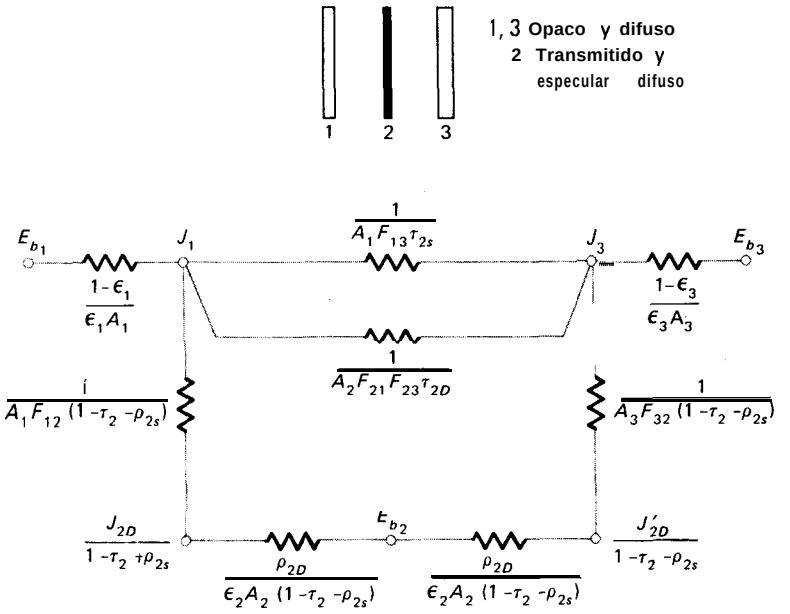


Fig. 8-81 Red de radiación para planos paralelos infinitos separados por un plano transmisor especular difuso.

$$(q_{31})_{\text{transmitido difuso}} = J_3 A_3 F_{32} \tau_{2D} F_{21} \tag{8-101}$$

Ahora, utilizando las relaciones de reciprocidad, $A_1F_{12} = A_2F_{21}$ y $A_3F_{32} = A_2F_{23}$, la sustracción de la Ec. 8-101 desde la Ec. 8-100 nos da

$$(q_{13})_{\text{transmitido difuso neto}} = \frac{J_1 - J_3}{1/A_2F_{21}F_{23}\tau_{2D}} \tag{8-102}$$

Haciendo uso de las Ecs. 8-99 y 8-102 obtenemos la red completa para el sistema tal como se muestra en la Fig. 8-61. Claro está, que todos los factores de forma de radiación de la red anterior son unidades, pero han sido incluidos a fin de presentar un panorama general. En esta red J_{2D} se refiere a la radiosidad difusa del lado izquierdo de 2, mientras que J'_{2D} es la radiosidad difusa del lado derecho de esta superficie.

Es fácil extender el método de red a fin de abarcar el caso de dos planos paralelos finitos separados por un plano transmisor dentro de un recinto amplio. Este arreglo se muestra en la Fig. 8-62. En esta red la notación F_{24R} significa el factor de forma de radiación para la radiación que parte del lado derecho de la superficie 2, y f_{24L} se refiere a la radiación que parte del lado izquierdo de la superficie 2. La notación $F'_{14(2)}$ es la fracción de energía que parte de 1 y que llega a recinto 4 después de una transmisión especular a través de 2. La notación $F'_{34(2)}$ corresponde al caso similar pero con respecto a la superficie 3. Los factores $F_{1(2)4}$ y $F_{3(2)4}$ designan los factores de forma de radiación entre las superficies imágenes l(2) y 3(2) y el recinto 4.

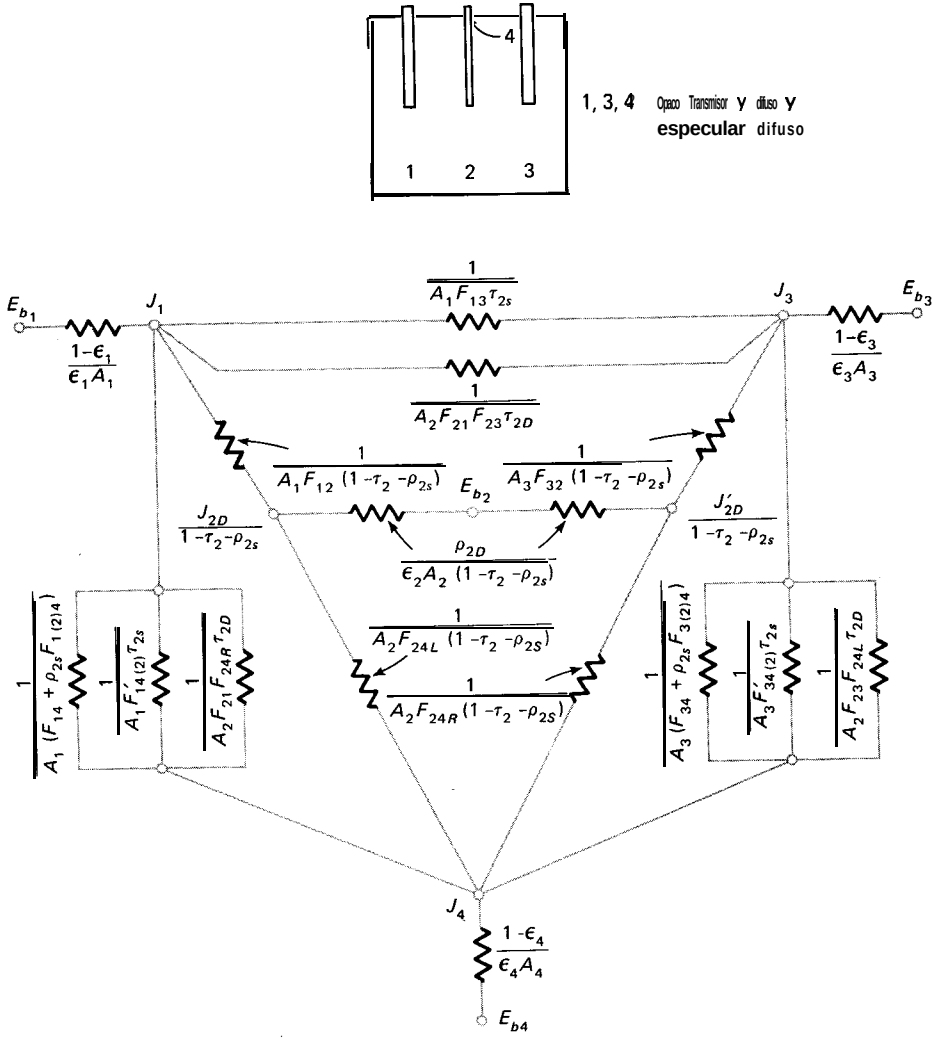


Fig. 8-62 Red de radiación para un sistema de planos finitos especular difusos en un recinto.

Las redes anteriores requieren información sobre las propiedades especular y difusa del material que deberán analizarse. Infortunadamente tal información es por el momento bastante escasa. En las Refs. 17 a 19 se proporcionan algunos datos.

Ejemplo 8-12: Sistema transmisor y reflector

Un horno a 1000 °C tiene en su lado izquierdo una pequeña abertura cubierta con una ventana de cuarzo con las siguientes propiedades:

$$0 < \lambda < 4\ \mu\text{m} \qquad \tau = 0.9 \qquad \epsilon = 0.1 \qquad \rho = 0$$
$$4 < \lambda < \infty \qquad \tau = 0 \qquad \epsilon = 0.8 \qquad \rho = 0.2$$

El interior del horno se puede considerar como cuerpo negro. Calcule la radiación perdida a través de la ventana de cuarzo hacia una habitación a 30 'C. Suponga un comportamiento de superficie difusa.

Solución

En el esquema se muestra el diagrama para este problema. Como la habitación es amplia también se le puede tratar como un cuerpo negro. Analizaremos el problema calculando la transferencia de calor para cada banda de longitud de onda y en seguida las sumaremos para obtener el total. Tal como se muestra a continuación para el horno negro y la habitación, la red para cada banda es una modificación de la Fig. 8-60. Realizaremos el cálculo por unidad de área; así

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1.0$$
$$F_{12} = 1.0 \qquad F_{13} = 1.0 \qquad F_{32} = 1.0$$

Las potencias totales de emisión son

$$E_{b_1} = (5.669 \times 10^{-8})(1273)^4 = 1.4887 \times 10^5\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3} = (5.669 \times 10^{-8})(303)^4 = 477.8\ \text{W/m}^2$$

Para determinar la fracción de radiación en cada banda de longitud de onda, calculamos

$$\lambda T_1 = (4)(1273) = 5092\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$$
$$\lambda T_3 = (4)(303) = 1212\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$$

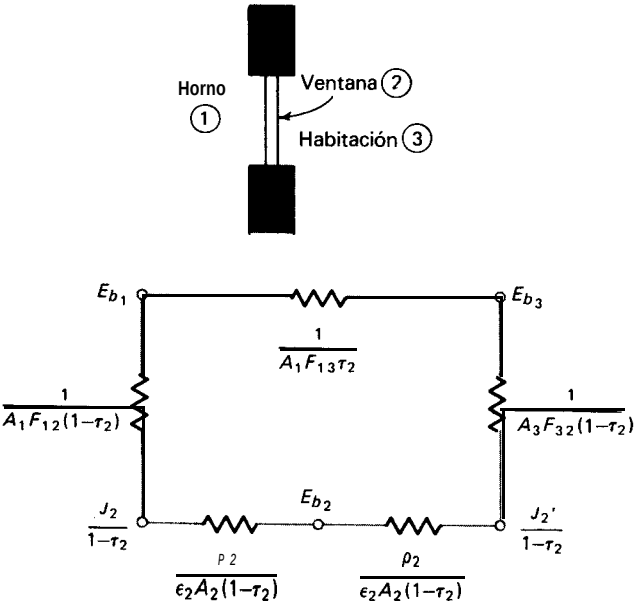


Figura Ejemplo 8-12

Al consultar la Tabla 8-1, encontramos

$$E_{b_1}(0 - 4\ \mu\text{m}) = 0.6450E_{b_1} = 96\ 021\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3}(0 - 4\ \mu\text{m}) = 0.00235E_{b_3} = 1.123\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_1}(4 - \infty) = (1 - 0.6450)E_{b_1} = 52\ 849\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3}(4 - \infty) = (1 - 0.00235)E_{b_3} = 476.7\ \text{W/m}^2$$

Ahora aplicamos estos números a la red para las dos bandas de longitud de onda. con áreas unitarias. *Banda* $0 < \lambda < 4\ \lambda\ \text{M}$

$$\frac{1}{F_{13}\tau_2} = \frac{1}{0.9} \qquad \frac{1}{F_{32}(1 - \tau_2)} = \frac{1}{0.1} = \frac{1}{F_{12}(1 - \tau_2)}$$
$$\frac{\rho_2}{\epsilon_2(1 - \tau_2)} = 0$$

Así, la transferencia de calar neta desde la red es

$$q = \frac{96\ 021 - \dfrac{1.123}{1.0526}}{R_{\text{equiv}}} = 91\ 219\ \text{W/m}^2 \qquad 0 < \lambda < 4\ \mu\text{m}$$

4 $\mu\text{m} < \lambda < +\infty$ *banda:*

$$\frac{1}{F_{13}\tau_2} = \infty \qquad F_{32}(1 - \tau_2) = F_{12}(1 - \tau_2) = 1.0$$
$$\epsilon_2(1 - \tau_2) = 0.25$$

La transferencia de calor neta desde la red es

$$q = \frac{E_{b_1} - E_{b_3}}{1 + 0.25 + 0.25 + 1} = \frac{52\ 849 - 476.7}{2.5} = 20\ 949\ \text{W/m}^2 \qquad 4 < \lambda < \infty$$

El calor total perdido es entonces

$$q_{\text{total}} = 91219 + 20\ 949 = 112\ 167\ \text{W/m}^2 \quad [35\ 560\ \text{Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

Sin la ventana, la transferencia de calor habrla sido la diferencia entre la potencia de emisión de cuerpos negros,

$$q = E_{b_1} - E_{b_3} = 1.4887 \times 10^5 - 477.8 = 1.4839 \times 10^5\ \text{W/m}^2 \quad [47\ 040\ \text{Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

8-13 Formulación para una solución numérica

El método de red que hemos utilizado para analizar los problemas de radiación es un artificio efectivo para la visualización del intercambio radiante entre superficies. Para problemas sencillos que no involucran demasiadas superficies, el método de red proporciona una solución fácil de obtener. Cuando se encuentran involucradas muchas superficies de transferencia de calor, es ventajoso formalizar el procedimiento para escribir las ecuaciones nodales. Para este procedimiento consideraremos solamente **su-**

perficies opacas, grises y difusas. El lector deberá consultar la Ref. -10 para obtener la información sobre las superficies transrnisoras y especulares. El balance de energía radiante sobre una superficie opaca se puede escribir

Calor neto perdido por la superficie = energía emitida − energía absorbida

o en base a áreas unitarias con las suposiciones usuales de cuerpo gris

$$\frac{q}{A} = \epsilon E_b - \alpha G$$

Considerando la i-ésima superficie, la irradiación total es la suma de todas las irradiaciones G_j de las otras j superficies. Así, para $\epsilon = \alpha$,

$$\frac{q_i}{A_i} = \epsilon_i \left(E_{b_i} \quad \sum_j G_j \right) \tag{8-103}$$

Pero las irradiaciones se pueden expresar por

$$A_j J_j F_{ji} = G_j A_i \tag{8-104}$$

Por reciprocidad, tenemos

$$A_j F_{ji} = A_i F_{ij}$$

de rnanera que podemos combinar las ecuaciones para obtener

$$\frac{q_i}{A_i} = \epsilon_i \left(E_{bi} - \sum_j F_{ij} J_j \right) \tag{8-105}$$

La transferencia de calor en cada superficie se evalúa entonces en términos de las radiosidades J_j. Estos parámetros se obtienen recordando que la transferencia de calor también se puede expresar como

$$\frac{q_i}{A_1} = J_i - G_i = J_i - \sum_j F_{ij} J_j \tag{8-106}$$

Combinando las Ecs. 8-105 y 8-106 obtenemos

$$J_i - (1 - \epsilon_i) \sum F_{ij} J_j = \epsilon_i E_{bi} \tag{8-107}$$

En las ecuaciones anteriores se debe observar que las **sumas** deben realizarse sobre *todas* las superficies del interior del recinto. Para un recinto de tres superficies con $i = 1$, la Suma será

$$\sum F_{ij} J_j = F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3$$

Claro está que si la superficie 1 es convexa, $F_{11} = 0$ y se efectuarán algunas simplificaciones.

Las ecuaciones nodales para las radiosidades también pueden derivarse a partir de los nodos en la formulación de la red. En cada nodo J_i un balance de energía da

$$\frac{\epsilon_i}{1-\epsilon_i}(E_{b_i} - J_i) + \sum_j F_{ij}(J_j - J_i) = 0 \tag{8-108}$$

De nuevo, para cada J_i se obtendrá una ecuación que es completamente equivalente a la Ec. 8-107. Una vez que se han obtenido todas las ecuaciones se podrán expresar en la forma matricial

$$[A][J] = [C] \tag{8-109}$$

en donde $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$ $[J] = \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \\ \\ J_i \end{vmatrix}$ $[C] = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_i \end{vmatrix}$

La solución para estas radiosidades se logra obteniendo el inverso de [A] de manera que

$$[J] = [A]^{-1}[C]$$

El inverso de $[A]^{-1}$ se escribe como

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ii} \end{bmatrix}$$

de manera que las radiosidades desconocidas se escriben como

$$\begin{aligned} J_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \cdots + B_{1i}C_i \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_i &= b_{i1}C_1 + b_{i2}C_2 + \cdots + b_{ii}C_i \end{aligned}$$

Para obtener el inverso de la matriz y realizar los cálculos finales de las J_i se tienen subrutinas estándar para computadoras. La rapidez de transferencia de calor en cada superficie i-ésima con un área A_i se calcula entonces a partir de

$$\frac{q_i}{A_i} = \frac{\epsilon_i}{1-\epsilon_i}(E_{b_i} - J_i) \tag{8-110}$$

Al plantear las ecuaciones nodales deberemos tener en cuenta el resultado de la Ec. 8-l 10 para una superficie ***aislada,*** es decir, una en la que haya transferencia de calor neta. Así la Ec. 8-110 requiere que

$$E_{b_i} = J_i \qquad \text{para superficie aislada} \tag{8-111}$$

Desde el punto de vista práctico un esquema de iteración de Gauss-Seidel podría ser el procedimiento numérico más eficiente a seguir en la resolución del conjunto de ecuaciones para las J_i. Para el esquema de Gauss-Seidel las ecuaciones precedentes deberán organizarse para J_i en forma explícita. Resolviendo para J_i en la Ec. 8-107 y desglosando el término F_{ii} obtenemos

$$J_i = (1 - \epsilon_i) \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + (1 - \epsilon_i) F_{ii} J_i + \epsilon_i E_{b_i}$$

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}(1 - \epsilon_i)} \left[(1 - \epsilon_i) \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \epsilon_i E_{b_i} \right] \tag{8-112}$$

Para una superficie en equilibrio radiante, $q_i/A_i = 0$ y puede sustituirse $J_i = E_{bi}$ en la Ec. 8-112 para que dé

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}} \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j \qquad \text{para } \frac{q_i}{A_i} = 0 \tag{8-113}$$

Si el planteamiento del problema debe incluir un flujo de calor específico q_i/A_i en una de las superficies i-ésima, podemos resolver para E_{bi} a partir de la Ec. 8-110 para obtener

$$E_{b_i} = J_i + \frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i} \frac{q_i}{A_i} \tag{B-114}$$

Al sustituir este valor en la Ec. 8-107 y resolver en seguida para J_i da

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}} \left(\sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \frac{q_i}{A_i} \right) \tag{8-115}$$

En muchos casos la solución de la radiación debe tomar en cuenta la conducción y convección en la superficie i-ésima. El balance de energía adecuado para un estado estacionario es entonces

Calor transmitido por conducción hacia el interior de la superficie + calor transmitido por convección hacia el interior de la superficie = energía radiante ***perdida*** desde la superficie.

$$q_{\text{cond}, i} + q_{\text{conv}, i} = q_{i, \text{rad}} \tag{8-116}$$

Este balance de energía se puede usar junto con la Ec. 8-115 para obtener la ecuación nodal adecuada para J_i.

Mientras que los planteamientos precedentes pueden parecer bastante engorrosos a primera vista, su resolución por computadora es bastante sencilla, ya sea con inversión de matriz o iteración. Para muchos problemas prácticos sobre radiación, el número de ecuaciones es reducido y se puede utilizar una calculadora programable para su resolución. En la mayor parte de los casos nuestro conocimiento sobre las propiedades de la superficie (ϵ_i) son mínimos, de manera que una resolución por método iterativo no tendrá que llevarse a cabo hasta la máxima precisión.

En resumen, hemos esbozado el procedimiento computacional que deberá seguirse para la solución numérica de transferencia de calor por radiación entre superficies grises difusas. Este procedimiento básico es el mismo tanto para los cálculos hechos a mano, como para los realizados por medio de una minicomputadora con lenguaje combinado o por medio de una computadora grande.

1. **Evaluar F_{ij} y ϵ_i para todas las superficies.**
2. **Evaluar E_{bi} para todas las superficies con temperatura especificada.**
3. **Formular las ecuaciones nodales para J_i utilizando:**
   - ***a*** **La Ec. 8-112 para superficies con T_i especificada.**
   - *b* **La Ec. 8-113 para superficies en balance radiante ($J_i = E_{bi}$).**
   - *c* **La Ec. 8-115 para superficies con q_i especificada.**
4. **Resolver las ecuaciones para las J_i. Si se utiliza una iteración de Gauss-Seidel, siga los siguientes pasos:**
   - *a* **Suponga valores iniciales de las J_i. Para cálculos con computadoras grandes los valores iniciales se pueden tomar como cero. Para minicomputadoras o un esquema de computación abreviado, se deberá realizar una mejor conjetura inicial.**
   - *b* **Calcule de nuevo todas las J_i de acuerdo con las ecuaciones del paso 3, utilizando siempre para el cálculo los valores más recientes.**
   - *c* **Detenga los cálculos cuando haya obtenido un valor de precisión δ aceptable tal que**

$$J_i^{n+1} - J_i^n \leq \delta$$

   en donde n designa el número de iteraciones.
5. **Calcule las q_i' y T_i' usando:**
   - *a* **q_i de la Ec. 8-110 para superficies grises y de la Ec. 8-106 para superficies negras con T_i especificada.**
   - *b* **T_i de $J_i = E_{bi} = \sigma T_i^4$ para superficies en balance radiante.**
   - *c* **T_i utilizando la E_{bi} que se obtuvo de la Ec. 8-114 para superficies con q_i especificada.**

Claro está que si se prefiere utilizar inversión de matriz en lugar del esquema iterativo, las ecuaciones precedentes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$J_i[1 - F_{ii}(1 - \epsilon_i)] - (1 - \epsilon_i) \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \epsilon_i E_{b_i} \qquad (8\text{-}112a)$$

$$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = 0 \qquad (8\text{-}113a)$$

$$J_i(1 - F_{ii}) \quad \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{A_i} \qquad (8\text{-}115a)$$

Ejemplo 8-13: Soluciones numéricas

Dos superficies cuadradas de 1 m^2 se encuentran a 1 m de distancia entre sí con $T_1 = 1000$ K, $T_2 = 400$ K, $\epsilon_1 = 0.8$, $\epsilon_2 = 0.5$. Obtenga las soluciones numéricas para este sistema cuando (a) las placas se encuentran rodeadas por una gran habitación a 300 K y (b) las superficies están conectadas por una pared que radía de nuevo y cuya superficie exterior está perfectamente aislada.

Solución

Al consultar la Fig. 8-12, obtenernos

$$F_{12} = 0.2 \qquad F_{21} = 0.2 \qquad F_{,,} = 0 = F_{22}$$
$$F_{13} = 0.8 \qquad F_{23} = 0.8$$

(la superficie 3 es la superficie aislada a los alrededores) $A_1 = A_2 = 1\ \mathrm{m}^2$

Para la parte (a)

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 56.69\ \mathrm{kW/m^2} \quad [17{,}970\ \mathrm{Btu/h \cdot pie^2}]$$
$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 1.451\ \mathrm{kW/m^2}$$
$$E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 0.459\ \mathrm{kW/m^2}$$

Como $A_3 \to \infty$, F_{31} y F_{32} deben acercarse a cero ya que $A_1F_{13} = A_3F_{31}$ y $A_2F_{23} = A_3F_{32}$. Las ecuaciones nodales se escriben en la forma de la Ec. 8-107:

superficie 1: $$J_1 - (1 \quad \epsilon_1)(F_{11}J_1 + F_{12}J_2 + F_{13}J_3) = \epsilon_1 E_{b_1}$$

superficie 2: $$J_2 - (1 - \epsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{22}J_2 + F_{23}J_3) = \epsilon_2 E_{b_2} \qquad (a)$$

superficie 3: $$J_3 \quad (1 - \epsilon_3)(F_{31}J_1 + F_{32}J_2 + F_{33}J_3) = \epsilon_3 E_{b_3}$$

Como F_{31} *y* F_{32} *están cerca de cero,* F_{33} deberá ser 1 .0.

Insertando los valores numéricos para los diversos términos, obtenemos

$$J_1 \quad (1 - 0.8)[(0)J_1 + (0.2)J_2 + (0.8)J_3] = (0.8\text{X}56.69)$$
$$J_2 \quad (1 - 0.5)[(0.2)J_1 + (0)J_2 + (0.8)J_3] = (0.5)(1.451) \qquad (b)$$
$$J_3 - (1 - \epsilon_3)[(0)J_1 + (0)J_2 + (1.0)J_3] = \epsilon_3(0.459)$$

La tercera ecuación nos da $J_3 = 0.459\ \mathrm{kW/m^{2 \cdot K}}$ Por ser la habitación muy grande se comporta como un *cuerpo negro.* Pero *no tiene una transferencia de calor cero.*

Finalmente, las ecuaciones se escriben en forma compacta corno

$$J_1 - 0.04J_2 - 0.16J_3 = 45.352$$
$$-0.1J_1 + J_2 - 0.45, = 0.7255 \qquad (c)$$
$$J_3 = 0.459$$

Es claro que en este conjunto sólo quedan dos incógnitas, J_1 y J_2.

En la parte (b), para la pared circundante A_3 es 4.0 m^2, y establecemos $J_3 = E_{b3}$ porque la superficie 3 se **encuentra aislada. Por reciprocidad tenemos**

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \qquad F_{31} = \frac{(1.0)(0.8)}{4.0} = 0.2$$

$$A_2F_{23} = A_3F_{32} \qquad F_{32} = \frac{(1.0)(0.8)}{4.0} = 0.2$$

Entonces de F_{31} + F_{32} t F_{33} = 1.0 tenemos $F_{33} = 0.6$.

El conjunto de ecuaciones de(a) sigue siendo válido, así que insertamos los valores numéricos para obtener (con $J_3 = E_{b3}$)

$$\begin{aligned} J_1 &= (1 - 0.8)[(0)J_1 + (0.2)J_2 + (0.8)J_3] = (0.8)(56.69) \\ J_2 &\quad (1 - 0.5)[(0.2)J_1 + (0)J_2 + (0.8)J_3] = (0.5)(1.451) \\ J_3 &\quad (1 \bullet :,)[(0.2)5, + (0.2)J_2 + (0.6)J_3] = \epsilon_3 J_3 \end{aligned} \qquad (d)$$

Obsérvese que la tercera ecuación del conjunto (d) se puede escribir como

$$J_3(1 - \epsilon_3) - (1 - \bullet \quad :,)1(0.2)J, + (0.2)J_2 + (0.6)J_3] = 0$$

de modo que el término 1 - ϵ_3 se elimina, y obtenemos nuestro conjunto final de ecuaciones

$$\begin{aligned} J, - 0.04J_2 \quad 0.16J_3 &= 45.352 \\ -0.1J_1 + J_2 - 0.4J_3 &= 0.7255 \\ -0.25, \quad 0.2J_2 + 0.4J_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (e)$$

Para **obtener las transferencias de calor el conjunto de ecuaciones se resuelve primero por las radiosidades. Para el conjunto** (e)

$$J_1 = 45.644 \text{ kW/m}^2 \quad [14\,470 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$
$$J_2 = 5.474 \text{ kW/m}^2$$
$$J_3 = 0.459 \text{ kW/m}^2$$

Las transferencias de calor se obtienen de la Ec. 8-1 10:

$$q_1 = \frac{A_1\epsilon_1}{1 - \epsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(1.0)(0.8)}{1 - 0.8}(56.69 \quad 45.644) = 44.184 \text{ kW} \quad [150\,760 \text{ Btu/h}]$$

$$q_2 = \frac{A_2\epsilon_2}{1 - \epsilon_2}(E_{b_2} - J_2) = \frac{(1.0)(0.5)}{1 - 0.5}(1.451 - 5.474) = -4.023 \text{ kW} \quad [-13\,730 \text{ Btu/h}]$$

El calor neta *absorbido* por la habitación es la suma algebraica de q_1 y q_2 o

$$q_{3,\text{absorbido}} = 44.184 \quad 4.023 = 40.161 \text{ kW} \quad [137\,030 \text{ Btu/h}]$$

Para la parte *(b),* **las soluciones del conjunto (e) son**

$$J_1 = 51.956 \text{ kW/m}^2 \qquad J_2 = 20.390 \text{ kW/m}^2 \qquad J_3 = 36.173 \text{ kW/m}^2$$

Las transferencias **de calor son**

$$q_1 = \frac{A_1\epsilon_1}{1-\epsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(1.0)(0.8)}{1-0.8}(56.69 - 51.965) = 18.936 \text{ kW}$$

$$q_2 = \frac{A_2\epsilon_2}{1-\epsilon_2}(E_{b_2} - J_2) = \frac{(1.0)(0.5)}{1-0.5}(1.451 - 20.390) = -18.936 \text{ kW}$$

Es claro que estas transferencias de calor deben ser iguales en magnitud con signo opuesto, porque la pared que está aislada no intercambia calor. La temperatura de la superficie aislada se obtiene de

$$J_3 = E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 36.173 \text{ kW/m}^2$$

$$T_3 = 894 \text{ K} \quad [621\ ^\circ\text{C}, 1150\ ^\circ\text{F}]$$

Ejemplo 8-14: Radiación desde un hoyo

Para ilustrar la formulación de transferencia por radiación para la solución numérica, consideraremos un hoyo circular de 2 cm de diámetro y 3 cm de profundidad, tal como se muestra en la figura a continuación. Se perfora el hoyo en un bloque de metal grande que se mantiene a 1000 °C y el cual tiene una emisividad en superficie de 0.6. La temperatura del recinto grande en que se encuentra es de 20 "C. En un enfoque sencillo a este problema se supondría que la radiosidad es uniforme sobre toda la superficie caliente interna. En realidad, la radiosidad varía sobre la superficie y para analizarla la dividimos en segmentos: 1 (fondo del hoyo), 2, 3 y 4 (lados del hoyo).

El amplio recinto se comporta como un cuerpo negro a 20 °C, de manera que por conveniencia en el análisis, podemos suponer que el hoyo se encuentra cubierto por una superficie negra imaginaria de 5 a 20 °C. Plantearemos el problema con una solución numérica para las radiosidades y en seguida calcularemos las rapideces de transferencia de calor. Después examinaremos para esta misma geometría un caso de superficie aislada.

Todos los factores de forma se pueden obtener con la ayuda de la Fig. 8-13 y las superficies imaginarias de trazos 6 y 7. Tenemos

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = (5.669 \times 10^{-8})(1273)^4 = 1.48874 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$= E_{b_2} = E_{b_3} = E_{b_4}$$

$$E_{b_5} = \sigma T_5^4 = (5.669 \times 10^{-8})(293)^4 = 417.8 \text{ W/m}^2$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.6 \qquad \epsilon_5 = 1.0$$

$$A_1 = A_5 = \pi(1)^2 = \pi \text{ cm}^2 = A_6 = A_7$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = \pi(2)(1) = 2\pi$$

$$F_{11} = F_{55} = 0 \qquad F_{16} = 0.37 \qquad F_{17} = 0.175 \qquad F_{15} = 0.1$$

$$F_{12} = 1 - F_{16} = 0.63 = F_{54}$$

$$F_{13} = F_{16} - F_{17} = 0.195 = F_{53}$$

$$F_{14} = F_{17} - F_{15} = 0.075 = F_{52}$$

$$F_{21} = F_{26} = F_{16}\frac{A_1}{A_2} = 0.315 = F_{45} = F_{36} = F_{37}$$

$$F_{22} = 1 - F_{21} - F_{26} = 0.37 = F_{33} = F_{44}$$

$$F_{31} = F_{13}\frac{A_1}{A_3} = 0.0975$$

$$F_{32} = F_{36} - F_{31} = 0.2175 = F_{34} = F_{43} = F_{23}$$

$$F_{27} = F_{26} - F_{23} = F_{21} - F_{23} = 0.0915 = F_{46}$$

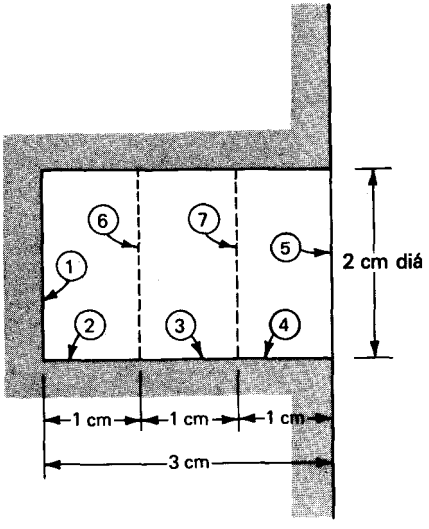


Figura Ejemplo 8-14

$$F_{41} = F_{14}\frac{A_1}{A_4} = 0.0375 = F_{25}$$

$$F_{42} = F_{46} - F_{41} = 0.06 = F_{24}$$

Las ecuaciones para las radinsidades se escriben ahora en la forma de la Ec. 8-1 12, observando que $F_{11} = 0$ y $J_5 = E_{b5}$:

$$\text{©} \quad \blacksquare \quad (1 - \bullet \ ,NF_{,,}J_{,} + F_{13}J_3 + F_{14}J_4 + F_{15}E_{b_5}) + \epsilon_1 E_{b_1}$$

$$J_2 = \frac{1}{1 \quad F_{22}(1 \sim \epsilon_2)}[(1 \quad \epsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_3 + F_{24}J_4 + F_{25}E_{b_5}) + \epsilon_2 E_{b_2}]$$

$$J_3 = \frac{1}{1 - F_{33}(1 \sim \epsilon_3)}[(1 - \epsilon_3)(F_{31}J_1 + F_{32}J_2 + F_{34}J_4 + F_{35}E_{b_5}) + \epsilon_3 E_{b_3}]$$

$$J_4 = \frac{1}{1 - F_{44}(1 \sim \epsilon_4)}[(1 - \epsilon_4)(F_{41}J_1 + F_{42}J_2 + F_{43}J_3 + F_{45}E_{b_5}) + \epsilon_4 E_{b_4}]$$

Cuando todos los valores numéricos hayan sido insertados, obtendremos

$$J_{,} = 0.252J_2 + 0.078J_3 + 0.035, + 89{,}341$$

$$J_2 = 0.14795, \quad + 0.1021J_3 + \quad 0.028175, + 104848$$

$$J_{,} = 0.045775, \quad + 0.1021J_2 + 0.10215, + 104\ 859$$

$$J_4 = 0.017615, + 0.02817J_2 + 0.1021J_3 + 104\ 902$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para obtener

$$J_{,} = 1.4003 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_2 = 1.4326 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_3 = 1.3872 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_{,} = 1.2557 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

Las transferencias de calor se pueden calcular a partir de la Ec. 8-1 10:

$$q_i = \frac{\epsilon_i A_i}{1 - \epsilon_i}(E_{b_i} - J_i)$$

$$q_1 = \frac{(0.6)(\pi \times 103}{1 - 0.6}(1.4887 - 1.4003)(10^5) = 4.1658 \text{ W}$$

$$q_2 = \frac{(0.6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 - 0.6}(1.4887 - 1.4326)(10^5) = 5.2873 \text{ W}$$

$$q_3 = \frac{(0.6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 - 0.6}(1.4887 - 1.3872)(10^5) = 9.5661 \text{ W}$$

$$q_4 = \frac{(0.6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 - 0.6}(1.4887 \quad 1.2557)(10^5) = 21.959 \text{ W}$$

La transferencia de calor total es la suma de estas cuatro cantidades

$$q_{\text{total}} = 40.979 \text{ W} \quad [139.8 \text{ Btu/h}]$$

Es interesante comparar esta transferencia de calor con el valor que obtendríamos suponiendo una radiosidad uniforme sobre la superficie caliente. Entonces tendríamos un problema de dos cuerpos con

$$A_1 = \pi + 3(2\pi) = 7\pi \text{ cm}^2 \qquad A_5 = \pi \qquad F_{51} = 1.0 \qquad \epsilon_1 = 0.6 \qquad \epsilon_5 = 1.0$$

La transferencia de calor se calcula entonces de la Ec. 8-43. efectuando el cambio de nomenclatura adecuado:

$$q = \frac{(E_{b_1} - E_{b_5})A_5}{1/\epsilon_5 + (A_5/A_1)(1/\epsilon_1 \quad 1)} = \frac{(\pi \times 10^{-4})(1.4887 \times 10^5 - 417.8)'}{1 + (\frac{1}{7})(1/0.6 - 1)}$$

$$= 42.581 \text{ W } 1145.3 \text{ Btu/h]}$$

Así, la suposición sencilla de una radiosidad uniforme produce una transferencia de calor que es 3.9% superior a la obtenida al dividir la superficie en cuatro segmentos para su análisis. Esto indica que la suposición de una radiosidad uniforme que hemos estado utilizando es muy buena en cálculos ingenieriles.

Consideremos ahora el caso en el que la superficie 1 continúa radiando a 1000 °C con $\epsilon = 0.6$. pero cuyas paredes 2, 3 y 4 se encuentran aisladas. La radiación continúa efectuándose hacia un amplio recinto a 20 °C. La ecuación nodal para J_1 es la misma que anteriormente. pero ahora las ecuaciones para J_2, J_3 y J_4 se deben escribir en la forma de la Ec. 8- 113. Después de hacer esto y de haber insertado los valores numéricos, obtenemos

$$J_1 = 0.2525, + 0.0785, + 0.035, + 89{,}341$$

$$J_2 = 0.5J_1 + 0.3452J_3 + 0.095245, + 24.869$$

$$J_3 = 0.15485, + 0.34525, + 0.34525, + 64.66$$

$$J_4 = 0.059525, + 0.09525, + 0.34525, + 208.9$$

Después de resolver estas ecuaciones, tenemos

$$J_1 = 1.1532 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \quad [36\,560 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

$$J_2 = 0.81019 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_3 = 0.57885 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_4 = 0.34767 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

La transferencia de calor en la superficie 1 es

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 A_1}{1-\epsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(0.6)(\pi \times 10^{-4})}{1-0\,6}(1.4887 - 1.1532)(10^5)$$
$$= 15.81 \text{ W } [53.95 \text{ Btu/h}]$$

Las temperaturas de los elementos de la superficie aislada se obtienen a partir de

$$J_i = E_{b_i} = \sigma T_i^4$$
$$T_2 = 1093 \text{ K} = 820 \text{ °C } [1508 \text{ °F}]$$
$$T_3 = 1005 \text{ K} = 732 \text{ °C } [1350 \text{ °F}]$$
$$T_4 = 895 \text{ K} = 612 \text{ °C } [1134 \text{ °F}]$$

Es interesante comparar la transferencia de calor que acabamos de calcular con la obtenida al suponer que las superficies 2, 3 y 4 tienen temperatura y radiosidad uniformes. Para este caso se aplica la Ec. 8-41:

$$q = \frac{A_1(E_{b_1} - E_{b_5})}{\frac{A_1 + A_2 + ZA_1F_{15}}{A_5 \cdot A_1(F_{15})^2} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_5}\left(\frac{1}{\epsilon_5} - 1\right)}$$

$$q = \frac{(\pi \times 10^{-4})(1.4887 \times 10^5 - 417.8)}{\frac{\pi + \pi - 2\pi(0.1)}{\pi - \pi(0.1)^2} + \frac{1}{0.6} - 1} = 18.769 \text{ W } [64.04 \text{ Btu/h}]$$

En este caso la suposición de una radiosidad uniforme en la superficie aislada nos proporciona una transferencia de calor global con la superficie 1 (fondo del hoyo) que es un 18.7% más alta.

Ejemplo 8-15: Calefactor con flujo de calor constante

En la figura Ejem. 8-15, la superficie 1 tiene instalado un calefactor eléctrico de manera que en la superficie se genera un flujo de calor constante de 100 kW/m². Las cuatro superficies que la rodean se encuentran en equilibrio radiante. con la superficie 1 y el amplio recinto que se encuentra a 20 °C. Las propiedades de la superficie son $\epsilon_1 = 0.8$ y es $= \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0.4$. Determine la temperatura de todas las superficies. La parte trasera de la superficie 1 está aislada. Repita los cálculos suponiendo que las superficies 2. 3, 4 y 5 son una sola superficie con temperatura uniforme.

Solución

En realidad, las superficies 2, 3, 4 y 5 tienen cada una dos superficies; una superficie interior y otra exterior. Por tanto, tenemos *nueve* superficies además del recinto, de manera que tenemos un problema de 10 cuerpos. Desde luego, por simetría vemos que $T_2 = T_4$ y $T_3 = T_5$, pero plantearemos el problema en la forma numérica general. Al amplio recinto le designamos como la superficie 6 y se comporta como si $\epsilon_6 = 1.0$. De manera que se comporta como si la abertura estuviera cubierta con una superficie negra a 20 °C. Los factores de forma de las superficies interiores se obtienen de las Figs. 8-12 y 8-14:

$$F_{16} = F_{61} = 0.285 \quad F_{13} = F_{15} = 0.24 = F_{31} = F_{51} \quad F_{12} = F_{14} = 0.115 \quad F_{24} = F_{42} = 0.068$$
$$F_{35} = F_{53} = 0.285 \quad F_{32} = F_{52} = F_{34} = 0.115$$
$$F_{25} = F_{23} = F_{45} = F_{43} = F_{21} = F_{41} = F_{26} = F_{46} = 0.23$$
$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = F_{55} = 0$$

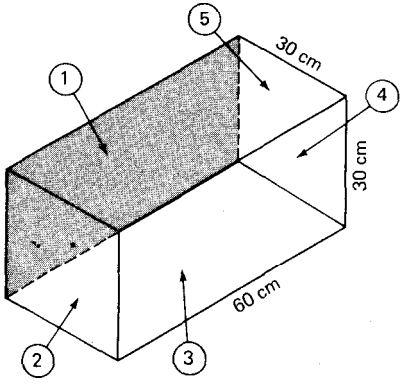


Figura Ejemplo g-15

Para las superficies *exteriores*,

$$F'_{26} = F'_{36} = F'_{46} = F'_{56} = 1.0$$

en donde las virgulillas indican las superficies exteriores. También utilizaremos las virgulillas para designar las radiosidades de las superficies exteriores. Para la habitación, $J_6 = E_{b_6} = (5.669 \times 10^{-8})(293)^4 = 417.8$ W/m^2.

Para la superficie 1 con flujo de calor constante. usamos la Er. 8-115a y escribimos

$$J_1 (F_{12}J_2 + F_{13}J_3 + F_{14}J_4 + F_{15}J_5 + F_{16}J_6) = 1.0 \times 10^5 \qquad (a)$$

Debido a la condición de equilibrio radiante tenemos

$$(J_2 - E_{b_2})\frac{\epsilon_2 A_2}{1-\epsilon_2} = (E_{b_2} - J'_2)\frac{\epsilon_2 A_2}{1-\epsilon_2}$$

Y

$$E_{b_2} = \frac{J_2 + J'_2}{2} \qquad (b)$$

en donde las virgulillas designan la radiosidad exterior. Una relación similar ocurre con las superficies 3, 4 y 5. Por tanto, podemos utilizar la Ec. 8-l 12a para la superficie *interna* 2

$$J_2 - (1 - \epsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_3 + F_{24}J_4 + F_{25}J_5 + F_{26}J_6) = \frac{\epsilon_2}{2}(J_2 + J'_2) \qquad (c)$$

y por la superficie *externa* 2

$$J'_2 - (1 - \epsilon_2)(F'_{26}J_6) = \frac{\epsilon_2}{2}(J_2 + J'_2) \qquad (d)$$

Para las superficies 3, 4 y 5 también se escriben ecuaciones como la(r) y(d), y al insertar los factores de forma y las emisividades se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$J_1 - 0.1155J_3 - 0.24J_4 - 0.115J_5 - 0.245J_6 = 1.0012 \times 10^5$$
$$-0.1385J_1 + 0.85J_3 - 0.25J_4 - 0.138J_5 - 0.04085J_6 = 57.66$$
$$0.2J_2 - 0.85J_6 = -250.68$$

$$-0.1445, = 0.069J_2 + 0.8J_3 - 0.2J'_3 \quad 0.069J_4 \quad 0.05J_5 = 60.16$$

$$0.25, \quad 0.85; = -250.68$$

$$-0.138J_1 = 0.0408J_2 = 0.1385, + 0.8J_4 \sim 0.2J'_4 \sim 0.1385, = 57.66$$

$$0.25, \quad 0.85; = -250.68$$

$$-0.144J_1 \quad 0.069J_2 = 0.0575, \sim 0.069J_4 + 0.85, \quad 0.2J'_5 = 60.16$$

$$0.25, \quad 0.8J'_5 = -250.68$$

Por consiguiente, tendremos nueve ecuaciones y nueve incógnitas que se pueden resolver para obtener

$$J_1 = 1.24887 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$J_2 = J_4 = 37\ 549$$

$$J_3 = J'_4 = 9701$$

$$J_3 = J_5 = 33\ 605$$

$$J'_3 = J'_5 = 8714$$

Las temperaturas se calculan entonces de la Ec. (h):

$$E_{b_2} = \frac{37\ 549 + 9701}{2} = 23\ 625 \qquad T_2 = T_4 = 803.5 \text{ K}$$

$$E^{b_3} = \frac{33\ 605 + 8714}{2} = 21\ 160 \qquad T_3 = T_5 = 781.6 \text{ K}$$

Para la superficie 1 observamos que

$$\frac{q}{A} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}(E_{b_1} - J_1)$$

de modo que

$$E_{b_1} = \frac{(1.0 \times 10^5)(1 - 0.8)}{0.8} + 1.24887 \times 10^5 = 1.49887 \times 10^5$$

Y

$$T_1 = 1275 \text{ K}$$

De nuevo hacemos notar que podríamos haber conservado la simetría del problema y establecido $J_2 = J_4, J'_2 = J'_4$ y así sucesivamente. Al hacer esto habríamos obtenido sólo cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Ahora regresamos y tomamos las superficies 2, 3, 4 y 5 como una superficie que escogeremos y llamaremos superficie 7. Los factores de forma son entonces

$$F_{16} = F_{61} = 0.285 \qquad F_{17} = 1 - 0.285 = 0.715$$

$$A_7 = 2.0 \qquad A_6 = 6.0$$

Así

$$F_{77} = (0.715)\left(\frac{2}{6}\right) = 0.2383 = F_{76}$$

$$F_{77} = 1 - (2X0.2383) = 0.5233 \qquad F'_{76} = 1.0$$

Así para la superficie 1 utilizamos la Ec. 8-1 15a para obtener

$$J_1 = (F_{17}J_7 + F_{16}J_6) = 1.0 \times 10^5$$

Utilizando $E_{b7} = (J_7 + J_7')/2$, tenemos para la superficie *interna* 7

$$J_7[1 - F_{77}(1 - \epsilon_7)] - (1 \quad \epsilon_7)(F_{71}J_1 + F_{76}J_6) = \frac{\epsilon_7}{2}(J_7 + J_7')$$

mientras que para la superficie *externa* tenemos

$$J_7' - \text{☎} - \bullet \;)F\&Js = \frac{\epsilon_7}{2}(J_7 + J_7')$$

Cuando los valores numéricos se insertan. obtenemos el conjunto de tres ecuaciones:

$$J, - 0.7155, = 1.0012 \times 10^5$$
$$-0.1435, + 0.4665, - 0.25; = 59.74$$
$$0.25, - 0.8J_7' = -250.68$$

cuya solución es

$$J_1 = 1.31054 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J, = 43\,264$$
$$J; = 11\,129$$

Entonces las temperaturas se calculan como antes:

$$E_{b7} = \frac{43\,264 + 11\,129}{2} = 27.197 \qquad T_7 = 832.2 \text{ K}$$

$$E_{b_1} = \frac{(1.0 \times 10^5)(1 - 0.8)}{0.8} + 1.31054 \times 10^5 = 1.65054 \times 10^5$$

$$T_1 = 1306 \text{ K}$$

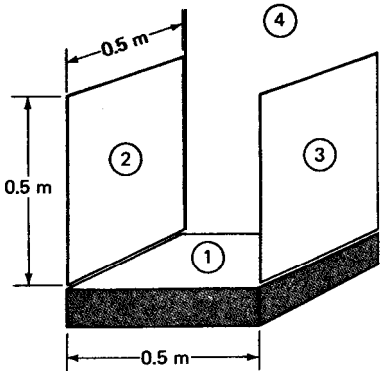
Así, tenemos una diferencia de 30 K de temperatura entre los dos métodos.

Ejemplo 6-16: Convección y radiación combinadas (sistema no lineal)

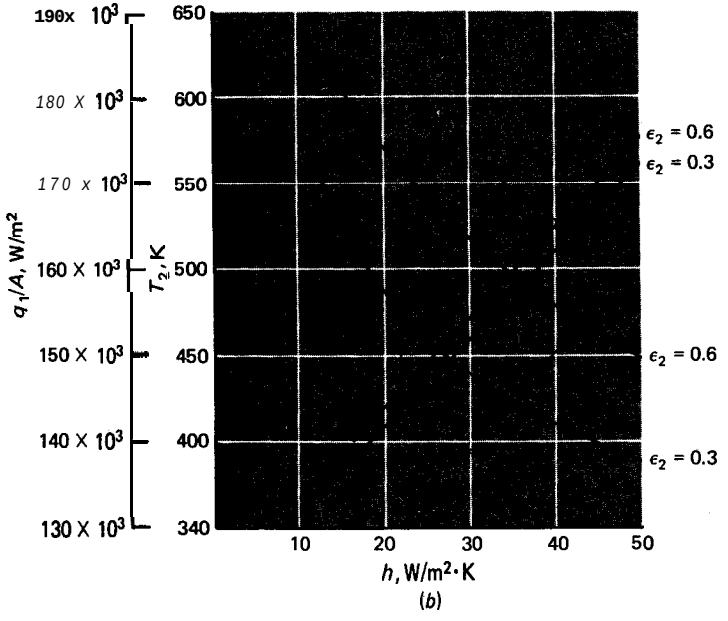
A una placa de 0.5 por 0.5 m se le mantiene a 1300 K y se encuentra expuesta a un medio de convección y radiación a 300 K que la rodea. Sobre la superficie superior se han fijado dos protectores de radiación de 0.5 por 0.5 m tal como se muestra en la figura a continuación. El coeficiente de transferencia de calor para todas las superficies es de 50 $\text{W/m}^{2.K}$, y $\epsilon_1 = 0.8$, $\epsilon_2 = 0.3 = \epsilon_3$ Determine la perdida total de calor de la superficie a 1300 K y la temperatura de los dos protectores.

Este ejemplo ilustra cómo se pueden manejar los problemas de convección y radiación con el planteamiento numérico y un procedimiento iterativo con computadora. En la figura aparece la nomenclatura. Utilizando las Figs. 8-12 y 8-14, podemos evaluar los factores de forma como

$$F_{12} = F_{13} = 0.2 \qquad F_{14} = 1 - 0.2 - 0.2 = 0.6$$
$$F_{23} = F_{32} = 0.2 \qquad F_{24L} = F_{34R} = 1.0$$
$$F_{21} = F_{12} = F_{31} = 0.2 \qquad F_{24R} = F_{34L} = 0.6$$
$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$



(a)



(b)

Figura Ejemplo 816

$$J_{2R} = J_{3L} \qquad J_{2L} = J_{3R} \quad \text{por simetría}$$

$$J_4 = E_{b_4}$$

Ahora utilizamos la Ec. 8-112 para obtener una relación para J_1:

$$J_1 = (1 - \bullet \quad I)[FuJUP + F_{13}J_{3L} + F_{14}J_4] + \epsilon_1 E_{b_1}$$

Pero $J_{2R} = J_{3L}$ y $F_{12} = F_{13}$ de manera que

$$J_1 = (1 - \epsilon_1)(2F_{13}J_{2R} + F_{14}J_4) + \epsilon_1 E_{b_1} \qquad (a)$$

Para el balance global de energía en la superficie 2 utilizamos la Ec. B-115:

$$2h(T_\infty - T_2) = \frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}(E_{b_2} \quad J_{2R}) + \frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}(E_{b_2} - J_{2L})$$

$$= \frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}(2E_{b_2} - J_{2R} - J_{2L}) \qquad (b)$$

Para la superficie J_{2R} **se usa la** Ec. **8-l** *12:*

$$J_{2R} = (1 \quad \epsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_{3L} + F_{24R}J_4) + \bullet \quad zEbZ$$

Pero $J_{2R} = J_{3L}$ **así que**

$$J_{2R} = \frac{1}{1 - (1-\epsilon_2)F_{23}}[(1-\epsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{24R}J_4) + \epsilon_2 E_{b_2}] \qquad (c)$$

Para la superficie J_{2L} **la ecuación es**

$$J_{2L} = (1 \quad \epsilon_2)(F_{24L}J_4) + \epsilon_2 E_{b_2} \qquad (d)$$

Ahora tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas, $J_1, J_{2R}, J_{2L}, E_{b2}$ con $T_2 = (E_{b2}/\sigma)^{1/4}$. **Sin embargo, la Ec.** (b) **no es lineal en** E_b, **de manera que debemos usar un procedimiento especial para resolver el conjunto. Antes de comenzar el procedimiento, podemos insertar cantidades numéricas en las ecuaciones que van de la** (a) **a la (d) para obtener los coeficientes de matriz:**

J_1	J_{2R}	J_{2L}	E_{b_2}	C
1	−0.08	0	0	129584
0	-0.4286	-0.4286	0.8571	30000 $100T_2$
0.162791	-1	0	0.348837	-224.2605
0	0	1	-0.3	321.4

El algoritmo de cómputo que utilizamos hace iteraciones con los valores de T_2, **hasta que el valor** E_{b2} **obtenido de la resolución del conjunto de las ecuaciones concuerda con** $E_{b2} = \sigma T_2^4$. **La secuencia de los pasos es la siguiente:**

1. **Suponga un valor razonable para** T_2.
2. **Utilizando este valor en la Ec.** *(b)* **resuelva la matriz para un valor estimado de** E_{b2} *(e).*
3. **Calcule** $E_{b2}(T_2) = \sigma T_2^4$ **del valor supuesto para** T_2.
4. **Calcule** $\Delta E_{b2} = E_{b2}(e) - E_{b2}(T_2)$.
5. **Si** $\Delta E_{b2} > 0$ **suponga un valor mayor para** T_2 **y regrese al paso 2. Si** $\Delta E_{b2} < 0$ **suponga un valor menor para** T_2 **y** *regrese* **al paso 2.**
6. **Continúe hasta que** ΔE_{b2} **sea lo suficiente pequeño, en cuyo caso la solución a la matriz es la adecuada.**

Después qae se han completado las dos iteraciones se usa interpolación o extrapolación para alcanzar $\Delta E_{b2} = 0$ **basándose en los dos últimos valores de** ΔE_{b2} **para acelerar el cálculo. Los resultados de la iteración son:**

Interación	T_2	$E_{b_2}(e)$	$E_{b_2}(T_2)$	ΔE_{b_2}
1	300	16283	459	15824
2	500	-18377	3543	-21920
3	384	1725.7	1232.6	493.1
4	386.6	1275	1266	9

Es claro que el método converge rápidamente y la solución final es

$$J_1 = 1.3135 \times 10^5 \qquad J_{2R} = 22{,}051$$
$$J_{2L} = 710 \qquad E_{b_2} = 1275 \qquad T_2 = 386.6 \text{ K}$$

El flujo de calor total perdido por la superficie 1 es

$$\frac{q_1}{A_1} = h(T_1 - T_\infty) + (E_{b_1} - J_1)\frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} \qquad (e)$$
$$= 1.7226 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

Para una superficie de 0.5 por 0.5 m el calor perdido es por consiguiente

$$q_1 = (1.7226 \times 10^5)(0.5)^2 = 43\,065 \text{ W}$$

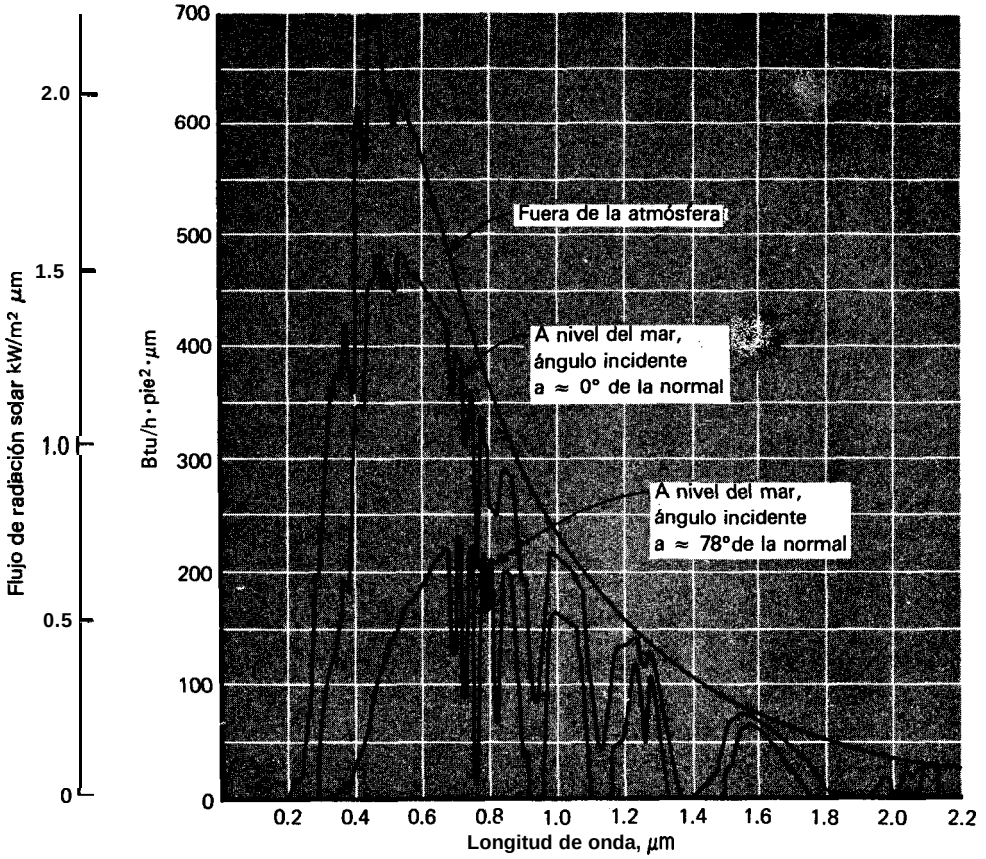
Se podrán calcular otros casos, y la influencia que tienen h y ϵ_2 en los resultados se pueden ver en la figura a continuación.

8-14 Radiación solar

La radiación solar es una forma de radiación térmica que tiene una distribución de longitud de onda específica. Su intensidad depende en gran parte de las condiciones atmosféricas, la estación del año y el ángulo de incidencia de los rayos solares sobre la superficie de la tierra. En los confines de la atmósfera, la irradiación solar total es de 1395 W/m^2 cuando la Tierra se encuentra a su distancia media del Sol. A este número se le denomina *constante* solar y está sujeto a modificaciones a medida que se obtienen más datos experimentales.

Debido a la alta capacidad de absorción del bióxido de carbono y del vapor de agua en la atmósfera, no toda la energía expresada por la constante solar alcanza la superficie de la Tierra. La incidencia de radiación solar sobre la superficie de la Tierra depende también de la cantidad de polvo y otros contaminantes en la atmósfera. Cuando los rayos solares inciden en forma directa sobre la superficie de la Tierra, ésta alcanza su máxima cantidad de energía solar ya que (1) se presenta un área vista más ampliamente para el flujo solar entrante y (2) los rayos solares viajan una distancia menor a través de la atmósfera, y de esta manera la absorción es menor que la que hay cuando el ángulo de incidencia es más oblicuo que el normal. La Fig. 8-63 muestra los efectos de la absorción atmosférica para un lugar a nivel del mar en un día despejado y con una atmósfera con una cantidad de polvo y de vapor de agua moderados.

La Fig. 8-63 hace evidente que la radiación solar que alcanza la superficie de la Tierra no se comporta como la radiación desde un cuerpo gris ideal, mientras que en el exterior de la atmósfera la distribución de energía sigue con mayor fidelidad un patrón ideal. Para determinar una temperatura de cuerpo negro equivalente para la radiación solar, podríamos emplear la longitud de onda a la que ocurre el espectro máximo (cerca de 0.5 μm, de acuerdo con la Fig. 8-63) y la ley de desplázamiento de Wien [Ec. 8-13]. Este estimado nos da



Flg. 863 Distribución espectral de la radiación solar como funciones de las condiciones atmosféricas y el ángulo de incidencia de acuerdo con la Ref. 15.

$$T \approx \frac{2987.6}{0.5} = 5795 \text{ K} \quad (10\,431 °\text{R})$$

La temperatura solar equivalente para la radiación térmica es por consiguiente cerca de 5800 K (10 000 °R).

Si todos los materiales presentaran un comportamiento de cuerpo gris, el análisis de la radiación solar no presentaria un problema particularmente difícil. Sin embargo, como la radiación solar se concentra en la longitud de ondas cortas, en oposición a longitudes de onda más largas de la mayoría de las radiaciones térmicas "confinadas a la Tierra", un material específico puede exhibir propiedades de absorción y transmisión completamente diferentes para las dos clases de radiación. El ejemplo clásico para este comportamiento es un invernadero. El vidrio ordinario transmite radiación sin dificultad alguna en longitudes de ondas menores a 2 μm; así, transmite la mayor parte de la radiación solar que incide sobre él. Sin embargo, este vidrio es por esencia opaco

a **radiaciones de longitudes de onda largas,** mayores de 3 o 4 μm. Prácticamente toda la radiación a baja temperatura emitida por objetos dentro del invernadero es de tal carácter de longitud de onda larga que permanece atrapada en él. Por tanto, el vidrio permite la entrada de mucho más cantidad de radiación de la que permite escapar, produciendo así el efecto de calentamiento que nos es tan conocido. La radiación solar absorbida por los objetos dentro del invernadero debe disiparse eventualmente hacia los alrededores, por medio de la convección a través del exterior de las paredes del invernadero.

Un comportamiento similar se observa en metales opacos o superficies pintadas en cuanto a su absorbencia y reflectividad solares, en oposición a la radiación a baja temperatura. En muchas ocasiones, la absorbencia total para radiación solar puede ser muy diferente de la absorbencia de radiación de un cuerpo negro a una temperatura moderada, digamos 25 °C. La Tabla 8-3 proporciona una breve comparación de absorbencias para algunas superficies típicas, tanto en radiación solar como en radiación a baja temperatura. Como se observará, puede haber grandes diferencias entre ellas.

Este breve estudio sobre la radiación solar no intenta ser completo. Su objetivo es más bien prevenir al lector sobre la información sobre propiedades (tal como las de la Ref. 14) cuando realiza cálculos para radiación solar.

Ejemplo 8-17

Calcule la temperatura de equilibrio de radiación para una placa expuesta a un flujo solar de 700 W/m² y con una temperatura a su alrededor de 25 °C cuando la superficie está cubierta por(a) una capa de pintura blanca, *(b)* una capa de laca negra. Desprecie la convección.

Tabla 8-3 Comparación de absorbencias de diversas superficies a las radiaciones solar y térmica a baja temperatura reunidas en la Ref. 14

Superficie	Absorbencia: *Para radiación solar*	Absorbencia: *Para radiación de baja temperatura ~25°C*
Aluminio muy pulido	0.15	0.04
Cobre muy pulido	0.18	0.03
exidado	0.65	0.75
Hierro fundido	0.94	0.21
Acero inoxidable Núm. 301, pulido	0.37	0.60
Mármol blanco	0.46	0.95
Asfalto	0.90	0.90
Tabique rojo	0.75	0.93
Grava	0.29	0.85
Laca negra mate	0.96	0.95
Pinturas blancas, diferentes tipos de pigmentos	0.12-0.16	0.90-0.95

Solución

En equilibrio radiante la energía neta absorbida del Sol debe igualar el intecambio de radiación de onda larga con los alrededores, o

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{Sol} \alpha_{Sol} = \alpha_{baja\ temp.}\,\sigma(T^4 - T^4_{alr}) \qquad (a)$$

Para la pintura blanca obtenemos de la Tabla 8-3

$$\alpha_{Sol} = 0.12 \qquad \alpha_{baja\ temp.} = 0.9$$

de manera que la Ec. (a) se convierte en

$$(700)(0.12) = (0.9)(5.669 \times 10^{-8})(T^4 - 298^4)$$

y

$$T = 312.5\ K = 39.5\ ^\circ C \quad [103\ ^\circ F]$$

Para la laca negra obtenemos

$$\alpha_{Sol} = 0.96 \qquad \alpha_{baja\ temp.} = 0.95$$

de manera que la Ec. (a) se vuelve

$$(700)(0.96) = (0.95)(5.669 \times 10^{-8})(T^4 - 298^4)$$

y

$$T = 377.8\ K = 104.8\ ^\circ C \quad [220.6\ ^\circ F]$$

De este ejemplo concluimos que desde el principio hubiéramos podido saber que las superficies blancas son más frescas que las negras bajo la luz solar.

Ejemplo 8-18: Un colector solar de placa plana

Un colector solar de placa plana se construye como se indica en la figura. Una placa de vidrio cubre la superficie ennegrecida la cual está aislada. La energía solar se transmite a través del vidrio a una rapidez de 750 W/m^2 y se absorbe en la superficie negra. La superficie se calienta e irradia hacia el vidrio y también pierde calor por convección a través de la zona de aire que tiene k_e/k = 1.4. La superficie exterior del vidrio pierde calor por radiación y convección hacia el medio ambiente a 30 °C con $h = 20$ $W/m^2 \cdot °C$. Se supone que el vidrio no transmite radiación térmica alguna y tiene ϵ = 0.9. Se supone que la superficie negra tiene ϵ = 1.0 para toda la radiación. Determine la temperatura del vidrio y de la superficie interior.

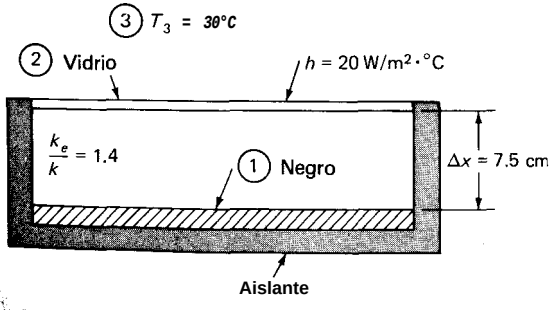


Figura Ejemplo 818

Solución

Este es un ejemplo interesante del análisis de transferencia de calor por radiación y convección combinadas. Designamos la placa negra como superficie 1, el vidrio como superficie 2 y los alrededores como superficie 3. Suponemos que no existe **absorción** de energía solar en el vidrio. Para la placa negra

$$J_1 = E_{b_1}$$

La convección y la energía solar que se envían a la superficie 1 son

$$\frac{q}{A}\bigg|_1 = \frac{k_e}{\Delta x}(T_2 - T_1) + \frac{q}{A}\bigg|_s \qquad (a)$$

Si aplicamos ahora la Ec. 8-115, tenemos

$$E_{b_1} - F_{12}J_{2i} = \frac{k_e}{\Delta x}(T_2 - T_1) + \frac{q}{A}_{1_s} \qquad (b)$$

en donde J_{2i} es la radiosidad interior para el vidrio. El balance global de energía para la superficie 2 es

$$\frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}(2E_{b_2} - J_{2i} - J_{2o}) = \frac{k_e}{\Delta x}(T_1 - T_2) + h(T_3 - T_2) \qquad (c)$$

en donde ahora, J_{2o} es la radiosidad exterior del vidrio.

Para el sistema completo, la energía solar absorbida deberá **perderse** eventualmente por convección y radiación por la superficie exterior del vidrio. Así,

$$\frac{q}{A}\bigg|_s = h(T_2 - T_3) + \epsilon_2(E_{b_2} - E_{b_3}) \qquad (d)$$

Finalmente, la radiación perdida por el exterior del vidrio se puede escribir de **dos maneras:**

$$\frac{q}{A}\bigg|_{\text{rad}} = \epsilon_2(E_{b_2} - E_{b_3}) = (E_{b_2} - J_{2o})\frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2} \qquad (e)$$

El área del colector es muy grande comparada con el espaciamiento, de manera que $F_{12} \approx 1.0$. Ahora tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: E_{b_1}, E_{b_2}, J_{2i} y J_{2o}. Por supuesto T_1 y T_2 se expresan en términos de E_{b_1} y E_{b_2}. El procedimiento para su solución es el siguiente:

1. Resuelva la Ec. (d) para E_{b_2} y T_2 por iteración.
2. Resuelva la Ec. (e) para J_{2o}.
3. Resuelva la Ec. *(b)* para J_{2i} y sustituya en la Ec. (c) lo que da (con $F_{12} = 1.0$)

$$\frac{\epsilon_2}{1-\epsilon_2}\left[2E_{b_2} - E_{b_1} - \frac{k_e}{\Delta x}(T_1 - T_2) + \frac{q}{A}\bigg|_1 - J_{2o}\right] = \frac{k_e}{\Delta x}(T_1 - T_2) + h(T_3 - T_2) \qquad (f)$$

4. Resuelva la Ec. (f) para T_1 y E_{b_1} por interación.

Cuando se sigue este procedimiento **con** $k = 0.03$ W/m·°C, **los resultados son**

$$E_{b_2} = 682.96 \text{ W/m}^2 \qquad T_2 = 331.3 \text{ K}$$
$$J_{2o} = 662.45 \text{ W/m}^2 \qquad J_{2i} = 760.94 \text{ W/m}^2$$

$$E_{b_1} = 1471.68 \text{ W/m}^2 \quad T_1 = 401.4 \text{ K } [262.5 \text{ °F}]$$

y vemos que podemos alcanzar una temperatura bastante importante en el interior del colector. Este resultado es para el caso en que hay aislante. En la práctica corriente la energía se extraerâ de la superficie caliente y se obtendrán temperaturas menores. dependiendo de la rapidez de eliminación de energía. En la Ref. 37 se proporciona una amplia información sobre colectores solares.

8-15 Propiedades de radiación del medio ambiente

Ya hemos descrito el espectro de radiación del Sol y observado que la mayor parte de la energía solar se encuentra concentrada en la región de longitudes de onda corta. También se observó que como consecuencia de este espectro, las superficies reales pueden presentar diferencias importantes entre las propiedades de absorción de radiación solar y las de radiaciones "confinadas a Tierra" de longitudes de onda larga.

Los meteorólogos y los hidrólogos utilizan el término *insolación* para describir la intensidad de la radiación que incide directamente sobre una superficie horizontal, por unidad de área y unidad de tiempo y se designa con el símbolo Z. Aunque haremos hincapié en otras unidades, es conveniente mencionar una unidad que aparece en la literatura metereológica:

$$1 \textit{ langley} \text{ (Ly)} = 1 \text{ cal/cm}^2 \quad [3.687 \text{ Btu/pie}^2]$$

Las intensidades de la insolación y radiación con frecuencia se expresan en langleys por unidad de tiempo; así, la constante de Stefan-Boltzmann sería

$$\sigma = 0.826 \times 10^{-10} \text{ Ly/min} \cdot \text{K}^4$$

La transferencia de calor por radiación en el medio ambiente está gobernada por las propiedades de absorción, dispersión y reflexión de la atmósfera y superficies naturales. En la atmósfera ocurren dos tipos de fenómenos de dispersión. Se observa una *dispersión molecular* debida a la interacción de la radiación con moléculas individuales. El color azul del cielo es resultado de la dispersión de las longitudes de onda (corta) violeta por las moléculas de aire. La *dispersión de partículas* en la atmósfera es el resultado de la interacción de la radiación con muchos tipos de partículas que se encuentran suspendidas en el aire. Polvo, smog y gotas de agua son todas tipos importantes de centros de dispersión de partículas. El proceso de dispersión está gobernado principalmente por el tamaño de la partícula en comparación con la longitud de onda de la radiación. La dispersión máxima ocurre cuando la longitud de onda y el tamaño de la partícula son iguales y disminuye progresivamente para longitudes de onda más largos. Para longitudes de onda menores que el tamaño de la partícula, la radiación tiende a reflejarse.

El fenómeno de reflexión en la atmósfera ocurre con menor frecuencia para las longitudes de onda menores que el tamaño de partícula, y en esta región son bastante independientes de la longitud de onda. El término *albedo* se usa para describir las propiedades reflejantes de las superficies y se define por

$$A = \text{albedo} = \frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} \tag{8-117}$$

En la Tabla 8-4 se dan los albedos de algunas superficies naturales. El efecto del ángulo de incidencia solar en el albedo del agua se muestra en la Fig. 8-64, en donde α es el ángulo que hacen los rayos incidentes con la horizontal.

La atmósfera absorbe radiación de manera bastante selectiva en bandas de longitud de onda estrechas. La absorción por radiación solar ocurre en bandas completamente diferentes a las de absorción de radiación desde la Tierra debido a la diferencia en espectros para los dos tipos de radiación. En la Fig. 8-65 vemos el espectro aproximado para la radiación solar y terráquea con algunas bandas de absorción importantes superpuestas en el diagrama. Observe el diferencial de la escala en las dos curvas. Una rápida inspección de las curvas muestra que la atmósfera transmite la mayor parte de la radiación de longitud de onda corta mientras que absorbe la mayor parte de la radiación que regresa de la Tierra. Por tanto, la atmósfera actúa de manera muy parecida a un invernadero, atrapando la radiación solar entrante para proporcionar energía y calor para los humanos en la Tierra. Se ha expresado cierta preocupación sobre la posibilidad de que el hombre perturbe el equilibrio de energía de la Tierra por medio de la contaminación excesiva de la atmósfera. Tal posibilidad existe pero se encuentra fuera del alcance de nuestro estudio.

La absorción y dispersión de radiación pueden describirse con la ley de Beer, Ec. 8-48 la cual repetiremos por comodidad

$$\frac{I_{\lambda x}}{I_{\lambda_o}} = e^{-a_\lambda x} \tag{8-118}$$

Tabla 8-4 Albedo de superficie naturales, de acuerdo con la Ref. 32

Superficie	*Albedo A*	*Superficie*	*Albedo A*
Agua	0.03-0.40	Trigo de primavera	0.10-0.25
Negro, suelo seco	0.14	Trigo de invierno	0.16-0.23
Negro. suelo húmedo	0.08	Centeno de invierno	0.18-0.23
Gris, suelo seco	0.25-0.30	Pasto alto y denso	0.18-0.20
Gris, suelo húmedo	0.10-0.12	Pasto verde	0.26
Azul, barro seco	0.23	Pasto secado al Sol	0.19
Azul, barro húmedo	0.16	Copas de roble	0.18
Desierto, barro del	0.29-0.31	Copas de pino	0.14
Amarillo, arena	0.35	Copas de abeto	0.10
Blanco, arena	0.34-0.40	Algodón	0.20-0.22
Río, arena de	0.43	Campo de arroz	0.12
Brillante, arena fina	0.37	Lechuga	0.22
Roca	0.12-0.15	Remolacha	0.18
Arenas densamente carbonizadas	0.15-0.25	Papas	0.19
Nieve	0.40-0.85	Brezo	0.10
Hielo de mar	0.36-0.50		

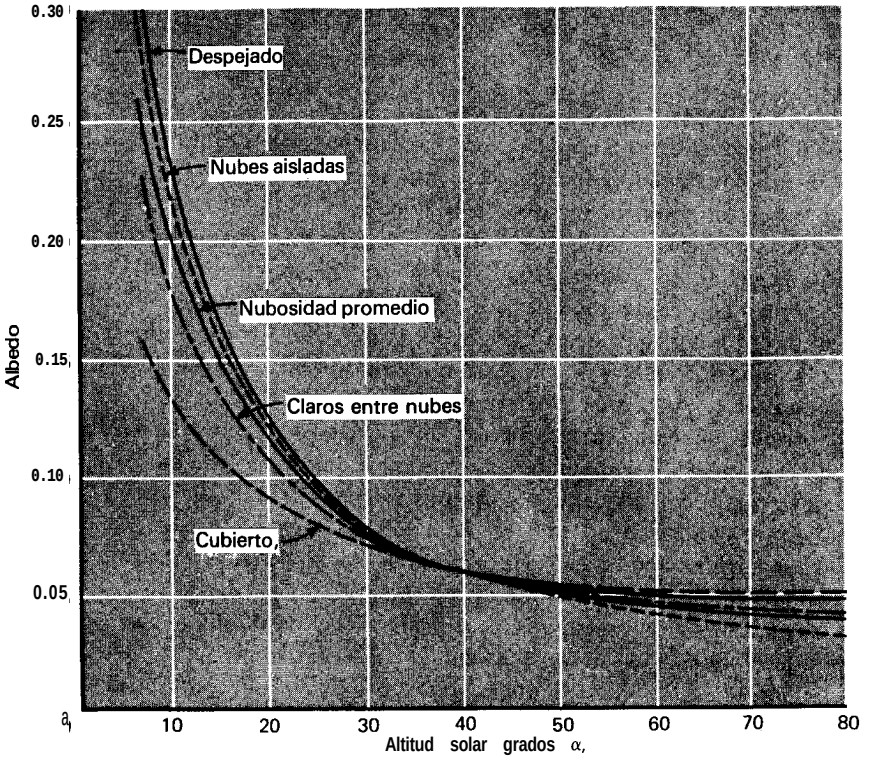


Fig. 8-64 Efecto del ángulo de altitud solar y nubes sobre el albedo para la superficie del agua fija, de acuerdo con la Ref. 33.

en donde a_λ es el coeficiente de absorción monocromática y x es el espesor de la capa que absorbe la radiación. Para el proceso de dispersión, reemplazaremos a_λ por el coeficiente de dispersión k_s.

El enfoque convencional en los problemas atmosféricos es suponer que los procesos de absorción y dispersión se superponen uno al otro y se pueden expresar en la forma de la Ec. 8-118 sobre todas las longitudes de onda. Los coeficientes adecuados se definen como

a_{ms} = coeficiente promedio de dispersión molecular sobre todas las longitudes de onda

a_{ps} = coeficiente promedio de dispersión de partícula sobre todas las longitudes de onda

a = coeficiente promedio de absorción sobre todas las longitudes de onda

$a_t = a_{ms} + a_{ps} + a$ = coeficiente de atenuación total sobre todas las longitudes de onda

Con estos coeficientes, la insolación por radiación sobre la superficie de la Tierra se expresa como

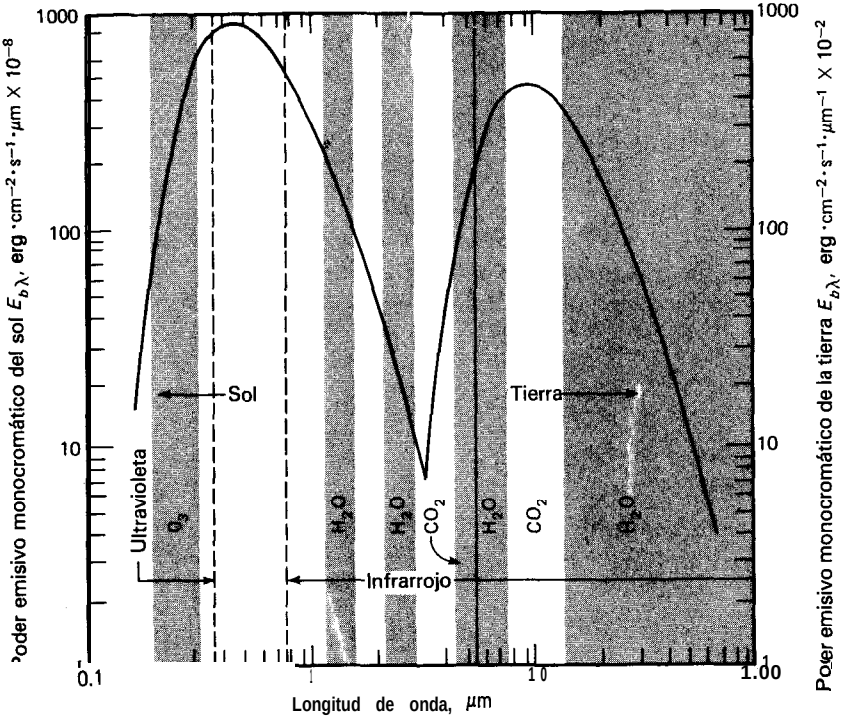


Fig. 8-65 Espectros de radiación térmica para el Sol y la Tierra con las bandas de absorción primaria indicadas por medio de las áreas sombreadas. Observe las diferentes escalas; 1 erg/cm²·s = 1 mW/m².

$$\frac{I_c}{I_o} = e^{-a_t m} = e^{-n a_{ms} m} \tag{8-119}$$

en donde m es el espesor relativo de la masa de aire y n se define como el *factor de turbiedad* del aire:

$$n = \frac{a_t}{a_{ms}} \tag{8-120}$$

Las insolaciones se definen como

I_c = insolación directa sobre la superficie de la Tierra con cielo sin nubes.
I_o = insolación en los límites exteriores de la atmósfera terrestre.

El coeficiente de dispersión molecular para el aire a presión atmosférica se da [32] como

$$a_{ms} = 0.128 - 0.054 \log m \tag{8-121}$$

El espesor relativo de la masa de aire se calcula como la cosecante de la altitud solar α. El factor de turbiedad es por consiguiente, un medio conveniente para la especificación de la pureza y claridad atmosféricas; su valor va de cerca de 2.0 para aire muy claro hasta 4 o 5 para medios industriales muy contaminados.

La insolación en el límite exterior de la atmosfera se expresa en términos de la constante solar E_{bo} por

$$I_o = E_{b_o} \operatorname{sen} \alpha \tag{8-122}$$

en donde α es de nuevo el ángulo que forman los rayos con la horizontal. Damos la constante solar como

$$\begin{aligned} E_{b_o} &= 442.4 \ \text{Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \\ &= 2.00 \ \text{cal/cm}^2 \cdot \text{min} \\ &= 1395 \ \text{W/m}^2 \end{aligned}$$

En la Tabla 8-5 se da una variación promedio de la radiación solar incidente para situaciones nubladas y sin nubes, en función del ángulo de altitud solar.

Ejemplo 8-19

Cierta atmósfera contaminada tiene un grado de turbiedad de 4.0. Calcule la insolación directa con cielo sin nubes para un ángulo de altitud solar de 75°. ¿En cuánto se reduce esta insolación para un cielo despejado)

Tabla 8-5 Irradiación solar (insolación) sobre una superficie horizontal bajo condiciones atmosféricas promedio, de acuerdo con la Ref. 33

Altitud solar, grados α	Insolación total promedio	
	Ly/h	W/m²
5	3.6	41.9
10	9.7	112.8
15	17.2	200.0
20	25.0	290.7
25	32.8	381.4
30	40.6	472.1
35	47.7	554.6
40	54.7	636.0
45	61.1	710.4
50	67.2	781.4
60	77.5	901.1
70	85.3	991.8
80	69.7	1043
90	91.4	1063

Solución

Usaremos la Ec. 8-l 19 para este cálculo, de manera que necesitaremos realizar los siguientes cálculos intermedios

$$I_o = E_{b_o} \operatorname{sen} \alpha = 1395 \operatorname{sen} 75^\circ = 1347 \text{ W/m}^2$$

$$m = \operatorname{cosec} 75^\circ = 1.035$$

$$a_{ms} = 0.128 - 0.054 \log m = 0.1272$$

Tenemos $n = 4.0$, de manera que de la Ec. 8-119

$$I_c = 1347 \exp [-(0.1272)(4.0)(1.035)]$$
$$= 795.5 \text{ W/m}^2$$

Para un día muy claro, $n = 2.0$ y tendremos

$$I_c = 1347 \exp [-(0.1272)(2.0)(1.035)]$$
$$= 1035 \text{ W/m}^2$$

Así la insolación se ha reducido en un 23% como resultado del medio contaminado.

La absorción de radiación en cuerpos naturales acuosos es un proceso importante debido a su influencia en las tasas de evaporación y la dispersión eventual del vapor de agua en la atmósfera. Mediciones experimentales [34] muestran que la radiación solar se absorbe rápidamente, en las capas superiores de agua, seguida por un decaimiento exponencial aproximado con el espesor de agua. La radiación incidente sigue una variación de

$$\frac{I_z}{I_s} = (1 - \beta)e^{-az} \tag{8-123}$$

en donde I_s es la intensidad en la superficie e I_z es la intensidad a una profundidad z; β representa la fracción de energía absorbida por la superficie y a es un coeficiente de absorción o extinción para el material. Beta se puede interpretar corno una rnedida del contenido de longitud de onda de radiación solar, ya que las longitudes de onda más cortas penetran en el agua con mayor rapidez. Este coeficiente parece tener un valor de 0.4 para todos los lagos de los que se tiene información y se supone que este valor es independiente del tiempo; Los valores del coeficiente de extinción pueden variar en forma considerable, por ejemplo, tiene el valor de 0.16 m^{-1} para las aguas extremadamente limpias del lago Tahoe [35] y un valor de 0.89 m^{-1} para las aguas más turbias del lago Castle, California [36].

Kondratyev [30] y Geiger [31] proporcionan información adicional sobre radiación en la atmósfera.

Ejemplo 8-20

Calcule la rapidez de generación de calor que resulta de una absorción de radiación solar en un lago con un coeficiente de extinción de 0.328 m^{-1} y una altitud solar de 90° en un día claro. Realice los cálculos para una profundidad de 1 pie [0.3048 m].

Solución

La rapidez de generación de calor se obtiene diferenciando la Ec. 8-123:

$$\dot{q} = \frac{q_{\text{absorbido}}}{A} = \frac{dI_z}{dz} = I_s a(1 - \beta)e^{-az}$$

La insolación de superficie I_s se calcula con la Ec. 8-119:

$$I_o = E_{b_o} \operatorname{sen} \alpha = 1395 \text{ W/m}^2$$

$$m = \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.0$$

$$a_{ms} = 0.128 - 0.054 \log m = 0.128$$

$$n = 2.0$$

$$I_c = I_s = 1395 \exp[-(0.128)(2.0)(1.0)]$$
$$= 1080 \text{ W/m}^2$$

También tenemos $a = 0.328$ y $\beta = 0.4$, de manera que

$$\dot{q} = (1080)(0.328)(1 - 0.4) \exp[-(0.328)(0.3048)]$$
$$= 192.3 \text{ W/m}^3$$

8-16 Efecto de la radiación sobre la medición de temperatura

Cuando se coloca un termómetro en un flujo de gas para medir su temperatura, ésta se indica por el elemento sensor y está determinada por el balance global de energía en el elemento. Considérese éste que se muestra en la Fig. 8-66. La temperatura del gas es T_∞, la radiación efectiva que rodea la temperatura es T_s y la temperatura indicada por el termómetro es T_t. Suponiendo que T_∞ es mayor que T_s, una transferencia de energía por convección hacia el termómetro y en seguida será disipada por radiación hacia los alrededores. Por consiguiente, el balance de energía se convierte en

$$hA(T_\infty - T_t) = \sigma A \epsilon (T_t^4 - T_s^4) \tag{8-124}$$

en donde A es el área de superficie del elemento y ϵ su emisividad. La Ec. 8-124 supone que los alrededores son ya sea muy amplios o bien negros, de manera que se puede aplicar la Ec. 8-43*a* para la transferencia de calor por radiación.

De este balance de energía podemos ver que la temperatura indicada por el termómetro no es la verdadera temperatura del gas, sino una de equilibrio entre convección y radiación. Si no se toma en cuenta de manera adecuada este balance de energía se tendrán errores muy grandes en las mediciones de temperatura. Para reducir esta dificultad, con frecuencia se utilizan protecciones contra la radiación.

Ejemplo 8-21

Un termómetro de mercurio en vidrio que tiene $\epsilon = 0.9$ cuelga en una estructura metálica e indica una temperatura de 20 °C. Las paredes del edificio se encuentran mal aisladas y su temperatura es de 5 °C. El valor de h para el termómetro se puede tomar como 8.3 W/m²·°C. Calcule la verdadera temperatura del aire.

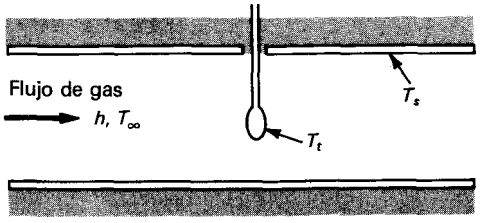


Fig. 8-66 Elemento de termómetro en una corriente.

Solución

Para la solución empleamos la Ec. 8-124

$$h(T_\infty - T_t) = \sigma\epsilon(T_t^4 - T_s^4)$$

Al insertar los valores numéricos, **con** $T_t = 20$ °C = 293 K, $T_s = 5$ °C = 278 K, obtenemos

$$(8.3)(T_\infty - 293) = (5.669 \times 10^{-8})(0.9)(293^4 - 278^4)$$

y

$$T_\infty = 301.6 \text{ K} = 28.6 \text{ °C} \quad [83.5 \text{ °F}]$$

En este ejemplo sencillo el termómetro **tiene un error de 8.6** °C [15.5 °F]!

8-17 El coeficiente de transferencia de calor por radiación

En los capítulos precedentes en el desarrollo de la transferencia de calor por convección, nos pareció conveniente definir el coeficiente de transferencia de calor por medio de

$$q_{conv} = h_{conv}A(T_w - T_\infty)$$

Como con frecuencia los problemas de transferencia de calor por radiación se encuentran estrechamente asociados con los problemas de convección y la transferencia de calor total, tanto por convección como por radiación es con frecuencia el objetivo del análisis, es conveniente dar a ambos procesos una base común definiendo el coeficiente de transferencia de calor por radiación h_r, como

$$q_{rad} = h_r A_1(T_1 - T_2)$$

en donde T_1 y T_2 son las temperaturas de los dos cuerpos que intercambian calor por radiación. La transferencia de calor total es entonces la suma de la convección y la radiación,

$$q = (h_c + h_r)A_1(T_w - T_\infty) \tag{8-125}$$

si suponemos que la segunda superficie que intercambia radiación es un recinto y que se encuentra a la misma temperatura que el fluido. Por ejemplo, el calor perdido por convección y radiación libre a partir de una tubería que pasa a través de una habitación se puede calcular de la Ec. 8-125.

En muchas ocasiones el coeficiente de transferencia de calor por convección no depende realmente de la temperatura. Sin embargo, con el coeficiente de transferencia de calor por radiación no ocurre esto. El valor de h_r que corresponde a la Ec. 8-43, podría calcularse de

$$\frac{q}{A_1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\epsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\epsilon_2 - 1)} = h_r(T_1 \quad T_2)$$

$$h_r = \frac{\sigma(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{1/\epsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\epsilon_2 - 1)} \qquad \textbf{(8-126)}$$

Es obvio que, el coeficiente de radiación depende estrechamente de la temperatura.

Preguntas de repaso

1. ¿Cómo define la radiación térmica de otros tipos de radiación electromagnética?
2. ¿Qué es la ley de Stefan-Boltzmann?
3. Haga la distinción entre superficies especular y difusa.
4. Defina intensidad de radiación.
5. ¿Qué es la identidad de Kirchhoff? ¿Cuándo se aplica?
6. ¿Qué es un cuerpo gris?
7. ¿Qué significa el factor de forma de radiación?
8. Defina irradiación y radiosidad.
9. ¿Qué es la ley de Beer?
10. ¿Por qué las superficies absorben en forma diferente la radiación solar y la proveniente de la Tierra?
11. Explique el efecto de invernadero.
12. ¿Por qué-el cielo es azul?
13. Defina albedo.
14. ¿Qué significa el efecto atmosférico de invernadero?
15. ¿Qué significa el factor de turbiedad?

Problemas

El Encuentre los factores de forma para radiación $F_{1\text{-}2}$ para las situaciones mostradas

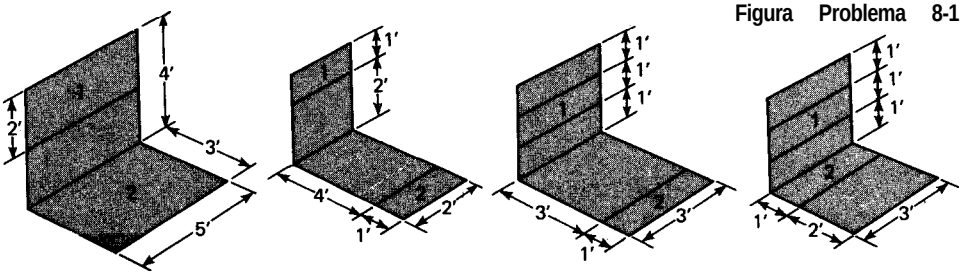


Figura Problema 8-1

8-2 El cuarzo fundido transmite 90% de la radiación térmica incidente entre 0.2 y 4 μm. Suponga que cierta fuente de calor se mira a través de una ventana de cuarzo. ¿Qué flujo de calor en watts se transmitirá a través del material a partir de las fuentes de radiación de cuerpo negro a *a*) 800 °C, *b*) 550 °C, *c*) 250 °C y *d*) 70 °C?

8-3 Repita el Prob. 8-2 para zafiro sintético, el cual tiene una transmisividad de 0.85 entre 0.2 y 5.5 μm.

g-4 Repita el Prob. 8-2 para yoduro de cesio, el cual tiene una transmisividad aproximada de 0.92 entre 0.3 y 52 pm.

g-5 Una placa de SO X 30 cm con una emisividad de 0.5 se adhiere al costado de una nave espacial que está perfectamente aislada de su interior. Suponiendo que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K, determine la temperatura de equilibrio para la placa en un punto del espacio en el que el flujo de calor radiante del Sol es 1500 W/m^2. Suponga el comportamiento de cuerpo gris.

g-6 Se maquina un agujero cónico en un bloque de metal cuya emisividad es 0.5. El hoyo tiene 2.5 cm de diámetro en la superficie y 5 cm de profundidad. Si el bloque metálico se calienta a 550 °C, calcule la radiación emitida por el agujero. Calcule el valor de una emisividad aparente del agujero, definida como la proporción de la energía real emitida por él a la de la energía que sería emitida por una superficie negra con área igual a la de la abertura y a una temperatura igual a la de las superficies internas.

8-7 Se taladra un hoyo de 2.5 cm de diámetro en una placa metálica de 7.5 cm, la cual se mantiene a 260 °C. El hoyo está forrado con una hoja delgada que tiene una emisividad de 0.07. Sobre el hoyo, en un lado de la placa, se coloca una superficie caliente a 425 °C, la cual tiene una emisividad de 0.5, y el hoyo se deja abierto en el otro lado de la placa. La superficie a 425 °C está aislada de la placa en lo que respecta a la conducción. Calcule la energía emitida por el hoyo abierto.

8-8 Se taladra un hoyo cilíndrico de profundidad x y diámetro d en un bloque de metal que tiene una emisividad de ϵ. Usando la definición que se da en Prob. 8-6, bosqueje la emisividad aparente del hoyo en función de x/d y ϵ.

8-9 Se hace un agujero cilíndrico de diámetro d en una placa metálica de espesor x. Suponiendo que la radiación emitida a través del agujero a ambos lados de la placa se debe solamente a la temperatura de la placa, trace la emisividad aparente del agujero en función de x/d y la emisividad ϵ del material de la placa.

8-10 Un satélite artificial de 1 m de diámetro gira alrededor de la Tierra a una altitud de 400 km. Suponiendo que el diámetro de la Tierra es 12.9 Mm y la superficie externa del satélite es de aluminio pulido, calcule la temperatura de equilibrio radiante del satélite cuando está en el lado "oscuro" de la Tierra. Considere a ésta como un cuerpo negro a 15 °C y el espacio exterior como un cuerpo negro a 0 K. El factor de forma geométrica del satélite a la Tierra puede tomarse como la proporción del ángulo solido subtendido por la Tierra al ángulo sólido total para radiación a partir del satélite. Cuando el satélite está en el lado "iluminado" de la Tierra, está irradiado con un flujo calorífico aproximado de 1400 W/m^2 del Sol. Calcule de nuevo la temperatura de equilibrio del satélite bajo estas condiciones, suponiendo un comportamiento de cuerpo gris. Suponga que el satélite recibe radiación del Sol como un disco y radia al espacio como una esfera.

8-11 Un calentador de barra larga con $\epsilon = 0.8$ se mantiene a 980 °C y se coloca cerca de un reflector semicilíndrico como se muestra. El diámetro de la barra es 7.5 cm y el del reflector es 50 cm. El reflector está aislado y la combinación de calentador y reflector se coloca en una habita-

ción grande cuyas paredes se mantienen a 15 °C. Calcule la pérdida de calor por radiación por longitud unitaria de barra de calentador. ¿Cómo se compara esto con la energía que sería radiada por la barra si se usara sin el reflector?

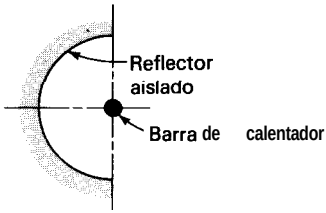


Figura Problema 8-11

8-12 Una barra de calentador sobresale de una nave espacial. La barra pierde calor hacia el espacio exterior por radiación. Suponiendo que la emisividad de la barra es ϵ y que no se refleja nada de la radiación emitida por la barra, establezca la ecuación diferencial para la distribución de temperatura en la barra. Establezca también las condiciones de frontera que debe satisfacer la ecuación diferencial. La longitud de la barra es L, su área de sección transversal es A, su perímetro P y su temperatura en la base es T_o. Suponga que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K.

8-13 Una habitación de 3 por 3 por 3 m tiene una pared lateral que se mantiene a 260 °C; el piso se mantiene a 90 °C. Las otras cuatro superficies están perfectamente aisladas. Suponga que todas las superficies son negras. Calcule la transferencia de calor neta entre la pared caliente y el piso frío.

8-14 Una habitación cuadrada de 3 por 3 m tiene el piso caliente a 25 °C, el techo a 13 °C y se supone que las paredes están perfectamente aisladas. La altura de la habitación es 2.5 m. La emisividad de todas las superficies es 0.8. Usando el método de red, encuentre el intercambio neto entre el piso y el techo y la temperatura de la pared.

8-15 Se desea transmitir energía de una nave espacial a otra y se dispone en cada nave de una placa cuadrada de 1.5 m para llevarlo a cabo. Las naves se guían para que las placas sean paralelas y a 30 cm de distancia. Una placa se mantiene a 800 °C y la otra 280 °C. Las emisividades son 0.5 y 0.8, respectivamente. Encuentre *a)* el calor neto transferido entre las naves en watts y *b)* la pérdida de calor total de la placa caliente en watts. Suponga que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K.

8-16 Dos planos paralelos perfectamente negros de 1.2 por 1.2 m están separados por una distancia de 1.2 m. Un plano se mantiene a 550 °C y el otro a 250 °C. Los planos se encuentran en una habitación grande cuyas paredes están a 20 °C. ¿Cuál es la transferencia de calor neta entre los planos?

8-17 Dos planos paralelos de 90 por 60 cm están separados por una distancia de 60 cm. Uno de los planos se mantiene a 550 °C y tiene una emisividad de 0.6. El otro plano está aislado. Los planos se encuentran en una habitación grande que se mantiene a 10 °C. Calcule la temperatura del plano aislado y la energía perdida por el plano caliente.

8-18 Tres placas paralelas infinitas se arreglan como se muestra. La placa 1 está a 1200 K y la placa 3 se mantiene a 60 K; $\epsilon_1 = 0.2$, $\epsilon_2 = 0.5$ y $\epsilon_3 = 0.8$. La placa 2 no recibe calor de fuentes externas. ¿Cuál es la temperatura de la placa 2?

8-19 Dos Planos paralelos grandes con emisividades de 0.3 y 0.5 se mantienen a temperaturas de 800 Y 370 °C, respectivamente. Entre los dos planos se coloca una protección contra la radiación

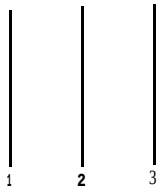


Figura Problema 8-18

que tiene una emisividad de 0.05 en ambos lados. Calcule *a)* la rapidez de transferencia de calor por unidad de área si no estuviera presente la protección, *b)* la rapidez de transferencia de calor por unidad de área con la protección presente y c) la temperatura de la protección.

8-20 Dos planos paralelos de 1.2 por 1.2 m están separados por una distancia de 1.2 m. Las emisividades de los planos son 0.4 y 0.6 y sus temperaturas son 760 y 300 °C, respectivamente. Una protección contra la radiación de 1.2 por 1.2 m con una emisividad de 0.05 en ambos lados se coloca equidistantemente entre los dos planos. El arreglo combinado está puesto un cuarto grande que se mantiene a 40 °C. Calcule *a)* la rapidez de transferencia de calor de cada uno de los dos planos sin la protección presente, *b)* la rapidez de transferencia de calor de cada uno de los dos planos con la protección presente y c) la temperatura de la protección.

g-21 Una placa vertical de 60 cm de alto y 30 cm de ancho se mantiene a una temperatura de 95 °C en una habitación en la que el aire está a 20 °C y 1 atm. Las paredes de la habitación también están a 20 °C. Suponga que $\epsilon \simeq 0.8$ para la placa. ¿Cuánto calor radiante se pierde en la placa?

8-22 Un tubo horizontal de 6 m de largo y 12.5 cm de diámetro se mantiene a una temperatura de 150 °C en una habitación amplia en la que el aire está a 20 °C y 1 atm. Las paredes de la habitación están a 38 °C. Suponga que $\epsilon = 0.7$ para el tubo. ¿Cuánto calor se pierde por el tubo tanto por conducción como radiación?

8-23 Se coloca un termopar en un conducto caliente grande para medir la temperatura del gas que fluye por él. Las paredes del conducto están a 425 °C y el termopar indica una temperatura de 170 °C. El coeficiente de transferencia de calor del gas al termopar es 150 $W/m^{2\cdot}{}^{\circ}C$. La emisividad del material del termopar es 0.43. ¿Cuál es la temperatura del gas?

8-24 Un tubo largo de 5 cm de diámetro pasa a través de un cuarto y se expone al aire a presión atmosférica y una temperatura de 20 °C. La temperatura de superficie del tubo es 93 °C. Suponiendo que la emisividad del tubo es 0.6, calcule la pérdida de calor por radiación por pie de longitud de tubo.

8-25 Un espacio anular se llena con un gas cuyas emisividad y transmisividad son 0.3 y 0.7, respectivamente. Los diámetros interno y externo del espacio anular son 30 y 60 cm y las emisividades de las superficies son 0.5 y 0.3, respectivamente. La superficie interna se mantiene a 760 °C, mientras que la externa se mantiene a 370 °C. Calcule la transferencia de calor neta por unidad de longitud, de la superficie caliente a la superficie fría. ¿Cuál es la temperatura del gas? Desprecie la transferencia de calor por convección.

8-26 Para las condiciones del Prob. 8-25, bosqueje la transferencia de calor neta por unidad de longitud del espacio anular en función de la emisividad del gas, suponiendo que $\epsilon_m + \tau_m = 1$.

8-27 Repita el Prob. 8-25 para dos planos paralelos infinitos con las mismas temperaturas y emisividades. Calcule las rapideces de transferencia de calor por unidad de área de planos paralelos.

8-28 El gas del Prob. 8-25 se fuerza a través del espacio anular a una velocidad de 6.0 m/s y se mantiene a una temperatura de 1100 °C. Las propiedades del gas son

$$p = 1.6 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1.67 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$
$$\mu = 5.4 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \qquad k = 0.11 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

Suponiendo las mismas temperaturas y emisividades de las superficies como en el Prob. 8-25, estime el calentamiento 0 enfriamiento que se requiere para que las superficies interna y externa se mantengan a esas temperaturas. Suponga que el coeficiente de transferencia de calor puede estimarse con la Ec. 6-4 de Dittus-Boelter.

8-29 Suponga que una placa plana se expone a un ambiente de alta velocidad. Definimos la temperatura de equilibrio radiativo de la placa como la temperatura que ésta alcanzaría si estuviese aislada, de tal modo que la energía recibida por calentamiento aerodinámico es exactamente igual al calor perdido por radiación hacia los alrededores, es decir,

$$hA(T_w - T_{aw}) = -\sigma A \epsilon (T_w^4 - T_s^4)$$

donde los alrededores se suponen infinitos y a la temperatura T_s ye es la emisividad de la superficie de la placa. Suponiendo una emisividad de 0.8 para la superficie, calcule la temperatura de equilibrio radiativo para las condiciones de flujo del Ej. 5-9. Suponga que la temperatura efectiva de radiación para los alrededores es -40 °C.

8-30 En una noche despejada la temperatura efectiva de radiación del cielo puede considerarse como − 70 °C. Suponiendo que no hay viento y que el coeficiente de transferencia de calor por convección del aire hacia el rocío que se ha depositado en el césped es de 28 $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, evalúe la temperatura mínima que debe tener el aire para evitar la formación de escarcha. Desprecie la evaporación del rocío y suponga que el césped está aislado del piso por lo que concierne a la conducción. Tome la emisividad unitaria para el agua.

8-31 Una manera de construir una cavidad de hoyo negro es perforar un hoyo en una placa de metal. Debido a las reflexiones múltiples en el interior del hoyo, las paredes interiores parecen tener una emisividad superior a la que tendría una superficie plana en el espacio libre. Un análisis riguroso de la cavidad debe tomar en cuenta el hecho que la irradiación no es uniforme sobre toda la superficie interior. Así, la localización específica a la que observa un dispositivo medidor de flujo radiante en esta superficie, debe conocerse para decir qué tan "negra" puede ser la superficie. Considere un hoyo de 1.25 cm de diámetro y 2.5 cm de profundidad. Divida la superficie interna en tres secciones, tal como se muestra. Suponga, como una aproximación, que la irradiación es uniforme sobre cada una de las tres superficies y que la temperatura y la emisividad son uniformes en el interior de la cavidad entera. Un radiómetro detectará la energía total que sale de la superficie (radiosidad). Calcule la proporción J/E_b para cada una de las tres superficies, suponiendo que $\epsilon = 0.6$ y que no hay radiación apreciable de los alrededores exteriores.

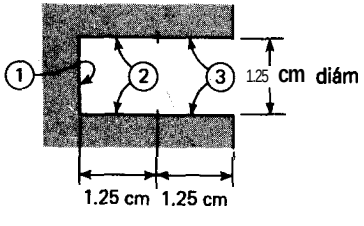


Figura Problema g-31

8-32 Repita el Prob. 8-31, suponiendo una temperatura en la cavidad de 120 °C y una temperatura ambiente de 93 °C.

8-33 Para medir la temperatura del aire en el interior de un horno, se inserta horizontalmente un termopar envuelto en una funda de acero inoxidable de 3.2 mm ($\epsilon = 0.6$). Las paredes del horno están a 650 °C y la temperatura verdadera del aire es de 560 °C. ¿Qué temperatura indicará el termopar? Suponga convección libre del termopar.

8-34 El termopar del Prob. **8-33** se coloca horizontalmente en una habitación con aire acondicionado. Las paredes de la habitación están a 32 °C y la temperatura del aire en ella es de 20 °C. ¿Qué temperatura indicará el termopar? ¿Cuál sería el efecto en *la* lectura *si* el termopar estuviera envuelto por una protección contra la radiación de aluminio pulido?

8-35 Dos discos paralelos de 10 cm de diámetro están separados por una distancia de 2.5 cm. Uno de los discos se mantiene a 540 °C, es reflector difuso por completo y tiene una emisividad de 0.3. El otro disco se mantiene a 260 °C pero es un reflector especular difuso tal que $\rho_D = 0.2$, $\rho_s = 0.4$. Los alrededores se mantienen a 20 °C. Calcule la pérdida de calor de la superficie intema de cada disco.

g-36 A dos placas infinitas paralelas se les mantiene a 800 y 35 °C, con emisividades de 0.5 y 0.8, respectivamente, Para reducir la rapidez de transferencia de calor se coloca una protección contra la radiación entre las dos placas. Ambas caras de la protección son reflejantes especulares difusas, y tienen $\rho_D = 0.4$, $\rho_s = 0.4$, Calcule la rapidez de transferencia de calor con y sin la protección. Compare los resultados con el que se obtiene cuando la placa es completamente reflejante y difusa con $\rho = 0.8$.

8-37 Repita el Prob. 8-17 suponiendo que el plano A 550 °C refleja solamente de una manera especular. El plano aislado es difuso.

g-38 Dibuje la red de radiación para una superficie especular difusa que pierde calor hacia un recinto amplio. Obtenga una expresión para la transferencia de calor bajo estas circunstancias. ¿Cómo se puede comparar esta transferencia de calor con la que se obtendría con una superficie difusa con la misma emisividad?

g-39 Se coloca una placa de 30 X 60 cm con $\epsilon = 0.6$ en una habitación amplia y se le calienta a 370 °C. Sólo una de las caras de la placa intercambia calor con la habitación. Una placa muy reflejante ($\rho_s = 0.7$, $\rho_D = 0.1$), del mismo tamaño que la anterior se coloca perpendicular a la placa caliente de manera que los lados de 60 cm se encuentran en contacto. Ambos lados de la placa reflejante pueden intercambiar calor con la habitación. La temperatura de ésta es de 90 °C. Calcule la energía perdida por la placa caliente con y sin la placa reflejante. ¿Cuál es la temperatura de la placa reflejante? Ignore la convección.

8-40 Se construye una cavidad de 5 X 5 por 2.5 cm en acero inoxidable ($\epsilon = 0.6$) y se calienta a 260 "C. Sobre la parte superior se coloca una ventana de vidrio esmerilado especial ($\rho_s = 0.1$, $\rho_D = 0.1$, $\tau_D = 0.3$, $\tau_s = 0.3$, $\epsilon = 0.2$) de 5 por 5 cm. Calcule el calor perdido hacia una habitación muy amplia a 20 °C y compare con la energía que se perdería hacia la habitación si se quitara la ventana de vidrio.

g-41 Repita el Prob. 8-40 para el caso de una ventana que es completamente reflejante difusa y transmisora especular, es decir, $\rho_D = 0.2$, $\tau_s = 0.6$, $\epsilon = 0.2$.

8-42 La cavidad del Prob. 8-40 tiene encima una ventana de cuarzo fundido y se supone que la cavidad se encuentra completamente aislada en relación a la pérdida por convección y conducción hacia el medio que la rodea. Se expone la cavidad a un flujo de irradiación solar de 900 W/m^2. Suponiendo que el cuarzo no es reflejante y $\tau = 0.9$, calcule la temperatura de equilibrio en el interior de la cavidad. Recuerde que el intervalo de transmisión para el cuarzo es de 0.2 a 4 μm. Ignore la pérdida por convección por la ventana. Suponga que los alrededores se encuentran a 20 °C.

8-43 Aplique las Ecs. 8-105 y S-107 al problema descrito por la Ec. 8-43. Aplique directamente las ecuaciones a fin de obtener la Ec. 8-43*a* para un objeto convexo completamente cubierto por una superficie cóncava muy grande.

8-44 Repita el Ej. 8-3 utilizando el planteamiento de las Ecs. 8-112 y 8-115.

8-45 Repita el Prob. 8-14 utilizando el planteamiento de las Ecs. 8-112 y 8-115. Recuerde que $J = E_b$ para la superficie aislada.

8-46 Repita el Prob. 8-5 para una placa de aluminio pulido que tiene las características de radiación que se dan en la Tabla 8-3.

8-47 Una losa de mármol blanco está expuesta a un flujo de radiación solar de 1070 W/m^2. Suponiendo que la temperatura de radiación efectiva del cielo es -70 °C, calcule la temperatura de equilibrio de radiación de la losa, utilizando las propiedades que se dan en la Tabla 8-3. Para este cálculo ignore cualquier pérdida por conducción y convección.

g-48 La placa del Ej. 5-4 es un cuadrado de 30 por 30 cm y se ha rociado con una pintura blanca que tiene una absorbencia solar de 0.16 y una absorbencia a temperatura baja de 0.09. La placa se expone a un flujo de radiación solar de 1100 W/m^2 y se le permite alcanzar el equilibrio con los alrededores por convección. Suponiendo que la parte inferior de la placa está aislada, calcule su temperatura de equilibrio.

6-49 Calcule la energía emitida entre 4 y 15 μm, por un cuerpo gris a 100 °F con $\epsilon = 0.6$.

8-50 Se diseña un horno con un calefactor radiante para secar pintura sobre partes metálicas, sobre una banda transportadora en movimiento, tal como se ve en el dibujo. La longitud de la sección de calentamiento es de 3 m y la temperatura de calefactor es de 425 °C. Las paredes de los lados se encuentran aisladas y en forma experimental se ha determinado que la banda transportadora y las partes metálicas alcanzan una temperatura de 120 °C. El conjunto banda y partes tiene una emisividad efectiva de 0.8 y la superficie radiante del calefactor tiene $\epsilon = 0.7$. Calcule la energla que se suministra al calefactor. Asegúrese de considerar la radiación que se pierde por las terminales del pasaje. Tome los alrededores como un cuerpo negro a 25 °C.

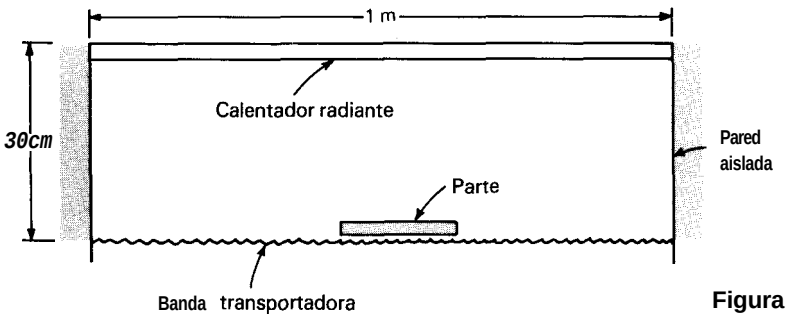


Figura Problema 8-50

8-51 Un horno cúbico tiene paredes interiores negras y mide 70 cm por lado. El gas en el interior del horno tiene 15% de CO_2 en volumen y 85% N_2, y se encuentra a 1 atm de presión total. La temperatura del gas es 1600 K y las paredes del horno deben mantenerse a 250 °C por medio de un proceso de enfriamiento adecuado. ¿Qué tanto enfriamiento se requiere?

8-52 Dos placas paralelas se encuentran a 50 cm de distancia entre sí y se les mantiene a temperaturas de 250 y 600 °C. Entre los planos hay una mezcla de gas con 15% de CO_2, 20% de vapor

de agua y 65% de N_2 en volumen y una presión total de 2.5 atm. La temperatura del gas es de 1400 K. Calcule el intercambio de calor con cada placa por área de superficie unitaria. ¿Cuál será la transferencia de calor si no hubiera gas?

g-53 Un horno cilíndrico tiene una altura y diámetro de 80 cm y una emisividad de superficie de 0.85. El gas en el interior del horno está compuesto de 10% de CO_2 20% de vapor de agua y 70% de N_2 en volumen y se encuentra a 1500 K de temperatura. La presión es 1 atm. Calcule el enfriamiento requerido para mantener las paredes del horno a 350 °C.

8-54 Una mezcla de gases a 3 atm y 1600 K contiene 17% de CO_2, 22% de vapor de aguay 61% de N_2 en volumen y se encuentra encerrada entre dos planos negros a 100 y 500 °C. La distancia de separación entre los planos es de 90 cm. Calcule el intercambio de calor radiante con cada una de las placas. ¿Cuál sería el intercambio de calor si no hubiera gas presente?

8-55 Dos franjas infinitas de 30 cm de ancho, están separadas por 10 cm de distancia. Las franjas tienen una emisividad de superficie de 0.25 y 0.5 y sus temperaturas respectivas son constantes a 200 y 1000 °C. El amplio medio que las encierra por completo se encuentra a 0 °C. Utilizando el método numérico, divida cada franja en tres segmentos iguales y calcule la transferencia de calor neta de cada franja. ¿Cuál sería la transferencia de calor de cada franja si se supusiera para cada una de ellas una radiosidad uniforme? Suponga un comportamiento de cuerpo gris.

8-56 Repita el Prob. 8-55, utilizando una franja a 1000 °C con $\epsilon = 0.6$ y la otra franja perfectamente aislada (balance radiante) con $\epsilon = 0.25$.

g-57 Dos placas rectangulares de 10 por 30 cm se encuentran a 10 cm de distancia entre sí y están conectadas por cuatro paredes aisladas y que radian de nuevo. Las temperaturas son uniformes a 1000 y 300 °C, y sus emisividades son 0.6 y 0.4, respectivamente. Utilizando el método numérico, determine la transferencia de calor neta suponiendo que *a)* las cuatro superficies radiantes actúan como una sola superficie y tienen una radiosidad uniforme y *b)* las cuatro superficies radiantes tienen radiosidades determinadas por el balance radiante con todas las demás superficies. Suponga que las superficies a 1000 y 300 °C tienen radiosidad uniforme. Calcule también las temperaturas para las superficies que radian de nuevo para cada uno de los casos mencionados.

8-58 Un termopar metálico horizontal de 3 mm de diámetro y 0.6 de emisividad se introduce en un conducto a fin de medir la temperatura de una corriente de aire que fluye a 7 m/s. Las paredes del conducto se encuentran a 400 °C y el termopar indica una temperatura de 100 °C. Utilizando las relaciones de convección del Cap. 6, calcule la temperatura verdadera del gas.

g-59 Dos placas verticales de 30 por 30 cm se encuentran a 10 cm de distancia entre sí y están colocadas en el aire de una habitación a 20 °C. A una placa se le mantiene a 150 °C mientras que a la otra placa alcanza una temperatura de acuerdo con su intercambio de energía por radiación y convección con la placa a 150 °C y los alrededores. Ambas placas tienen $\epsilon = 0.8$. Utilizando las relaciones aproximadas de convección libre del Cap. 7, calcule la temperatura de la otra placa.

g-60 Un horno con paredes interiores negras que se mantienen a 1100 °C tiene una abertura en un lado cubierta con una ventana de vidrio con las siguientes propiedades:

$$0 < \lambda < 3\ \mu\text{m}: \quad \tau = 0.8 \quad \epsilon = 0.2 \quad \rho = 0$$

$$3\ \mu\text{m} < \lambda < \infty: \quad \tau = 0 \quad \epsilon = 0.8 \quad \rho = 0.2$$

Suponga un comportamiento difuso y calcule la radiación perdida a través de la ventanilla hacia una habitación amplia a 25 °C.

8-61 Un captador solar consiste en una superficie negra aislada cubierta por una placa de vidrio que tiene las propiedades siguientes:

$$0 < \lambda < 2.5\ \mu m: \quad \tau = 0.9 \quad \epsilon = 0.1 \quad \rho = 0$$
$$2.5\ \mu m < \lambda < \infty: \quad \tau = 0 \quad \epsilon = 0.95 \quad \rho = 0.05$$

Suponga que el flujo radiante del Sol es $700\ W/m^2$ y se encuentra completamente por debajo de 2.5 μm. Calcule la temperatura de equilibrio radiante de la superficie negra, despreciando la convección, con un medio que lo rodea a 35 °C.

8-62 Dos discos paralelos de 60 cm de diámetro están a 15 cm de distancia entre sí y completamente rodeados por un recinto amplio a 30 °C. Las propiedades de las superficies son $T_1 = 540$ °C $\epsilon_1 = 0.7$, $T_2 = 300$ °C, $\epsilon_2 = 0.5$ ¿cuál es la transferencia neta de calor radiante con cada superficie? (No incluya el intercambio de la pared negra, sólo aquellas superficies que se miran entre sí.)

8-63 Vuelva a hacer el Prob. 8-62 para el caso en el que el disco 2 (300 °C, $\epsilon_2 = 0.5$) es completamente reflejante especular.

8-64 Una cavidad circular de 5 cm de diámetro y 1.4 cm de profundidad está hecha en un material que tiene una emisividad de 0.8. La cavidad se mantiene a 200 °C, y la abertura está cubierta por un material transparente que tiene $\tau = 0.7$, $\epsilon = 0.3$, $\rho = 0$. La superficie exterior del material transparente presenta un coeficiente de transferencia de calor por convección de 17 $W/m^2 \cdot °C$. La habitación y el aire ambientales se encuentran a 20 °C. Calcule el calor neto perdido por la cavidad y la temperatura del material transparente.

8-65 Un calentador cilíndrico largo, de 2.5 cm de diámetro se mantiene a 650 °C y tiene una emisividad de superficie de 0.8. El calentador está colocado en una habitación cuyas paredes se encuentran a 25 °C. ¿En cuánto se reducirá la transferencia de calor radiante si éste se encuentra rodeado por una protección contra la radiación hecha de aluminio, el cual tiene una emisividad de 0.21 ¿Cuál es la temperatura del protector?

8-66 La superficie superior del cono truncado del Ej. 8-4 tiene $T_1 = 1200$ K y $\epsilon_1 = 0.75$. La superficie lateral está aislada y tiene $\epsilon = 0.3$. El fondo se encuentra abierto y expuesto a una habitación amplia a 20 °C. Calcule la temperatura de la superficie lateral y el calor perdido hacia la habitación.

8-67 Dos cilindros concéntricos tienen una longitud de 30 cm. El cilindro interior tiene 8.0 cm de diámetro. ¿Cuál deberá ser el diámetro del cilindro exterior de manera que $F_{12} = 0.8$ en el caso en que el cilindro interior se considera como la superficie 1?

8-68 Dos discos concéntricos paralelos tienen $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 5$ cm y se encuentran a 10 cm de distancia entre sí. Determine F_{12} y F_{21}.

8-69 Suponga que el cilindro exterior del Ej. 8-8 pierde calor por convección hacia la habitación con $h = 50\ W/m^2 \cdot °C$ en su superficie exterior. Ignorando la convección en las otras superficies determine la temperatura del cilindro exterior y el calor total perdido por el cilindro interior.

8-70 Dos cilindros largos tienen $T_1 = 900$ K, $\epsilon_1 = 0.4$, $d_1 = 5$ cm y $T_2 = 400$ K, $\epsilon_2 = 0.6$ y $d_2 = 10$ cm. Están separados por un gas gris que tiene $\epsilon_g = 0.15$, $\tau_g = 0.85$. Calcule la rapidez de transferencia de calor entre los dos cilindros y la temperatura del gas, utilizando un enfoque de red de radiación.

8-71 Dos discos paralelos de 30 cm de diámetro están separados por 5 cm de distancia y se encuentran en una habitación amplia a 20 °C. Uno de los discos contiene un calefactor eléctrico que produce un flujo de calor constante de 100 kW/m^2 y $\epsilon = 0.9$ sobre la superficie que mira el otro disco. La otra superficie está aislada. El otro disco tiene $\epsilon = 0.5$ en ambas caras y está en balance radiante con el otro disco y la habitación. Calcule las temperaturas de ambos discos.

8-72 Verifique los resultados del Ej. 8-16 para $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.6$ y $h = 25$ $W/m^2 \cdot °C$.

8-73 Una superficie grande tiene $\alpha = 0.6$ para una radiación de longitud de onda larga y $\alpha = 0.95$ para radiación solar. Calcule la ternperatura de equilibrio de radiación de la superficie cuando su superficie inferior está aislada y la superior expuesta a un flujo de radiación solar a 950 W/m^2 y un medio a 300 K con $h = 12$ $W/m^2 \cdot °C$.

8-74 Una tubería larga tiene la forma del triángulo equilátero que se muestra en la figura. Las condiciones de superficie son T_1 = 1100 K, $\epsilon_1 = 0.6$, T_2 = 2100 K, $\epsilon_2 = 0.8$, $(q/A)_3 = 1000$ W/m^2, $\epsilon_3 = 0.7$. Calcule los flujos de calor para las superficies 1 y 2 y la temperatura de la superficie 3.

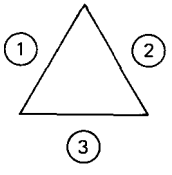


Figura Problema 8-74

8-75 La superficie inferior de un horno cilíndrico tiene un elemento eléctrico de calentamiento que produce un flujo de calor constante de 7 kW/m^2 sobre un diárnetro de 75 cm. Las paredes laterales tienen 50 cm de altura y se pueden considerar como no conductoras y que radian de nuevo. El fonde tiene $\epsilon = 0.8$. Sobre la parte superior se coloca una superficie con $\epsilon = 0.6$ y a la cual se le mantiene a 400 K. Determine la temperatura de las superficies inferior y lateral.

8-76 Dos placas grises que tienen $\epsilon = 0.8$ se encuentran separadas por 6 cm de distancia y CO_2 a 1 atm. Las placas se mantienen a 900 y 600 K y el CO_2 se puede suponer como gris. Calcule la transferencia de calor entre las placas con y sin la presencia del CO,.

8-77 Una mezcla de 20% de CO, y 80% de N_2 en volumen se encuentra en un recinto esférico a 1 atm y 1200 K. Calcule la emisividad del gas para un diámetro de 1.5 m.

8-78 Una mezcla de aire y vapor de agua se encuentra encerrada en un recinto esférico a 2 atm y 900 K. La presión parcial del vapor de agua es 0.15 atm. Calcule la emisividad del gas para un diámetro de 1.0 m.

8-79 Una mezcla de 40% de CO_2 y 60% de H_2O en volumen está encerrada en un recinto cúbico de 1 m de lado, a 1 atm y 800 K. Las paredes del recinto se mantienen a 400 K y tienen $\epsilon = 0.8$. Calcule el enfriamiento necesario para mantener las paredes a 400 K.

8-80 Cierta superficie tiene las siguientes propiedades de absorción:

$$\alpha_\lambda = 0.05 \qquad 0 < \lambda < 1.2\ \mu m$$
$$\alpha_\lambda = 0.5 \qquad 1.2 < \lambda < 3\ \mu m$$
$$\alpha_\lambda = 0.4 \qquad 3 < \lambda < 6\ \mu m$$
$$\alpha_\lambda = 0.2 \qquad 6 < \lambda < 20\ \mu m$$

$$\alpha_\lambda = 0 \qquad 20 < \lambda < \infty\ \mu m$$

Calcule la absorbencia total de la superficie cuando se le irradia con una radiación de cuerpo negro a *a)* 300 K, *b) 500* K, c) 1000 K, d) 2000 K, e) 5000 K.

8-81 Suponiendo que la radiación solar es como un cuerpo negro a 5795 K, calcule la fracción de energía en las siguientes bandas de longitud de onda: *a)* 0 a 0.2 μm, *b) 0.2* a 0.4 pm, c) 0.4 a 1 .O μm, *d)* 1 .0 a 2.0 μm, e) por encima de 2.0 μm.

8-82 Los rollos de fotografía a color están diseñados para una sensibilidad a longitud de onda específica, tal como "luz natural" e " iluminación interior incandescente". Un foco de luz incandescente radia aproximadamente como lo haría un cuerpo negro a 3200 K, mientras que la luz natural es más o menos semejante a un cuerpo negro a 5800 K, Realice los cálculos y comente sobre los resultados que se obtendrían cuando se utiliza un rollo fotográfico en condiciones inadecuadas, es decir, un rollo para luz natural en un interior con luz incandescente.

8-83 Calcule la rapidez de absorción para radiación solar sobre arena fina y brillante con un ángulo de altitud solar de 50° y un factor de turbiedad de 3.5.

8-84 Calcule la insolación del suelo para una altitud solar de 30° en un medio contaminado por el smog con un factor de turbiedad de 4.0. ¿Cómo se podría comparar esto con la insolación sobre el suelo en un día despejado y con una altitud solar de 90 "C?

8-85 Trace la insolación solar sobre el suelo como función del factor de turbiedad para una altitud solar de 80°.

8-86 Utilizando el espectro de la Fig. 8-65, estime la fracción de radiación hacia la Tierra que podría transmitir la atmósfera. ¿Cuál es la magnitud de esta energía transmitida?

8-87 Utilizando el espectro de la Fig. 8-65, estime la magnitud del flujo de radiación solar en la superficie de la Tierra. ¿Cómo se podría comparar este cálculo con el que se basa en la Ec. 8-119?

8-88 Un entusiasta del control de la contaminación ambiental asegura que cierta área metropolitana tiene un grado tal alto de concentración de contaminantes atmosféricos que la insolación solar ha disminuido en un 50%. ¿Cómo se podría evaluar esta afirmación? Suponiendo un factor de turbiedad de 4.5, ¿qué factor de altitud solar sería necesario para producir el 50% de atenuación?

8-89 La radiación solar llega a la superficie de un lago cuando la altitud solar es de 90°. El lago es bastante turbio con un coeficiente de extinción de 0.82 m^{-1} y la atmósfera tiene un factor de turbiedad de 2.8. ¿Qué fracción de la radiación incidente ha sido absorbida a una profundidad de *a)* 0 pie, *b) 0.25* pie, *c)* 0.5 pie, d) 1 pie?

8-90 Calcule las rapideces de generación de calor para las profundidades dadas en el Prob. 8-89.

8-91 Utilizando los datos de la Tabla 8-5, estime los valores del factor de turbiedad a 5, 20, 30, 45, 60 y 90° de altitud solar sobre los cuales se basaron estos cálculos "promedio".

8-92 Trace la insolación solar versus el ángulo de altitud solar para atmósferas contaminadas con un factor de turbiedad de *a)* 3.5 y *b) 4.5.*

8-93 ¿A qué ángulo de altitud solar será la insolación solar igual a 50% de la insolación en los límites exteriores de la atmosfera cuando el factor de turbiedad es *4.02*

8-94 ¿Qué factor de turbiedad será necesario para reducir en un 50% la insolación solar en un día despejado a α = 90°?

Referencias

1 Sears, F. W.: "Introduction to Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Mechanics," pp. 123-124, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1953.

2 Dunkle, R. V.: Thermal Radiation Tables and Applications, *Truns. ASME*, vol. 76, p. 549, 1954.

3 Mackey, C. O., L. T. Wright, Jr., R. E. Clark, and N. R. Gay: Radiant Heating and Cooling, part 1, *Cornell Univ. Eng. Exp. Stn. Bull.*, vol. 32, 1943.

4 Chapman, A. J.: "Heat Transfer," pp. 319-323, The Macmillan Company, New York, 1960.

5 Hamilton, D. C., and W. R. Morgan: Radiant Interchange Configuration Factors, *NACA Tech.* Note 2836, 1952.

6 Eckert, E. R. G., and R. M. Drake: "Heat and Mass Transfer," 2d ed., pp. 381-393, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

7 McAdams, W. H.: "Heat Transmission," 3d ed., chap. 2, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

8 Schmidt, E.: Messung der Gesamtstrahlung das Wasserdampfes bei Temperaturen bis 1000C, Forsch. *Geb. Zngenieurwes.*, vol. 3, p. 57, 1932.

9 Schmidt, E., and E. R. G. Eckert: Über die Richtungsverteilung der Wärmestrahlung von Oberflachen, Forsch. *Geb. Zngenieurwes.*, vol. 6, p. 175, 1935.

10 Sparrow, E. M., and R. D. Cess: "Radiation Heat Transfer," Wadsworth Publishing Co., Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.

11 Wiebelt, J. A.: "Engineering Radiation Heat Transfer," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1966.

12 Eckert, E. R. G., and E. M. Sparrow: Radiative Heat Exchange between Surfaces with Specular Reflection, *Int. J. Heut Mass Transfer*, vol. 3, pp. 43-54, 1961.

13 Sparrow, E. M., E. R. G. Eckert, and V. K. Jonsson: An Enclosure Theory for Radiative Exchange between Specular and Diffusely Reflecting Surfaces, *J. Heat Transfer*, ser. C., vol. 84, pp. 294–299, 1962.

14 Gubareff, G. G., J. E. Janssen, and R. H. Torborg: "Thermal Radiation Properties Survey," 2d ed., Minneapolis Honeywell Regulator Co., Minneapolis, Minn., 1960.

15 Threlkeld, J. L., and R. C. Jordan: Direct Solar Radiation Available on Clear Days, *ASHAE* Truns., vol. 64, pp. 45-56, 1958.

16 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

17 Birkebak, R. D., and E. R. G. Eckert: Effects of Roughness of Metal Surfaces on Angular Distribution of Monochromatic Radiation, *J. Heat Transfer*, vol. 87, p. 85, 1965.

16 Torrarme, K. E., and E. M. Sparrow: Off Specular Peaks in the Directional Distribution of Reflected Thermal Radiation, *J. Heat Transfer*, vol. 88, p. 223, 1966.

19 Hering, R. G., and T. F. Smith: Surface Roughness Effects on Radiant Transfer between Surfaces, *Znt. J. Heat Mass Transfer*, vol. 13, p. 725, 1970.

20 Oppenheim, A. K.: Radiation Analysis by the Network Method, *Trans. ASME*, vol. 78, pp. 725–735, 1956.

21 Holman, J. P.: Radiation Networks for Specular-Diffuse Transmitting and Reflecting Surfaces, *ASME Pap.* 66 WA/HT-9, December 1966.

22 Hottel, H. C.: Radiant Heat Transmission, chap. 4, in W. H. McAdams (ed.), "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

23 Hottel, H. C., and A. F. Sarofim: "Radiative Transfer," McGraw Hill Book Company, New York, 1967.

24 Siegel, R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.

25 Eckert, E. R. G., and R. M. Drake: "Analysis of Heat and Mass Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

26 Dunkle, R. V.: "Geometric Mean Beam Lengths for Radiant Heat Transfer Calculations," *J. Heut Transfer*, vol. 86, p. 75, February 1964.

27 Edwards, D. K., and K. E. Nelson: "Rapid Calculation of Radiant Energy Transfer between Nongray Walls and Isothermal H_2O and *CO, Gas, J. Heat Trunsfer*, vol. 84, p. 273, 1962.

28 Edwards, D. K.: Radiation Interchange in a Nongray Enclosure Containing an Isothermal Carbon Dioxide–Nitrogen Gas Mixture, *J. Heat Transfer,* vol. 84, p. 1, 1962.
29 Hottel, H. C., and R. B. Egbert: "Radiant Heat Transmission from Water Vapor, *Trans. AIChE,* vol. 38, p. 531, 1942.
30 Kondratyev, K. Y.: "Radiative Heat Exchange in the Atmosphere," Pergamon Press, New York, 1965.
31 Geiger, R.: "The Climate Near the Ground," rev. ed., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1965.
32 Eagleson, P. S.: "Dynamic Hydrology," McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
33 Raphael, J. M.: Prediction of Temperature in Rivers and Reservoirs, *Proc. ASCE Power Div.,* no. PO2, pap. 3290, July 1962.
34 Dake, J. M. K., and D. R. F. Harleman: Thermal Stratification in Lakes: Analytical and Laboratory Studies, Woter *Resour. Res.,* vol. 5, no. 2, p. 484, April 1969.
35 Goldman, C. R, and C. R. Carter: An Investigation by Rapid Carbon-14 Bioassay of Factors Affecting the Cultural Entrophication of Lake Tahoe, California, *J. Water Pollut. Control Fed.,* p. 1044, July 1965.
36 Bachmann, R. W., and C. R. Goldman: Hypolimnetic Heating in Castle Lake, California, *Limnol. Oceanog.,* vol. 10, p. 2, April 1965.
37 Duffie, J. A., and W. A. Beckman: "Solar Energy Thermal Process," John Wiley & Son, Inc., New York, 1914.

9

Transferencia de Calor por Condensación y Ebullición

9-I Introducción

En nuestros estudios anteriores sobre la transferencia de calor por convección sólo se consideraron sistemas homogéneos de una sola fase. Los procesos de convección asociados con un cambio de fase en un líquido son igualmente importantes. Los dos ejemplos de mayor importancia son los fenómenos de condensación y ebullición, aunque la transferencia de calor con cambios de fase entre sólido y gas ha adquirido importancia debido a un gran número de aplicaciones.

En muchos tipos de ciclos de producción de energía o refrigeración nos interesa el cambio de vapor a líquido o viceversa, dependiendo de la parte particular del ciclo que se esté estudiando. Estos cambios se producen por ebullición o condensación y el ingeniero debe comprender el proceso involucrado a fin de poder diseñar el equipo de transferencia de calor adecuado. Los procesos de ebullición y condensación casi siempre involucran altas rapideces de transferencia de calor, y este hecho ha conducido a los diseñadores de cambiadores de calor compactos a utilizar los fenómenos para procesos de calentamiento o enfriamiento que no están necesariamente asociados con ciclos de producción de energía.

9-2 Fenómenos de transferencia de calor por condensación

Considérese la placa plana vertical expuesta a un vapor condensable que se muestra en la Fig. 9-1. Si la temperatura de la placa se encuentra bajo la temperatura de saturación del vapor, hay condensación sobre la superficie y bajo la acción de la gravedad fluye hacia la parte inferior de la placa. Si el líquido humedece la superficie, se formará una película uniforme y al proceso se le llama condensación *por película*. Si el líquido no humedece la superficie, se formarán gotas que caerán de la superficie en forma aleatoria. A este proceso se le llama condensación por goteo. En el proceso de condensación por película la superficie está cubierta por la película la cual aumenta a medida que fluye hacia la parte inferior de la placa. Hay un gradiente de temperatura

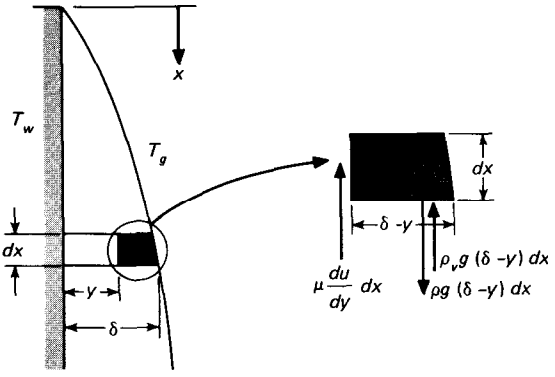


Fig. g-l Condensación por película en una placa plana vertical.

en la película y ésta representa una resistencia térmica para la transferencia de calor. En la condensación por goteo, una parte grande del área de la placa está directamente expuesta al vapor; no hay barrera de película para el flujo de calor y ocurren rapideces de transferencia de calor superiores. De hecho, las rapideces de transferencia de calor en condensación por goteo pueden ser hasta 10 veces superiores que en condensación por película.

Debido a las elevadas rapideces de transferencia de calor, la condensación por goteo debería preferirse a la condensación por película, pero es sumamente difícil de mantener, ya que la mayor parte de las superficies se mojan después de ser expuestas a un vapor en condensación por un periodo de tiempo largo. Se han utilizado diversas capas superficiales y aditivos para el vapor para tratar de mantener la condensación por goteo, pero estos métodos no han tenido, hasta ahora, un éxito general. Algunos de los trabajos pioneros en condensación por goteo fueron llevados a cabo por Schmidt [26] y en la Ref. 27 se presenta un buen resumen del problema global. Las mediciones de la Ref. 35 indican que la conducción en las gotas es la resistencia principal al flujo de calor para la presión atmosférica y por encima de ella. La densidad de sitios de nucleación en superficies uniformes puede ser del orden de 10^8 sitios por centímetro cuadrado y un buen número de investigadores han encontrado coeficientes de transferencia de calor en el intervalo de 170 a 290 $\mathrm{kW/m^2 \cdot {}^oC}$ [30 000 a 50 000 $\mathrm{Btu/h \cdot pie^2 \cdot {}^oF}$].

La condensación por película en una placa vertical puede analizarse en un modo que propuso primero Nusselt [1]. Considérese el sistema de coordenadas que aparece en la Fig. 9-l.

La temperatura de la placa se mantiene a T_w y la temperatura del vapor en el extremo de la película es la temperatura de saturación T_g. El espesor de la película se representa por δ y escogemos el sistema de coordenadas con la dirección positiva de x hacia abajo, como se muestra. Se supone que el corte viscoso del vapor en la película es despreciable para y = 6. También se supone que existe una distribución lineal de temperatura entre las condiciones de la pared y el vapor. El peso del elemento de fluido de

espesor dx entre y y δ está balanceado por la fuerza cortante viscosa en y y la fuerza de flotación debida al vapor desplazado. Así

$$\rho g(\delta - y)\,dx = \mu \frac{du}{dy}\,dx + \rho_v g(\delta - y)\,dx \tag{9-1}$$

Integrando y utilizando la condición de frontera de que $u = 0$ en $y = 0$ nos lleva a

$$u = \frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu}(\delta y - \tfrac{1}{2}y^2) \tag{9-2}$$

El flujo de masa de condensado a través de cualquier posición x de la película se expresa entonces por

$$\text{Flujo de masa} = \dot{m} = \int_0^\delta \rho \left[\frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu}(\delta y - \tfrac{1}{2}y^2)\right] dy$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^3}{3\mu} \tag{9-3}$$

cuando se supone la profundidad unitaria. La transferencia de calor en la pared en el área *dx es*

$$q_x = -k\,dx \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = k\,dx \frac{T_g - T_w}{\delta} \tag{9-4}$$

ya que se supuso un perfil de temperatura lineal. A medida que el flujo avanza de x a x + dx, la película crece de δ a $\delta + d\delta$ como resultado de la afluencia de condensado adicional. La cantidad de condensado agregado entre x y x + *dx es*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^3}{3\mu}\right] dx = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^3}{3\mu}\right]\frac{d\delta}{dx}\,dx$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^2\,d\delta}{\mu}$$

El calor extraído por la pared debe igualar este flujo incrementa1 de masa multiplicado por el calor latente de condensación del vapor. Así

$$\frac{\rho(\rho - \rho_v)g}{\mu}\delta^2\,d\delta\,h_{fg} = k\,dx\,\frac{T_g - T_w}{\delta} \tag{9-5}$$

La Ec. 9-5 puede integrarse con la condición de frontera $\delta = 0$ en $x = 0$ para dar

$$\delta = \left[\frac{4\mu k x(T_g - T_w)}{g h_{fg}\rho(\rho - \rho_v)}\right]^{1/4} \tag{9-6}$$

El coeficiente de transferencia de calor se escribe ahora

$$h\,dx\,(T_w - T_g) = -k\,dx\,\frac{T_g - T_w}{\delta}$$

o

$$h = \frac{k}{\delta}$$

de modo que

$$h_x = \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k^3}{4\mu x(T_g - T_w)}\right]^{1/4} \tag{9-7}$$

Expresado en forma adimensional en términos del número de Nusselt, esto es

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}x^3}{4\mu k(T_g - T_w)}\right]^{1/4} \tag{9-8}$$

El valor promedio del coeficiente de transferencia de calor se obtiene integrando sobre la longitud de la placa:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx = \tfrac{4}{3}h_{x=L} \tag{9-9}$$

o

$$h = 0.943\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k_f^3}{Lu_f(T_g - T_w)}\right]^{1/4} \tag{9-10}$$

Rohsenow [37] presenta en detalle análisis de condensación por película más refinados. Los refinamientos más significativos toman en cuenta un perfil de temperatura no lineal en la película y modificaciones en el balance de energía para incluir energía adicional para enfriar la película por debajo de la temperatura de saturación. Ambos efectos pueden manipularse reemplazando h_{fg} por h'_{fg}, definido por

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.68c(T_g - T_w) \tag{9-11}$$

donde c es el calor específico del líquido. Por otra parte, las propiedades en las Ecs. 9-7 y 9-10 deberían evaluarse a la temperatura de la película

$$T_f = \frac{T_g + T_w}{2}$$

Con estas sustituciones la Ec. 9-10 puede usarse para placas y cilindros verticales y fluidos con Pr > 0.5 y $cT/h_{fg} \leq 1.0$.

Para condensación laminar por película en tubos horizontales, Nusselt obtuvo la relación

$$\bar{h} = 0.725\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k_f^3}{\mu_f d(T_g - T_w)}\right]^{1/4} \tag{9-12}$$

donde d es el diámetro del tubo. Cuando ocurre condensación en un banco de tubos horizontales con n tubos colocados directamente unos sobre otros en la dirección vertical, el coeficiente de transferencia de calor puede calcularse sustituyendo el diámetro en la **Ec. 9-12** por nd.

Cuando una placa en la que ocurre condensación es suficientemente grande o cuando hay una cantidad suficiente de flujo condensado puede aparecer turbulencia en la capa condensada. Esta turbulencia da por resultado rapideces de transferencia de calor más altas. Como ocurre en los problemas de flujo por convección forzada, el criterio que se utiliza para determinar si el flujo es laminar o turbulento es el número de Reynolds y para el sistema de condensación éste se define como

$$\mathrm{Re}_f = \frac{D_H \rho V}{\mu_f} = \frac{4A\rho V}{P\mu_f}$$

donde D_H = diámetro hidráulico
A = área de flujo
P = perímetro "mojado" o de corte
V = velocidad promedio en el flujo

Pero

$$ni = \rho A V$$

de modo que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\dot{m}}{P\mu_f} \tag{9-13}$$

en donde m es el flujo en masa a través de una sección específica de película condensada. Para una placa vertical de profundidad unitaria, $P = 1$; para un tubo vertical, $P = \pi d$. El numero de Reynolds crítico es aproximadamente 1800 y las correlaciones de turbulencia para la transferencia de calor se deben usar en números de Reynolds mayores a este valor. El numero de Reynolds se expresa algunas veces en términos del flujo en masa por profundidad unitaria de placa Γ, de manera que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\Gamma}{\mu_f} \tag{9-14}$$

Al calcular los números de Reynolds el flujo en masa se puede relacionar con la transferencia de calor total y con el coeficiente de transferencia de calor por

$$q = \bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_w) = \dot{m}h_{fg} \tag{9-15}$$

en donde A es el área de superficie total para la transferencia de calor. Por tanto

$$\dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} = \frac{\bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_w)}{h_{fg}}$$

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_w)}{h_{fg}P\mu_f} \tag{9-16}$$

Pero $A = LW$ y $P = W$

en donde L y W son respectivamente la altura y ancho de la placa, de manera que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\bar{h}L(T_{\mathrm{sat}} - T_s)}{h_{fg}\mu_f} \tag{9-17}$$

Las ecuaciones de condensación laminar que presentamos antes concuerdan muy bien con los datos experimentales siempre y cuando la capa permanezca tersa y se comporte en forma adecuada. En la práctica, se ha encontrado que para números de Reynolds tan bajos como 30 o 40, aparecen ondas en la película. Cuando esto ocurre, los valores experimentales de $\bar{h}$ pueden ser un 20% más altos que los que predice la Ec. 9-12. Debido a la frecuencia con que esto ocurre, McAdams [3] sugirió que para fines de diseño se adopte un incremento de 20%. En nuestro estudio utilizaremos la Ec. 9-10 sin el incremento, reconociendo que éste es un enfoque conservador que proporciona un coeficiente de seguridad en los problemas de diseño. Si se desea utilizar el coeficiente con un 20% de incremento, la ecuación resultante para placas verticales es

$$h = 1.13\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k^3}{L\mu(T_g - T_s)}\right]^{1/4} \tag{9-18}$$

Si el vapor condensado se sobrecalienta, se podrán utilizar las ecuaciones precedentes para calcular el coeficiente siempre y cuando se calcule el flujo de calor en base de la diferencia de temperatura entre la superficie y la temperatura de saturación correspondiente a la presión del sistema. Cuando junto con el vapor se encuentra presente un gas no condensable, puede haber un obstáculo a la transferencia de calor ya que el calor se deberá difundir a través del gas antes de poder condensarse sobre la superficie. Para mayor información sobre el tema, el lector deberá consultar las Refs. 3 y 4.

Superficies inclinadas

Si una placa o cilindro se encuentra inclinado en ángulo ϕ con la horizontal, el efecto neto sobre el análisis anterior se reduce al reemplazo de la fuerza gravitacional por sus componentes paralelos a la superficie de transferencia de calor, o

$$g' = g\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{9-19}$$

Por tanto, para flujo laminar sugerimos que en las superficies inclinadas se realice la sencilla sustitución indicada en la Ec. 9-19.

9-3 El número de condensación

Debido a la importancia de la película del número de Reynolds en la determinación del comportamiento de condensación, es conveniente expresar el coeficiente de trans-

ferencia de calor directamente en términos de Re. Incluimos el efecto de inclinación y escribimos las ecuaciones de transferencia de calor en la forma

$$\bar{h} = C \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) k^3 g \text{ sen } \phi \; h_{fg}}{\mu L (T_g - T_w)} \right]^{1/4} \tag{9-20}$$

donde la constante se evalúa para una placa o geometría cilíndrica. A partir de la Ec. 9-15 podemos resolver para $T_g - T_w$ como

$$T_g - T_w = \frac{\dot{m} h_{fg}}{\bar{h} A} \tag{9-21}$$

en donde A es, una vez más, el área de superficie para la transferencia de calor. Reemplazando la Ec. 9-21 én la Ec. 9-20 y resolviendo para hnos da

$$\bar{h}^{3/4} = C \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g \text{ sen } \phi \; k^3 A/L}{\mu \dot{m}} \right]^{1/4} \tag{9-22}$$

Esto se puede reestructurar como

$$\bar{h}^{3/4} = C \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g k^3}{\mu^2} \frac{\mu P}{4ni} \frac{4 \text{ sen } \phi}{L} AIP \right]^{1/4}$$

y podemos resolver para $\bar{h}$ como

$$\bar{h} = C^{4/3} \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g k^3}{\mu^2} \frac{\mu P}{\mathbf{4ni}} \frac{4 \text{ sen } 4AIP}{L} \right]^{1/3} \tag{9-23}$$

Ahora definimos un nuevo grupo adimensional, el ***número de condensación Co,*** como

$$\text{Co} = \bar{h} \left[\frac{\mu^2}{k^3 \rho(\rho - \rho_v) g} \right]^{1/3} \tag{9-24}$$

de modo que la Ec. 9-23 puede expresarse en la forma

$$\text{Co} = C^{4/3} \left(\frac{\mathbf{4} \text{ sen } \phi \; A/P}{L} \right)^{1/3} \text{Re}_f^{-1/3} \tag{9-25}$$

Para una placa vertical $A/PL = 1.0$, y obtenemos usando la constante de la Ec. 9-10,

$$Co = 1.47 \; \text{Re}_f^{-1/3} \quad \text{para } \text{Re}_f < 1800 \tag{9-26}$$

Para un cilindro horizontal $A/PL = \pi$ y

$$\mathbf{Co = 1.514 \; Re_f^{-1/3}} \quad \text{para } \text{Re}_f < 1800 \tag{9-27}$$

Cuando se encuentra turbulencia en la película, se puede usar una correlación empírica de Kirkbride [2]:

$$Co = 0.0077\ \mathrm{Re}_f^{0.4} \quad \text{para } \mathrm{Re}_f > 1800 \tag{9-28}$$

9-4 Condensación por película dentro de tubos horizontales

Hasta ahora, nuestro estudio de condensación por película se ha limitado a *superficies exteriores,* en las que los flujos de condensado de vapor y líquido no se restringen por las dimensiones globales del canal de flujo. La condensación dentro de tubos tiene considerable interés práctico debido a las aplicaciones en condensadores en sistemas de refrigeración y aire acondicionado, pero por desgracia estos fenómenos son bastante complicados y no son susceptibles a un tratamiento analítico sencillo. La rapidez global de flujo de vapor influye mucho en la rapidez de transferencia de calor en el sistema forzado de condensación y convección, y esto a su vez depende de la rapidez de acumulación de líquido en las paredes. Debido a los complicados fenómenos de flujo involucrados, presentaremos sólo dos relaciones empíricas para transferencia de calor y remitiremos al lector a Rohsenow [37] para información más completa.

Chaco [38] obtuvo la expresión siguiente para condensación de refrigerantes a bajas velocidades de vapor dentro de tubos horizontales:

$$\bar{h} = 0.555 \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v) g k^3 h'_{fg}}{\mu d (T_g - T_w)} \right]^{1/4} \tag{9-29}$$

Esta ecuación está limitada a números de Reynolds de vapor bajos de modo que

$$\mathrm{Re}_v = \frac{dG_v}{\mu_v} < 35\ 000 \tag{9-30}$$

donde Re, se evalúa a las condiciones de *entrada* al tubo. Para rapideces de flujo superiores Akers, Deans y Crosser [39] dan una expresión empírica aproximada como

$$\frac{\bar{h}d}{k_f} = 0.026\ \mathrm{Pr}_f^{1/3}\ \mathrm{Re}_m^{0.8} \tag{9-31}$$

donde Re,,, es ahora un número de Reynolds de mezcla, definido por

$$\mathrm{Re}_m = \frac{d}{\mu_f}\left[G_f + G_v \left(\frac{\rho_f}{\rho_v} \right)^{1/2} \right] \tag{9-32}$$

Las velocidades de masa para el líquido G_f y el vapor G_v se calculan como si cada una de ellas ocupara toda el área. La Ec. 9-31 correlaciona datos experimentales dentro del 50% cuando

$$\mathrm{Re}_v = \frac{dG_v}{\mu_v} > 20\,000 \qquad \mathrm{Re}_f = \frac{dG_f}{\mu_f} > 5000$$

Ejemplo 9-I

Una placa vertical cuadrada de SO por 30 cm, se expone a vapor a presión atmosférica. La placa tiene una temperatura de 98 °C. Calcule la transferencia de calor y la masa de vapor condensado por hora.

Solución

Debe verificarse el número de Reynolds para determinar si la película de condensado es laminar o turbulenta. Las propiedades se evalúan a la temperatura de la película:

$$T_f = \frac{100 + 98}{2} = 99\ ^\circ\mathrm{C} \qquad \rho_f = 960\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\mu_f = 2.82 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg/m \cdot s} \qquad k_f = 0.68\ \mathrm{W/m \cdot ^\circ C}$$

Para este problema la densidad del vapor es muy pequeña comparada con la del líquido y justificamos hacer la sustitución

$$\rho_f(\rho_f - \rho_v) \approx \rho_f^2$$

Tratando de calcular el número de Reynolds encontramos que depende del flujo de masa de condensado. Pero esto depende del coeficiente de transferencia de calor, el cual depende del número de Reynolds. Para resolver este problema suponemos ya sea flujo laminar o turbulento, calculamos el coeficiente de transferencia de calor y comprobamos después el número de Reynolds para ver si nuestra suposición fue correcta. Supongamos condensación por película laminar. A presión atmosférica tenemos

$$T_{\mathrm{sat}} = 100\ ^\circ\mathrm{C} \qquad h_{fg} = 2255\ \mathrm{kJ/kg}$$

$$\bar{h} = 0.943 \left[\frac{\rho_f^2 g h_{fg}' k_f^3}{\bar{L}\mu_f(T_{\mathrm{sat}} - T_w)}\right]^{1/4}$$

$$= 0.943 \left[\frac{(960)^2(9.8)(2.255 \times 10^6)(0.68)^3}{(0.3)(2.82 \times 10^{-4})(100 - 98)}\right]^{1/4}$$

$$= 13\,150\ \mathrm{W/m^2 \cdot ^\circ C}\ \ [2316\ \mathrm{Btu/h \cdot pie^2 \cdot ^\circ F}]$$

Verificando el número de Reynolds con la Ec. 9-17, tenemos

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4hL(T_{\mathrm{sat}} - T_w)}{h_{fg}\mu_f}$$

$$= \frac{(4)(13\,150)(0.3)(100 - 98)}{(2.255 \times 10^6)(2.82 \times 10^{-4})} = 49{,}6$$

de modo que la suposición laminar fue correcta. La transferencia de calor se calcula ahora a partir de

$$q = \bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_w) = (13\,150)(0.3)^2(100 - 98) = 2367\ \mathrm{W}\ \ [8079\ \mathrm{Btu/h}]$$

El flujo total de masa de condensado es

$$\dot{m} = \frac{q}{\bar{h}_{fg}} = \frac{2367}{2.255 \times 10^6} = 1.05 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/s} = 3.78\ \mathrm{kg/h}\ \ [8.33\ \mathrm{lb_m/h}]$$

Ejemplo 9-2

Cien tubos de 0.5 plg (1.27 cm) de diámetro están arreglados en forma cuadrada y se exponen a vapor atmosférico. Calcule la masa de vapor condensado por unidad de longitud de tubos para una temperatura de pared de tubo de 98 °C.

Solución

Las propiedades del condensado se obtienen del Ej. 9-1. Empleamos la Ec. 9-12 para la solución, reemplazando d **por** nd, **donde** $n = 10$. **Así,**

$$h = 0.725 \left[\frac{\rho_f^2 g h_{fg} k_f^3}{\mu_f n d (T_s - T_w)}\right]^{1/4}$$

$$= 0.725 \left[\frac{(960)^2(9.8)(2.255 \times 10^6)(0.68)^3}{(2.82 \times 10^{-4})(10)(0.0127)(100 - 98)}\right]^{1/4}$$

$$= 12\,540 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \quad [2209 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot °\text{F}]$$

El área total de la superficie es

$$\frac{A}{L} = n\pi d = (100)\pi(0.0127) = 3.99 \text{ m}^2/\text{m}$$

de modo que la transferencia de calor es

$$\frac{q}{L} = h\frac{A}{L}(T_s - T_w)$$

$$= (12\,540)(3.99)(100 - 98) = 100.07 \text{ kW/m}$$

El flujo de masa total de condensado es así:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{q/L}{h_{fg}} = \frac{1.0007 \times 10^5}{2.255 \times 10^6} = 0.0444 \text{ kg/s} = 159.7 \text{ kg/h} \quad [352 \text{ lb}_m/\text{h}]$$

9-5 Transferencia de calor por ebullición

Cuando se expone una superficie a un líquido y se mantiene a una temperatura superior a la de saturación del líquido, puede ocurrir ebullición y el flujo de valor dependerá de la diferencia de temperatura entre la de superficie y la de saturación. Cuando se sumerge la superficie caliente bajo una superficie libre de líquido, el proceso se conoce como *ebullición en* estanque. Si la temperatura de líquido es inferior a la de saturación, el proceso se llama *ebullición local o sobreenfriada.* Si el líquido se mantiene a la temperatura de saturación, el proceso se denomina como *ebullición global o saturada.*

Los regímenes diferentes de ebullición se indican en la Fig. 9-2, donde se trazan datos de flujo de calor de un alambre de platino calentado eléctricamente y sumergido en agua, contra el exceso de temperatura $T_w - T_{sat}$. En la región 1 las corrientes de convección libre son responsables del movimiento del fluido cerca de la superficie. En esta región, el líquido cerca de la superficie caliente está ligeramente sobrecalentado y en consecuencia se evapora cuando se eleva a la superficie. En la región II se comienzan a formar burbujas en la superficie del alambre y se disipan en el líquido antes de romperse en la superficie. Esta región indica el inicio de la *ebullición por nucleación.*

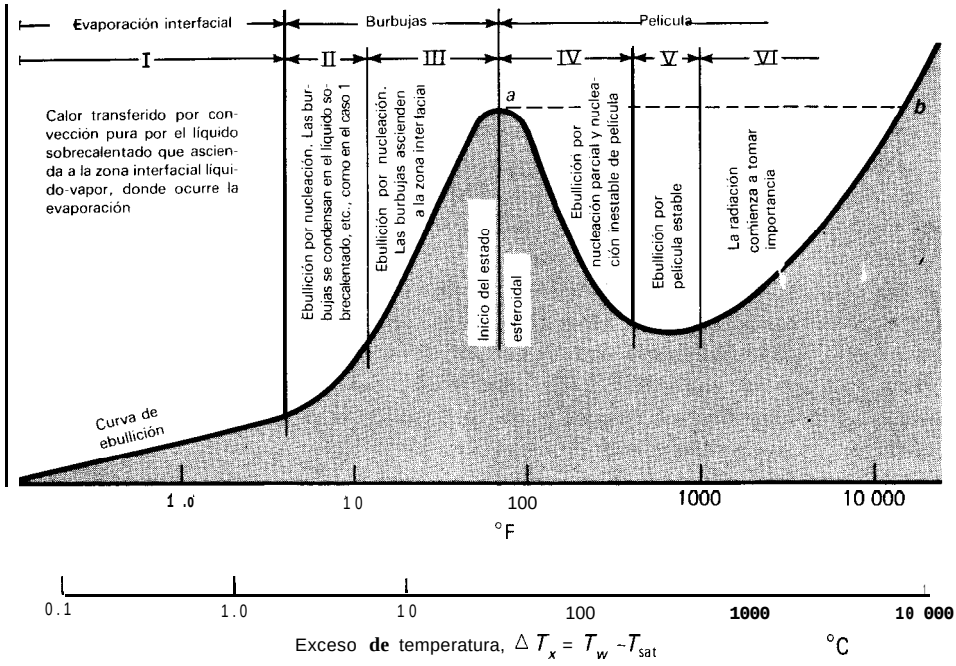


Fig. 9-2 Datos de flujo de calor a partir de un alambre de platino calentado eléctricamente, de Farber y Scorah 191.

A medida que aumenta la temperatura, se forman burbujas con mayor rapidez y llegan a la superficie del líquido en donde se disipan. Esto se indica en la región III. Eventualmente, las burbujas se forman tan rápido que cubren la superficie caliente e impiden que el flujo entrante de líquido nuevo tome su lugar. En este punto se unen las burbujas y forman una película de vapor que cubre la superficie. El calor debe conducirse a través de esta película antes de llegar al líquido y llevar a cabo el proceso de ebullición. La resistencia térmica de esta película produce una reducción en el flujo de vapor y este fenómeno se ilustra en la región IV, la región de *ebullición por película.* Esta región representa una transición de ebullición por nucleación a ebullición por película y es inestable. Eventualmente en la región V se encuentra ebullición estable por película. Las temperaturas de superficie necesarias para mantener ebullición estable por película son elevadas y una vez que se alcanza esta condición, una fracción significativa del calor perdido por la superficie puede dar por resultado radiación térmica, como se indica en la región VI.

Un alambre calentado eléctricamente es inestable en el punto *a* ya que un pequeño incremento AT, en este punto da por resultado una disminución en el flujo de calor de ebullición. Pero el alambre debe aún disipar el mismo flujo de calor o aumentará su temperatura, dando por resultado una operación mucho más abajo en la curva de ebullición. Tal vez, el equilibrio puede restablecerse sólo en el punto *b* en la región de ebullición por película. En general, esta temperatura es superior a la temperatura de fusión del alambre, por lo que se produce su ruptura. Si la alimentación de energía

eléctrica se reduce con rapidez cuando el sistema alcanza el punto a, entonces puede ser posible observar la ebullición parcial por nucleación y la región de película inestable.

En la ebullición por nucleación, las burbujas se crean por la expansión del gas o vapor atrapado en pequeñas cavidades en la superficie. Las burbujas crecen hasta un cierto tamaño, dependiendo de la tensión superficial en la región interfacial líquido y vapor, y en la temperatura y presión. Dependiendo del exceso de temperatura, las burbujas pueden desintegrarse en la superficie, se pueden expander y desprenderse de la superficie para disiparse en el cuerpo del líquido, o a temperaturas lo bastante elevadas pueden llegar a la superficie del líquido antes de disiparse. Cuando se observan condiciones de ebullición local, se cree que el mecanismo primario de transferencia de calor es la agitación intensa en la superficie de transferencia de calor que crea las elevadas rapideces de transferencia de calor observadas en ebullición. En ebullición saturada o global, las burbujas se pueden desprender de la superficie debido a la acción de flotación y moverse hacia el cuerpo del líquido. En este caso la rapidez de transferencia de calor depende tanto de la agitación causada por las burbujas como del transporte de energía por el vapor hacia el cuerpo del líquido.

Los experimentos han mostrado que las burbujas no siempre están en equilibrio termodinámico con el líquido circundante; es decir, el vapor dentro de la burbuja no está necesariamente a la misma temperatura del líquido. Considerando una burbuja esférica como se muestra en la Fig. 9-3, las fuerzas de presión del líquido y el vapor deben balancearse por la fuerza de tensión superficial en la zona interfacial vapor-líquido. La fuerza de presión actúa sobre un área πr^2 y la fuerza de tensión superficial se ejerce sobre la longitud interfacial $2\pi r$. El balance de fuerzas es

$$\pi r^2(p_v - p_l) = 2\pi r\sigma$$

o

$$p_v - p_l = \frac{2\sigma}{r} \tag{9-32a}$$

donde P_v = presión de vapor dentro de la burbuja
p_l = presión del liquido
σ = tensión superficial en la zona interfacial líquido-vapor

Ahora, consideremos una burbuja con presión en equilibrio, es decir, que no esté creciendo o desintegrándose. Supongamos que la temperatura del vapor en el interior de la burbuja es la temperatura de saturación que corresponde a la presión p_v. Si el

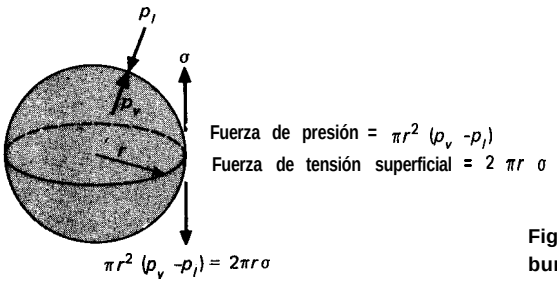


Fig. 9-3 Balance de fuerzas en una burbuja de vapor.

líquido se encuentra a la temperatura de saturación que corresponde a la presión p_l, ésta es menor a la temperatura en el interior de la burbuja. En consecuencia, el calor debe salir de la burbuja, el vapor interior se debe condensar y la burbuja desintegrarse. Este es el fenómeno que ocurre cuando las burbujas se desintegran sobre la superficie de calentamiento o en el cuerpo del liquido. A fin de que las burbujas crezcan y escapen de la superficie deben recibir calor del liquido. Esto requiere que el líquido se encuentre en condición de sobrecalentamiento, de manera que la temperatura del liquido sea mayor que la temperatura del vapor en el interior de la burbuja. Esta es una condición metastable, pero que se-observa experimentalmente y explica el crecimiento de las burbujas después de dejar la superficie en algunas regiones de ebullición por nucleación.

La Fig. 9-4 presenta una fotografía que ilustra varios regímenes de ebullición. A la varilla horizontal de cobre de 0.25 plg de diámetro se le somete a calentamiento por su lado derecho y se le sumerge en isopropanol. Debido al gradiente de temperatura a lo largo de la varilla, fue posible observar los diferentes regímenes en forma simultánea. En el extremo izquierdo de la varilla, la temperatura de superficie es sólo ligeramente

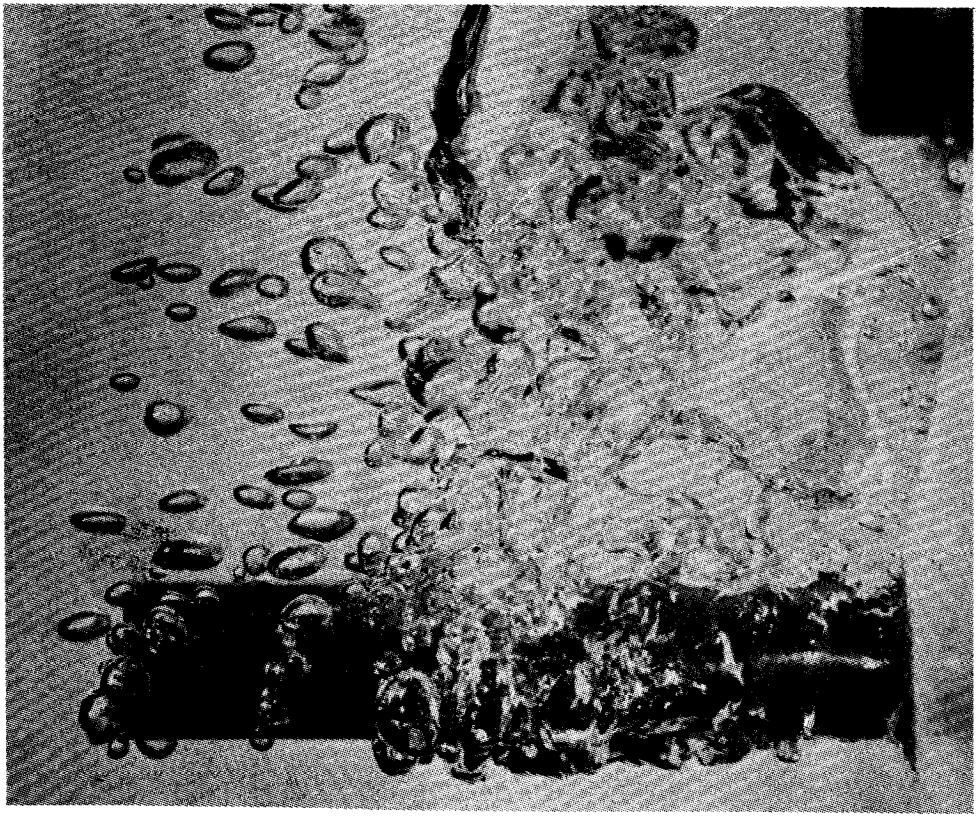
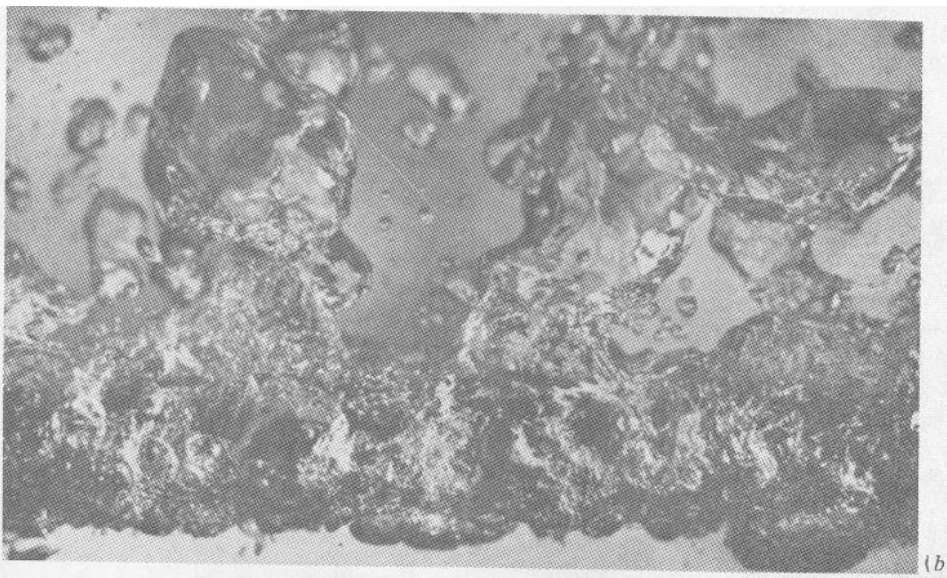
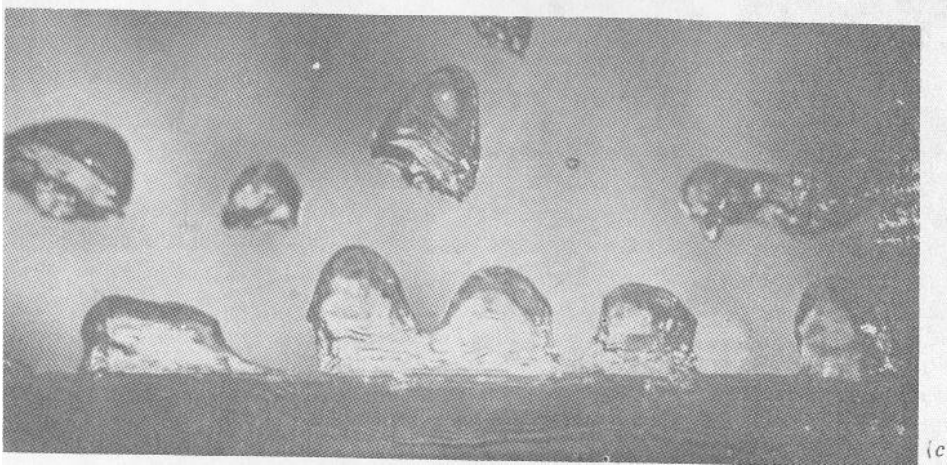


Fig. 9-4 Fotografía de una varilla de cobre de 0.25 plg. de diámetro a la cual se le calienta desde su lado derecho y se le sumerge en isopropanol de Haley y Westwater [17]; *(La fotografía es cortesía del Prof. J. W. Westwater.)*

(a)



(b)



(c)

mayor que la temperatura global del fluido, de modo que se observa ebullición por convección libre. Más hacia la de:-echa, se experimentan temperaturas superficiales mayores y se observa ebullición por nucleación. Aún más hacia la derecha, tiene lugar ebullición de transición; finalmente, en la pared se observa ebullición por película. Obsérvese la acción de recubrimiento de la película de vapor en la sección derecha de la varilla.

En la Fig. 9-5 se presentan fotografías más detalladas de los diferentes regímenes de ebullición utilizando metanol. La vigorosa acción de la ebullición por nucleación se ilustra en la Fig. 9-5*a*. A mayores temperaturas de superficie las burbujas comienzan a unirse y se observa ebullición de transición, tal como ocurre en la Fig. 9-56. Por último, a temperaturas aún mayores la superficie de transferencia de calor se encuentra completamente cubierta por una película de vapor y grandes burbujas de vapor se escapan de la superficie. La Fig. 9-6 presenta un fenómeno de ebullición de película aún más vigoroso, el del metano1 sobre un tubo ***vertical.*** La película de vapor se eleva de la superficie y en la parte superior del tubo desarrolla un comportamiento turbulento muy activo.

El proceso de crecimiento de burbujas es complejo, pero podemos proporcionar una sencilla explicación cualitativa del mecanismo físico. El crecimiento de burbujas tiene lugar cuando se conduce calor desde el líquido hacia la zona interfacial líquido-vapor. La evaporación ocurre en la zona interfacial incrementando así el volumen total del vapor. Suponiendo que la presión del líquido se conserva constante, la Ec. 9-32*a* requiere que la presión dentro de la burbuja se reduzca. A una reducción de la presión dentro de la burbuja corresponde una reducción en la temperatura del vapor y una mayor diferencia de temperaturas entre el líquido y el vapor, si la burbuja continua en su misma posición espacial en el líquido. Sin embargo, es muy probable que la burbuja ascienda de la superficie caliente y entre más se aleja menor será la temperatura del líquido. Una vez que la burbuja se ha movido hacia una región en la que la temperatura del líquido es menor que la del vapor, el calor saldrá de la burbuja y ésta se desintegrará. Por tanto, el proceso de crecimiento de burbujas puede alcanzar un equilibrio en algún punto del líquido o si éste se sobrecalienta lo suficiente, las burbujas ascenderán a la superficie antes de disiparse.

Existe una gran controversia sobre la manera exacta en que se forman inicialmente las burbujas sobre la superficie de transferencia de calor. Las condiciones de superficie -tanto la rugosidad como el tipo de material — pueden jugar un papel dominante en el drama de formación y crecimiento de las burbujas. El misterio no está completamente resuelto y continúa siendo objeto de una intensa investigación. Rohsenow [18], Leppert y Pitts [19] y Tong [23] han presentado excelentes compendios del estado de conocimientos que se tiene sobre la transferencia de calor por ebullición. Para una información más amplia que la ofrecida en este capítulo, enviamos al lector interesado a estos estudios. Wallis [28] ha presentado un estudio sobre problemas de transferencia de calor en flujo de dos fases:

Fig. 9-5 **Ebullición del metanol sobre un tubo de cobre horizontal de 9.53 mm de diámetro, calentado al vapor, según la Ref. 40: (*a*) ebullición por nucleación, $q/A = 242.5$ kW/m, $\Delta T_x = 37$ °C: (*b*) ebullición por transición, $q/A = 217.6$ kW/m², $\Delta T_x = 62$ °C; (c) ebullición por película, $q/A = 40.9$ kW/m², $\Delta T_x = 82$ °C. (*Fotografía por cortesía del Prof. J. W. Westwater.*)**

Fig. 9-6 Ebullición por película turbulenta de metanol en un tubo vertical de cobre de 19.05 mm de diámetro, calentado por vapor, de la Ref. 41; q/A = 38.8 kW/m², ΔT_x = 138 °C. ***(Fotografías por cortesía del Prof. J. W. Westwater.)***

Antes de presentar las relaciones específicas para el cálculo de la transferencia de calor por ebullición, se sugiere que el lector revise el estudio de las páginas precedentes y lo correlacione con algunas sencillas observaciones **experimentales** de ebullición. Para tal propósito, podrá ser bastante revelador un cuidadoso estudio del proceso de ebullición realizado por medio de una cazuela con agua sobre una estufa.

Rohsenow [5] correlacionó datos experimentales para ebullición por **nucleación** en estahque con la siguiente relación:

$$\frac{C_l \Delta T_x}{h_{fg} \Pr_l^s} = C_{sf} \left[\frac{q/A}{\mu_l h_{fg}} \sqrt{\frac{g_c \sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}} \right]^{0.33} \tag{9-33}$$

en donde c_l = calor especifico del líquido saturado, Btu/lb$_m$·°F o J/kg·°C
AT, = exceso de temperatura = $T_w - T_{sat}$, °F o °C
h_{fg} = entalpía de evaporación, Btu/lb$_m$ o J/kg
$\Pr_l$ = número de Prandtl del líquido saturado
q/A = flujo de calor por unidad de área, Btu/h·pie² o W/m²·°C

μ_l = **viscosidad del líquido,** $lb_m/h \cdot pie$ **o** $kg/m \cdot s$
σ = **tensión superficial de la zona interfacial líquido-vapor,** lb_f/pie **o** N/m
g = **aceleración de la gravedad,** $pies/s^2$ **o** m/s^2
ϱ_l = **densidad del líquido saturado,** lb_m/pie^3 **o** kg/m^3
ϱ_v = **densidad del vapor saturado,** lb_m/pie^3 **o** kg/m^3
C_{sf} = **constante, determinada por datos experimentales**
s = **1 .O para el agua y 1. '7 para otros líquidos**

Los valores de la tensión superficial se dan en la Ref. 10; y en la Tabla 9-1 se da una breve tabulación de tensión superficial de vapor-líquido para el agua.

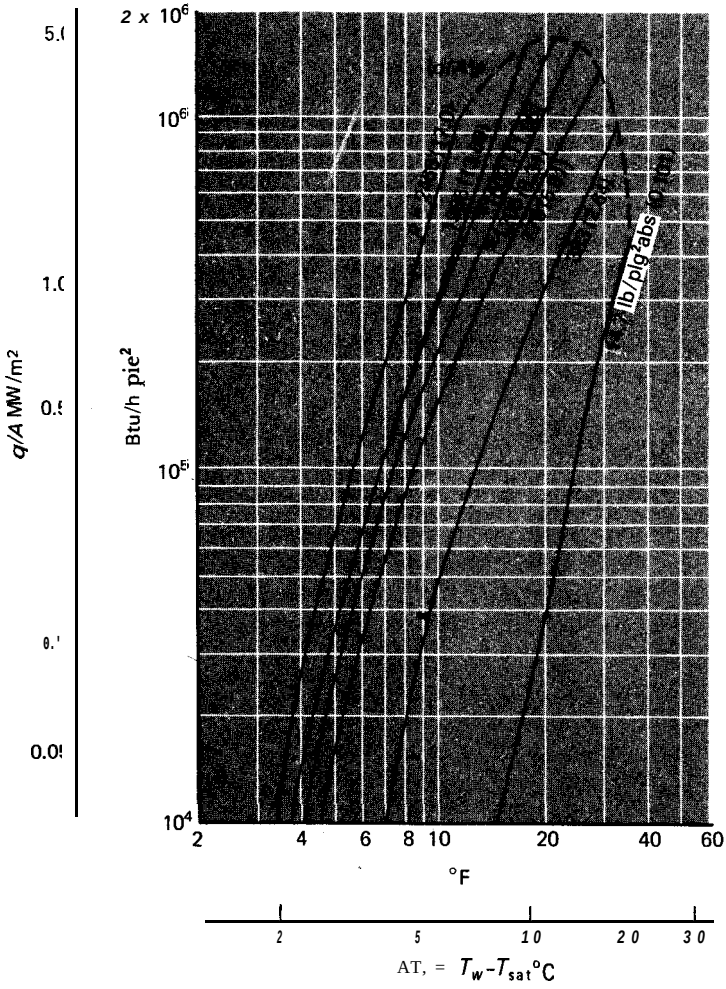


Fig. 9-7 Datos de flujo de calor para agua en ebullición sobre un alambre de platino, según la Ref. 3. Los números entre paréntesis son las presiones en meganewtons por metro cuadrado.

Tabla 9-1 Tensión superficial vapor-líquido para agua

Temperatura de saturación		*Tensión Superficial*	
°F	°C	$\sigma \times 10^4$, lb_f/pie^2	σ, mN/m
32	0	51.8	75.6
60	15.56	50.2	73.3
100	37.78	47.8	69.8
140	60	45.2	66.0
200	93.33	41.2	60.1
212	100	40.3	58.8
320	160	31.6	46.1
440	226.67	21.9	32.0
560	293.33	11.1	16.2
680	360	1.0	1.46
705.4	374.1	0	0

La forma funcional de la Ec. 9-33 se determinó analizando los parámetros significativos en el crecimiento y disipación de burbuja. En la Fig. 9-7 se muestran datos experimentales para ebullición por nucleación de agua sobre un alambre de platino; en la Fig. 9-8 se ve la correlación de estos datos por medio de la ecuación de Rohsenow la cual presenta una buena concordancia. Los valores de la constante C_{sf} para la combinación agua-platino es 0.013. La Tabla 9-2 presenta los valores para otras combinaciones fluido-superficie. La Ec. 9-33 puede usarse para otras geometrías que no sean alambres horizontales y en general se ha visto que la geometría no es un factor importante en la determinación de la transferencia de calor por ebullición en estanque. Esto era de esperarse debido a que la transferencia de calor depende principalmente de la formación y agitación de las burbujas, las cuales dependen del área superficial y no de la forma de la superficie. Vachon, Nix y Tanger [29] determinaron los valores de las constantes en la ecuación de Rohsenow para un gran número de combinaciones superficie-fluido. Existen varias circunstancias extenuantes que influyen en la determinación de las constantes.

Ejemplo 9-3

Una placa de bronce caliente se sumerge en un recipiente con agua a presión atmosférica. La temperatura de la placa es de 242 °F. Calcule la transferencia de calor por unidad de área de la placa.

Solución

podríamos resolver este problema determinando todas las propiedades que se usan en la Ec. 9-33 y determinando en forma subsecuente el flujo de calor. Un método alternativo es utilizar los datos de la Fig. 9-7 junto con la Tabla 9-2. Al escribir la Ec. 9-33, encontramos que si conocemos el flujo de calor para una combinación específica de agua-superficie, el flujo de calor para algunas de las otras superficies se podrá determinar fácilmente para las dos superficies en términos de las constantes C_{sf} ya que las propiedades del fluido en una

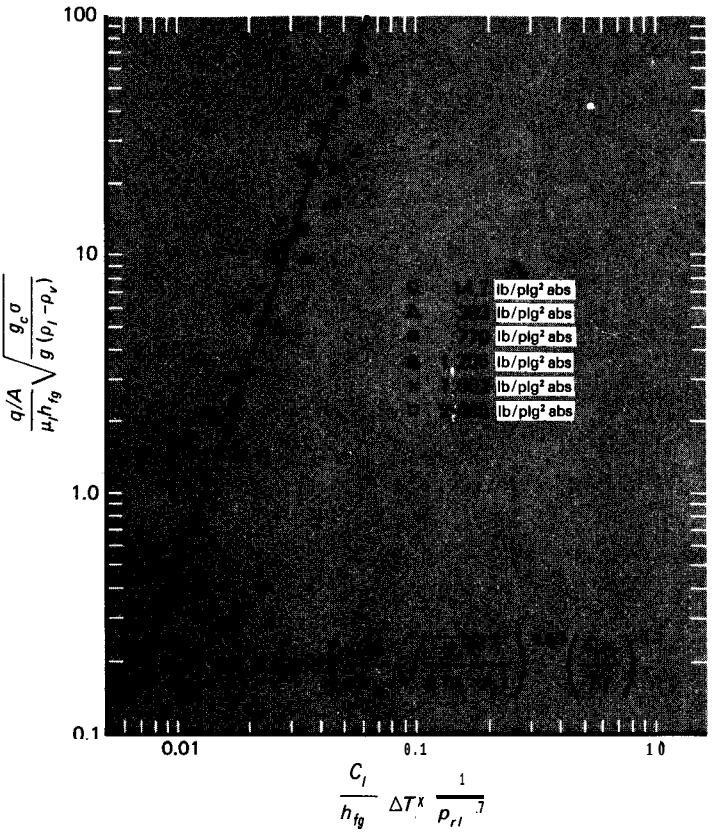


Fig. 9-8 Correlación de datos sobre ebullición en estanque por medio de la Ec. 9-33, de Rohsenow [5].

temperatura y presión dadas son las mismas sin considerar la superficie del material. De acuerdo con la Fig 9-7 el flujo de calor para la combinación agua-platino es

$$\frac{q}{A} = 3 \times 10^5 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \ [946.1 \text{ kW/m}^2]$$

ya que:

$$T_{ir} \sim T_{sat} = 242 \quad 212 = 30\ ^\circ\text{C}\ [16.7\ ^\circ\text{C}]$$

De la Tabla 9-2:

$$C_{sf} = \begin{cases} 0.013 & \text{para agua-platino} \\ 0.006 & \text{para agua-latón} \end{cases}$$

Consecuentemente:

$$\frac{(\ /A)\ \text{agua-latón}}{(q/A)\ \text{agua-platino}} = \left(\frac{C_{sf}\ \text{agua-platino}}{C_{sf}\ \text{agua-latón}}\right)^3$$

y

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{agua latón}} = (3 \times 10^5)\left(\frac{0.013}{0.006}\right)^3$$

$$= 3.4 \times 10^6 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \ [1.072 \times 10^7 \text{ W/m}^2]$$

Tabla 9-2 Valores del coeficiente C_{sf} para diferentes combinaciones líquido-superficie

Combinación flujo de calentamiento-supe	C_{sf}
Agua-cobre [11]*	0.013
Agua-platino [12]	0.013
Agua-latón [13]	0.0060
Agua-cobre pulido al esmeril [29]	0.0128
Agua-acero inoxidable moldeado y pulido [29]	0.0080
Agua-acero inoxidable atacado químicamente [29]	0.0133
Agua-acero inoxidable pulido mecánicamente [29]	0.0132
Agua-cobre pulido al esmeril y tratado con parafina [29]	0.0147
Agua-cobre rayado [29]	0.0068
Agua-acero inoxidable con inclusiones de teflón [29]	0.0058
Tetracloruro de carbono-cobre [11]	0.013
Tetracloruto de carbono-cobre pulido al esmeril [29]	0.0070
Benceno-cromo [14]	0.010
Alcohol *n*-butílico-cobre [11]	0.00305
Alcohol etílico-cromo [14]	0.027
Alcohol isopropflico-cobre [11]	0.00225
n-Pentano-cromo [14]	0.015
n-Pentano-cobre pulido al esmeril [29]	0.0154
n-Pentano-níquel pulido al esmeril [29]	0.0127
n-Pentano-cobre bruñido [29]	0.0049
n-Pentano-cobre frotado al esmeril [29]	0.0074
35% K,CO:,-cobre [11]	0.0054
50% K_2CO_3– cobre [11]	0.0027

* Los números entre paréntesis se refieren a la fuente de los datos.

Cuando se fuerza un líquido a través de un canal o sobre una superficie mantenida a una temperatura mayor a la de saturación del líquido, puede ocurrir ebullición por convección forzada en tubos lisos Rohsenow y Griffith [6] recomendaron que los efectos de la convección forzada se calculen con la relación de Dittus-Boelter del Cap. 6 (Ec. 6-4) y que este efecto se adicione al flujo de calor por ebullición calculado a partir de la Ec. 9-33. Así

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{ebullición}} + \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{convección forzada}} \tag{9-34}$$

Para calcular el efecto de convección forzada, se recomienda reemplazar en la ecuación de Dittus-Boelter el coeficiente 0.023 por 0.019. La diferencia de temperatura entre la pared y la temperatura global del líquido se utiliza para calcular el efecto de la convección forzada.

La ebullición por convección forzada no es necesariamente tan sencilla como podría indicarlo la Ec. 9-34. Esta ecuación generalmente se puede aplicar a situaciones de convección forzada en las que la temperatura global del líquido se sobreenfría, en otras palabras, para ebullición por convección forzada local. Una vez que se han alcanzado condiciones de ebullición de saturación o globales, la situación

cambia con rapidez. Eventualmente se encuentra un fenómeno de ebullición por nucleación desarrollado de modo completo, el cual es independiente de los efectos de velocidad de flujo o convección forzada. Se han presentado varias relaciones para el cálculo del flujo de calor en el estado de ebullición enteramente desarrollado. McAdams y cols. [21] sugirieron la siguiente relación para ebullición de agua a baja presión:

$$\frac{q}{A} = 2.253\ (\Delta T_x)^{3.96} \quad \text{W/m}^2 \quad \text{para } 0.2 < p < 0.7 \text{ MN/m}^2 \tag{9-35}$$

Para presiones mayores Levy [22] recomienda la relación

$$\frac{q}{A} = 283.2p^{4/3}\ (\text{AT}_{,,})^{"} \quad \text{W/m}^2 \quad \text{para } 0.7 < p < 14 \text{ MN/m}^2 \tag{9-36}$$

En estas ecuaciones AT, se encuentra en grados Celsius y p está en meganewtons por metro cuadrado.

Si se mantiene la ebullición para una longitud de tubo adecuada, la mayor parte del área de flujo se verá ocupada por vapor. En estas circunstancias el vapor puede fluir con rapidez en la porción central del tubo, mientras que a lo largo de la superficie exterior se vaporiza una película de líquido. A esta situación se le denomina *evaporación por convección forzada* y normalmente se trata como un tema en flujo y transferencia de calor en dos fases. En este interesante tema surgen varias complicaciones, algunas de las cuales han sido compendiadas por Tong [23] y Wallis [28].

El pico de.flujo de calor para una ebullición por nucleación en estanque ha sido indicado como el punto *a* en la Fig. 9-2 y por una línea punteada en la Fig. 9-7. Zuber [7] desarrolló una expresión analítica para el pico de flujo de calor en ebullición por nucleación, considerando la estabilidad de los requerimientos de la zona interfacial entre la capa de vapor y el líquido. Esta relación es

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{máx}} = \frac{\pi}{24} h_{fg} \rho_v \left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2}\right]^{1/4} \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{1/2} \tag{9-37}$$

en donde σ es la tensión superfical vapor-líquido. Esta relación concuerda muy bien con los datos experimentales. En general, el tipo de material de superficie no afecta el pico de flujo de calor aunque la limpieza de la superficie puede influir; las superficies sucias pueden causar un incremento en el valor del pico de aproximadamente 15%.

El pico de flujo de calor en ebullición por flujo es una situación más complicada, debido a que la rápida generación de vapor produce un complejo sistema de flujo de dos fases, que influye fuertemente en el pico de flujo de calor que se puede obtener en una superficie de transferencia de calor. Cerca de la superficie caliente se forma una capa delgada del liquido sobrecalentado, seguido de una capa que contiene tanto burbujas como liquido. El corazón del flujo está ocupado en su mayor parte por vapor. La transferencia de calor en la pared es afectada por el desarrollo de capa limite en esa región, así como por la rapidez en que la difusión de vapor y burbujas puede proceder en forma radial. Pueden surgir aún más complicaciones de las oscilaciones del flujo, las

cuales se generan bajo ciertas condiciones. Gambill [24] ha sugerido que el flujo de calor critico en ebullición por flujo se calcule por medio de una sobreposición del flujo de calor critico para ebullición en estanque (Ec. 9-37) y un efecto de convección forzada semejante al de la técnica empleada en la Ec. 9-34. Levy [25] ha considerado los efectos de la difusión de vapor sobre el pico de flujo de calor en ebullición por flujo y Tong [23] presenta un compendio de la información que se tiene sobre el tema.

Cuando chocan gotas de algún líquido sobre una superficie caliente, podemos observar un interesante fenómeno de pico de flujo de calor. Experimentos realizados con agua, acetona, alcohol y algunos freones indican que la máxima transferencia de calor para todos los fluidos se observa para casos de exceso de temperatura de cerca de 165 °C. El pico de flujo es una función de las propiedades del fluido y el componente normal de la velocidad del impacto. En la Ref. 30 se da una correlación de datos experimentales como

$$\frac{Q_{máx}}{_{PL}\, d^3\lambda} = 1.83 \times 10^{-3} \left(\frac{\rho_L^2 V^2 d}{\rho_{vf}\sigma g_c}\right)^{0.341} \tag{9-38}$$

donde $Q_{máx}$ = máxima tranferencia de calor por gota
ϱ_L = densidad de gotas del líquido
V = componente normal de la velocidad de impacto
ϱ_{vf} = densidad del vapor evaluada a la temperatura de la película $(T_w + T_{sat})/2$
σ = tensión de superficie
d = diámetro de la gota
λ = calor de evaporación modificado, definido por

$$\lambda = h, + c_{pv}\left(\frac{T_w - T_{sat}}{2}\right)$$

Aunque en esta ecuación no se especifica de inmediato, las rapideces de transferencia de calor por el choque de las gotas es muy alto y hasta un 50% de las gotas se evaporan durante el corto intervalo entre el impacto y el rebote. El caso de impacto de velocidad 0 es de mención histórica y se le llama el *fenómeno de Leidenfrost* [31]. Este caso puede observarse cuando las gotitas de agua sisean y bailan sobre una placa caliente. También se experimentan rapideces de transferencia de calor muy altas cuando un chorro de líquido choca sobre una superficie caliente, a la cual se le mantiene a temperatura significativamente mayores que la temperatura de saturación. Tanto el fenómeno de ebullición por nucleación como el de ebullición por película pueden observarse y las relaciones para el cálculo de las rapideces de transferencias de calor se presentan en la Ref. 36.

Sun y Lienhard [34] han presentado una relación para el pico de flujo de calor por ebullición sobre cilindros horizontales, la cual concuerda muy bien con los datos experimentales. La relación es

$$\frac{q''_{máx}}{q''_{máx\ F}} = 0.89 + 2.27 \exp(-3.44\sqrt{R'}) \quad \text{para } 0.15 < R' \tag{9-39}$$

en donde R' es un radio adimensional definido por

$$R' = R\left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{1/2}$$

y $q''_{máx_F}$ es el pico de flujo de calor sobre una placa horizontal infinita que en la Ref. 33 se ha derivado como

$$q''_{máx\ F} = 0.131\sqrt{\rho_v}\, h_{fg}[\sigma g(\rho_l \quad \rho_v)]^{1/4} \tag{9-40}$$

Aquí, σ es la tensión superficial.

Bromley [8] sugiere la siguiente relación para el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor, en la región estable de ebullición por película sobre un tubo horizontal:

$$h_b = 0.62\left[\frac{k_g^3 \rho_v(\rho_l \quad \rho_v) g(h_{fg} + 0.4c_{pv}\ \mathrm{AT},)}{d\mu_v\, \Delta T_x}\right]^{1/4} \tag{9-41}$$

en donde d es el diámetro del tubo. Este coeficiente de transferencia de calor considera sólo conducción a través de la película y no incluye los efectos de radiación. El coeficiente de transferencia de calor total puede calcularse a partir de la relación empírica

$$h = h_b\left(\frac{h_b}{h}\right)^{1/3} + h_r \tag{9-42}$$

en donde h_r es el coeficiente de transferencia de calor por radiación y se calcula suponiendo una emisividad unitaria para el líquido. Así

$$h_r = \frac{\sigma\epsilon(T_w^4 - T_{sat}^4)}{T_w - T_{sat}} \tag{9-43}$$

en donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y ϵ es la emisividad de la superficie. Obsérvese que la Ec. 9-42 requerirá una solución iterativa para el coeficiente de transferencia de calor total.

Las propiedades del vapor en la Ec. 9-41 se deberán evaluar a la temperatura de la película, definida por

$$T_f = \tfrac{1}{2}(T_w + T_{sat})$$

mientras que la entalpía de evaporación h_{fg} se evalúa a la temperatura de saturación.

9-6 Relaciones simplificadas para transferencia de calor por ebullición con agua

Se han desarrollado numerosas relaciones empíricas para estimar los coeficientes de transferencia de calor por ebullición para el agua. Algunas de las relaciones más simples son las que presentan Jakob y Hawkins [15] para agua en ebullición sobre el exterior de superficies sumergidas a presión atmosférica (Tabla 9-3). Estos coeficientes de transferencia de calor pueden modificarse a fin de tomar en cuenta la influencia de la presión, utilizando la relación empírica

$$h_p = h_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{0.4} \tag{9-44}$$

donde h_p **= coeficiente de transferencia de calor a cierta presión** p
h_1 **= coeficiente de transferencia de calor a presión atmosférica tal como lo determina la Tabla 9-3**
p **= presión del sistema**
p_1 **= presión atmosférica estándar**

Para ebullición por convección forzada local en el interior de tubos verticales se recomienda la siguiente relación [16]:

$$h = 2.54(\Delta T_x)^3 e^{p/1.551} \tag{9-45}$$

en donde AT, es la diferencia de temperatura en grados Celsius entre la superficie y el líquido saturado y p **es la presión en meganewtons por metro cuadrado. El coeficiente de transferencia de calor tiene como unidades watts por metro cuadrado por grados Celsius. La Ec. 9-45 es válida sobre un intervalo de presiones que va de 15 a 170 atm.**

Tabla 9-3 Relaciones simplificadas para coeficientes de transferencia de calor por ebullición de agua a presión atmosférica, adaptadas de la Ref. 15

AT, = T_w T_{sat}, °C

Superficie	$\frac{q}{A}$, kW/m²	h, W/m² · °C
Horizontal	$\frac{q}{A} < 16$	$1042\ (\Delta T_x)^{1/3}$
	$16 < \frac{q}{A} < 240$	$5.56\ (\Delta T_x)^3$
Vertical	$\frac{q}{A} < 3$	$537\ (\Delta T_{ax})^{1/7}$
	$3 < \frac{q}{A} < 63$	$7.96\ (\Delta T_x)^3$

Ejemplo 9-4

Agua a 5 atm fluye dentro de un tubo de 1 plg [2.54 cm] de diámetro bajo condiciones de ebullición local, donde la temperatura de la pared del tubo es 10 °C mayor que la de saturación. Estime la transferencia de calor en una longitud de tubo de 1.0 m.

Solución

Para este cálculo usamos la Ec. 9-45, observando que

$$\Delta T_x = 10\ ^\circ\text{C}$$
$$p = (5)(1.0132 \times 10^5\ \text{N/m}^2) = 0.5066\ \text{MN/m}^2$$

Se calcula entonces el coeficiente de transferencia de calor como

$$h = (2.54)(10)^3 e^{0.5066/1.551}$$
$$= 3521\ \text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad [620\ \text{Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

El área de superficie para una longitud de tubo de 1.0 m es

$$A = \pi\, dL = \pi(0.0254)(1.0) = 0.0798\ \text{m}^2$$

de manera que la transferencia de calor es

$$q = hA(T_w - T_{sat})$$
$$= (3521)(0.0798)(10) = 2810\ \text{W/m}$$

9-7 Resumen e información del diseño

Los fenómenos de ebullición y condensación son muy complicados, tal como lo mostramos en las secciones precedentes. Las ecuaciones presentadas en estas secciones pueden usarse para calcular los coeficientes de transferencia de calor para diversas geometrías y combinaciones de fluido-superficie. Para numerosas aplicaciones de diseños preliminares, sólo se requieren valores aproximados de flujo de calor o coeficiente de transferencia de calor y las Tablas 9-4 y 9-6 nos proporcionan compendios de dicha información. Por supuesto, que para el diseño final de un equipo de transferencia de calor se deberán obtener valores más exactos.

Preguntas de repaso

1. **¿Por qué en la condensación por tipo de goteo se experimentan rapideces de transferencia de calor más altas que en la condensación por película?**
2. **¿Cómo se define el número** de Reynolds para condensación Por película?
3. **¿Qué** se entiende Por ebulliciones sobreenfriada y saturada?
4. Haga la diferencia entre ebulliciones Por **nucleación** y por película.
5. **¿Cómo** se calcula la convección forzada?
6. (Por qué la radiación juega un papel importante en la transferencia de calor Por ebullición por película?

Tabla 9-4 Valores aproximados de coeficientes de transferencia de calor por condensanción para vapores a 1 atm, de acuerdo con las Refs. 3 y 45

Fluido	*Geometría*	h Btu/h·pie²·°F	h W/m²·°C	$T_v - T_w$, °C
Vapor	**Superficie vertical**	700-2000	4000-11300	22-3
	Tubos horizontales, 0.6 a 3.0 plg de diámetro	1700-4300	9600-24400	20-2
Difenilo	**Superficie vertical, turbulento 12 pies**	120-430	680-2400	72-13
	Tubo horizontal, 1.7 plg de diámetro	225-400	1280-2270	15-5
Dowtherm* A	**Superficie vertical, 12 pies, turbulento**	120-540	680-3060	40-20
Etanol	**Tubo horizontal, 6 plg.**	200-350	1130-2000	55-11
	Tubo horizontal 2.0 plg de diámetro	320-450	1800-2550	22-6
Propano1	**Tubo horizontal 2.0 plg de diámetro**	250-300	1400-1700	26-13
Butano1	**Tubo horizontal, 2.0 plg de diámetro**	250-300	1400-1700	26-13
Benceno	**Tubos horizontales, 0.6 a 1.3 plg de diámetro**	230-380	1300-2150	45-13

* Producto químico de temperatura de ebullición muy elevada, mezcla eutéctica de difenilo y óxido de difenilo. Se utiliza en las calderas por ser un vapor saturado de elevado calor latente. (N. del T.)

Tabla 9-5 Magnitudes relativas de coeficientes de transferencia de calor para ebullición por nucleación a 1 atm, con respecto al valor para agua, de acuerdo con la Ref. 42

Fluido	$\frac{h}{h_w}$
Agua	**1.0**
20% azúcar	0.87
10% Na_2SO_4	0.94
26% glicerina	0.83
55% **glicerina**	0.75
24% NaCl	0.61
Isopropanol	0.70
Metanol	0.53
Tolueno	0.36
Tetracloruro **de carbono**	0.35
n- Butano1	0.32

Tabla 9-6 Flujo de calor de agotamiento aproximado 1 atm, de acuerdo con las Refs. 3, 43 y 44

Combinación fluido-superficie	$(q/A)_{máx}$ Btu/h pie² x 10^{-3}	$(q/A)_{máx}$ kW/m²	ΔT_x, °C
Agua, cobre	200-270	620-850	
Cobre cromado	300-400	940– 1260	23-28
Acero	410	1290	30
Benceno, cobre	43.5	130	
Aluminio	50.5	160	
Propanol, cobre niquelado	67-110	210–340	42-50
Butanol, cobre, niquelado	79-105	250-330	33-39
Etanol, aluminio	55	170	
Cobre	80.5	250	
Metanol, cobre	125	390	
Cobre cromado	111	350	
Acero	125	390	
H_2 líquido	9.53	30	2
N_2 liquido	31.7	100	11
O_2 líquido	47.5	150	11

Problemas

9-1 Usando la Ec. 9-28 como punto de partida, desarrolle una expresión para el coeficiente de transferencia de calor promedio en condensación turbulenta, en función solamente de las propiedades del fluido, longitud de la placa y diferencia de temperaturas: es decir, elimine el número de Reynolds de la Ec. 9-28 para obtener una relación similar a la Ec. 9-10 para condensación laminar.

9-2 Muestre que el número de Reynolds para condensación laminar en unr placa vertical puede expresarse por

$$\mathrm{Re}_f = 3.77 \left[\frac{L^3 (T_v - T_w)^3 \rho_f (\rho_f - \rho_v) g k_f^3}{\mu_f^5 h_{fg}^3} \right]^{1/4}$$

9-3 Trace las Ecs. 9-26 y 9-28 como

$$\log \left\{ \bar{h} \left[\frac{\mu_f^2}{k_f^3 \rho_f (\rho_f - \rho_v) g} \right]^{1/3} \right\}$$

contra log Re_f. Explique esta gráfica.

9-4 Se usa un arreglo cuadrado de 400 tubos ¼ plg para condensar vapor a presión atmosférica. Las paredes de los tubos se mantienen a 88 °C por un fluido refrigerante que fluye dentro

de los tubos. Calcule la cantidad de vapor condensado por hora y unidad de longitud de los tubos.

9-5 Una placa vertical de 30 cm de ancho y 1.2 m de altura se mantiene a 70 °C y se expone a vapor saturado a 1 atm. Calcule la transferencia de calor y la masa total de vapor condensado por hora.

9-6 En el exterior de un tubo horizontal de 1 plg de diámetro se condensa vapor saturado a 100 lb/plg² abs. La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 280 °F. Calcule el coeficiente de transferencia de calor y el flujo condensado por unidad de longitud de tubo.

9-7 Desarrolle una expresión para el flujo total condensado en una película turbulenta en términos de las propiedades del fluido, diferencia de temperaturas y dimensiones de la placa.

9-8 Una tubería sin aislamiento que conduce agua fría a 2 °C pasa a través de un área caliente y húmeda en una fábrica, donde la temperatura es de 35 °C y la humedad relativa es 80% debido al equipo operado por el vapor en la fábrica. Si la tubería tiene 5 cm de diámetro y la longitud expuesta es 7.5 m, estime el condensado que se desprenderá de la tubería. Para ello, suponga que la tubería está expuesta a vapor saturado a la presión parcial del vapor de agua en el aire.

9-9 Una cierta olla de presión está diseñada para operar a 20 lb/plg² manométricas. Es bien sabido que la comida se cocina con mayor rapidez en estos dispositivos debido a la temperatura superior del vapor a mayor presión. Considere una comida como un cilindro horizontal de 4 plg de diámetro a una temperatura de 95 °F cuando se coloca en la olla. Calcule el porcentaje de aumento en transferencia de calor en este cilindro para la condición de 20 lb/plg² manométricas, comparada con la condensación en el cilindro a la presión atmosférica estándar.

9-10 Una placa vertical caliente a la temperatura de 107 °C se sumerge en un tanque de agua expuesto a presión atmosférica. La temperatura del agua es de 100 °C y ocurre ebullición en la superficie de la placa. El área de la placa es de 0.3 m². ¿Cuál es el calor perdido por la placa en watts?

9-11 La tensión superficial del agua a 212 °F es 58.8 dyn/cm para el vapor en contacto con el líquido. Suponiendo que el vapor saturado en el interior de una burbuja está a 213 °F mientras que el líquido saturado circundante está a 212 °F, calcule el tamaño de la burbuja.

9-12 Suponiendo que la burbuja del Prob. 9-11 se mueve a través del líquido a una velocidad de 4.5 m/s, estime el tiempo que se requiere para enfriarla burbuja 0.3 °C, calculando el coeficiente de transferencia de calor para flujo sobre una esfera y usando esto en un análisis de capacidad global como se describió en el Cap. 4.

9-13 Una placa cuadrada de cobre de 30 por 30 cm se calienta y sirve como el fondo para un caldero de agua a 1 atm de presión. La temperatura de la placa se mantiene a 117 °C. Estime el calor transferido por hora por la placa.

9-14 En un tubo de bronce de 1.25 cm de diámetro fluye agua a 1 atm y a la velocidad de 1.2 m/s. La pared del tubo se mantiene a 110 °C y la temperatura global promedio del agua es 96 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor por unidad de longitud de tubo.

9-15 Se dispone de una olla con fondo plano de 30 cm de diámetro. Se desea hervir 2.3 kg/h de agua a presión atmosférica en esta olla. ¿A qué temperatura debe mantenerse la superficie del fondo de la olla para realizar esto?

9-16 Una barra de acero de 1.25 cm de diámetro y 5 cm de largo se extrae de un horno a 1200 °C y se coloca en un recipiente de agua a presión atmosférica. Estime la rapidez de transferencia de calor de la barra cuando entra en el agua.

9-17 Compare los coeficientes de transferencia de calor para ebullición nucleada en agua, como se muestra en la Fig. 9-7, con las relaciones simplificadas que se dan en la Tabla 9-3.

9-18 Usando las Ecs. 9-14 y 9-17, desarrolle la Ec. 9-26.

9-19 En el exterior de un tubo horizontal de 1 plg de diámetro se condensa vapor saturado a 100 lb/plg^2 abs. La pared del tubo se mantiene a 280 °F. Calcule el coeficiente de transferencia de calor y el flujo de condensado por unidad de longitud de tubo. Tome $T_{sat} = 328$ °F y $h_{fg} = 889$ Btu/lb.

9-20 Estime el pico de flujo de calor para ebullición de agua a presión atmosférica normal.

9-21 Una barra caliente de cobre de 5 mm de diámetro se sumerge en agua a 1 atm. El exceso de temperatura es ll °C. Estime la pérdida de calor por unidad de longitud de la barra.

9-22 Compare los coeficientes de transferencia de calor para agua en ebullición y vapor en condensación sobre un tubo horizontal, para presión atmosférica normal.

9-23 Los coeficientes de transferencia de calor para ebullición son en general superiores comparados con los de convección ordinaria. Estime la velocidad de flujo que sería necesaria para producir un valor de h para convección forzada a través de un tubo liso de bronce de 6.4 mm de diámetro, comparable al que se obtendría por ebullición en estanque con AT, = 16.7 °C, $p =$ 100 lb/plg^2 abs y agua como fluido. Véase el Prob. 9-19 para datos de las propiedades.

9-24 Un alambre de platino se sumerge en agua saturada a 5.3 MN/m^2. ¿Cuál es el flujo de calor para un exceso de temperatura de ll °C?

9-25 Un tubo horizontal que tiene un diámetro externo de 1.25 m se sumerge en agua a 1 atm y 100 °C. Calcule el flujo de calor para temperaturas superficiales de *a)* 540 °C, *b) 650* °C *y c) 800* °C. Suponga $\epsilon = 0.8$ y use la Ec. 9-41.

9-26 Se va a diseñar un condensador para condensar 1.3 kg/s de vapor a presión atmosférica. Se va a usar un arreglo cuadrado de tubos de 1.25 cm de diámetro externo, cuyas paredes se mantendrán a 93 °C. El espacio de los tubos es de 1.9 cm entre centros y su longitud es 3 veces la dimensión del cuadrado. ¿Cuántos tubos se necesitan para el condensador y cuáles son las dimensiones exteriores?

9-27 Calcule el pico de flujo de calor para agua en ebullición a presión atmosférica en un cilindro horizontal de 1.25 cm de diámetro externo. Use la relación de Lienhard.

9-28 Compare el flujo de calor calculado a partir de las relaciones sencillas de la Tabla 9-3 con la curva para presión atmosférica en la Fig. 9-7. Haga la comparación para dos o tres valores del exceso de temperatura.

9-29 Dentro de un tubo de 2 cm de diámetro fluye agua a 4 atm de presión bajo condiciones de ebullición local donde la temperatura de pared del tubo es de 12 °C por encima de la temperatura de saturación. Estime la transferencia de calor en un tubo de 60 cm de longitud.

9-30 Estime el flujo de calor para la ebullición nucleada en estanque, para agua a 1 atm en contacto con acero inoxidable áspero y pulido y $AT, = 30$ °F.

9-31 Una placa de 40 por 40 cm está inolinada en un ángulo de 30° con la vertical y está expuesta a vapor de agua a 1 atm. La placa se mantiene a 98 °C. Calcule las rapideces de transferencia de calor y flujo de masa del condensado.

9-32 Estime el coeficiente de transferencia de calor para la ebullición nucleada en estaque para una mezcla de agua y glicerina con 26% de agua a 1 atm, en contacto con una superficie de cobre y AT, = 15 "C.

9-33 Compare las Ecs. 9-35 y 9-36 con la Ec. 9-45.

9-34 Se diseña un cambiador de calor para condensar 1400 lb_m/h de vapor a presión atmosférica. Se dispone para ello de un arreglo cuadrado de 400 tubos de 0.5 plg de diámetro y la temperatura de pared de tubo se mantendrá a 97 °C. Estime la longitud de tubos que se requiere.

9-35 Se usan barras de cobre de 1.0 plg de diámetro calentadas eléctricamente para producir vapor a 5 lb/plg^2 manométricas en un arreglo para la ebullición nucleada en estanque donde AT, = 4 °C. Estime la longitud de barra necesaria para producir 2000 lb_m/h de vapor saturado.

9-36 Se rocía agua en forma de gotas de 4 mm y a la rapidez de 1 L/h sobre una superficie caliente a 280 °C, con una velocidad de impacto de 3 m/s s Estime la transferencia de calor máxima que puede lograrse con este arreglo.

9-37 Cierta caldera utiliza 100 tubos de 2 cm de diámetro y 1 m de largo. La caldera está diseñada para producir ebullición local por convección forzada de agua a 3 MN/m^2 de presión con AT, = 10 °C. Estime la rapidez de transferencia de calor total y la cantidad de vapor saturado que puede producirse a 3 MN/m^2.

9-38 Entra vapor saturado a 1 atm a un tubo horizontal de 5 cm de diámetro y 1.5 m de longitud. Estime la condensación para una temperatura de pared del tubo de 98 °C.

9-39 Un tubo horizontal de 3 mm de diámetro y 7.5 cm de longitud se sumerge en agua a 1.6 atm. Calcule la temperatura superficial necesaria para generar un flujo de calor de 0.2 MW/m^2.

Referencias

1 Nusselt, W.: Die Oberflachenkondensation des Wasserdampfes, *VDZ Z.*, vol. 60, p. 541, 1916.

2 Kirkbride, C. G.: Heat Transfer by Condensing Vapors on Vertical Tubes, *Trans. AIChE*, vol. 30, p. 170, 1934.

3 McAdams, W. H: "Heat Transmission," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

4 Kern, D. Q.: "Process Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1950.

5 Rohsenow, W. M.: A Method of Correlating Heat Transfer Data for Surface Boiling Liquids, *Trans. ASME*, vol. 74, p. 969, 1952.

6 Rohsenow, W. M., and P. Griffith: Correlation of Maximum Heat Flux Data for Boiling of Saturated Liquids, *AIChE-ASME Heat Transfer Symp., Louisville, Ky., 1955.*

7 Zuber, N.: On the Stability of Boiling Heat Transfer, *Trans. ASME*, vol. 80, p. 711, 1958.

8 Bromley, L. A.: Heat Transfer in Stable Film Boiling, *Chem. Eng. Prog.*, vol. 46, p. 221, 1950.

9 Farber, E. A., and E. L. Scorah: Heat Transfer to Water Boiling under Pressure, *Tmns. ASME*, vol. 70, p. 369, 1948.

10 "Handbook of Chemistry and Physics," Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1960.

11 Piret, E. L., and H. S. Isbin: Natural Circulation Evaporation Two-Phase Heat Transfer, *Chem. Eng. Prog.*, vol. 50, p. 305, 1954.

12 Addoms, J. N.: Heat Transfer at High Rates to Water Boiling outside Cylinders, Sc.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.

13 Cryder, D. S., and A. C. Finalbargo: Heat Transmission from Metal Surfaces to Boiling Liquids: Effect of Temperature of the Liquid on Film Coefficient, *Trans. AIChE*, vol. 33, p. 346, 1937.

14 Cichelli, M. T., and C. F. Bonilla: Heat Transfer to Liquids Roiling under Pressure, *Trans. AIChE*, vol. 41, p. 755, 1945.

15 Jakob, M., and G. Hawkins: "Elements of Heat Transfer," 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
16 Jakob, M.: "Heat Transfer," vol. 2, p. 584, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
17 Haley, K. W., and J. W. Westwater: Heat Transfer from a Fin to a Boiling Liquid, *Chem. Eng. Sci.*, vol. *20*, p. 711, 1965.
16 Rohsenow, W. M. (ed.): "Developments in Heat Transfer," The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1964.
19 Leppert, G., and C. C. Pitts: Boiling, *Adv. Heat Transfer*, vol. 1, 1964.
20 Gebhart, B.: "Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
21 McAdams, W. H., et al.: Heat Transfer at High Rates to Water with Surface Boiling, *Ind. Eng. Chem.*, vol. 41, pp. 1945–1955, 1949.
22 Levy, S.: Generalized Correlation of Boiling Heat Transfer, *J. Heat Transfer*, vol. 81C, pp. 37–42, 1959
23 Tong, L. S.: "Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
24 Gambill, W. R.: Generalized Prediction of Burnout Heat Flux for Flowing, Subcooled, Wetting Liquids, *AIChE Rep.* 17, *5th Nat. Heat Tmnsfer Conf., Houston, 1962.*
25 Levy, S.: Prediction of the Critica1 Heat Flux in Forced Convection Flow, *USAEC Rep.* 3961, 1962.
26 Schmidt, E., W. Schurig, and W. Sellschop: Versuche über die Kondensation von Wasserdampf in Film- und Tropfenform, *Tech. Mech. Thermodyn. Bull.*, vol. 1, p. 53, 1930.
27 Citakoglu, E., and J. W. Rose: Dropwise Condensation: Some Factors Influencing the Validity of Heat Transfer Measurements, *Znt. J. Heat Mass Transfer*, vol. ll, p. 523, 1968.
26 Wallis, G. B.: "Cne-dimensional Two-Phase Flow." McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
29 Vachon, R. I., G. H. Nix, and G. E. Tanger: Evaluation of Constants for the Rohsenow Pool-Boiling Correlation, *J. Heat Transfer*, vol. 90, p. 239, 1968.
30 McGinnis, F. K., and J. P. Holman: Individual Droplet Heat Transfer Rates for Splattering on Hot Surfaces, *Znt. J. Heat Mass Transfer*, vol. 12, p. 95, 1969.
31 Bell, K. J.: The Leidenfrost Phenomenon: A Survey, *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, no. 79, p. 73, 1967.
32 Rohsenow, W. M.: Nacleation with Boiling Heat Transfer, *ASME Pap.* 70-HT-18.
33 Zuber, N., M. Tribus, and J. W. Westwater: The Hydrodynamic Crises in Pool Boiling of Saturated and Subcooled Liquids, *Znt. Dev. Heat Transfer*, pp. 230–235, 1963.
34 Sun, K. H., and J. H. Lienhard: The Peak Boiling Heat Flux on Horizontal Cylinders, *Int. J. Heat Mass Trans.*, vol. 13, p. 1425, 1970.
35 Graham, C., and P. Griffith: "Drop Size Distributions and Heat Transfer in Dropwise Condensation," *Znt. J. Heat Mass Tmnsfer*, vol. 16, p. 337, 1973.
36 Ruch, M. A., and J. P. Holman: Boiling Heat Transfer to a Freon-113 Jet Impinging upward onto a Flat Heated Surface, *Znt. J. Heat Mass Tmnsfer*, vol. 18, p. 51, 1974.
37 Rohsenow, W. M.: Film Condensation, chap. 12 in "Handbook of Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
38 Chato, J. *C.: J. Am. Soc. Refrig. Air Cond. Eng.*, February 1962, p. 52.
39 Akers, W. W., H. A. Deans, and 0. K. Crosser: Condensing Heat Transfer within Horisontal Tubes, *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, vol. *55, no. 29*, p. 171, 1958.
40 Westwater, J. W., and J. G. Santangelo: *Znd. Eng. Chem.*, vol. 47, p. 1605, 1955.
41 Westwater, J. W.: *Am. Sci.*, vol. 47, p. 427, 1959, photo by Y. Y. Hsu.
42 Fritz, W.: Verdampfen und Kondensieren, *Z. VDZ, Beih. Verfahrenstech.*, no. 1, 1943.
43 Sauer, E. T., Cooper, H. B., and W. H. McAdams: Heat Transfer to Boiling Liquids, *Mech. Eng.*, vol. 60, p. 669, 1938.
44 Weil, L.: Échanges thermiques dans les liquides bouillants, *Fourth Znt. Congr. Znd. Heating*, group 1, sec. 13, Rep. 210, Paris, 1952.
45 Chilton, T. H., A. P. Colbum, R. P. Genereaux, and H. C. Vemon: *Tmns. ASME, Pet. Mech. Eng.*, vol. 55, p. 7, 1933.

10
Cambiadores de Calor

10-1 Introducción

La aplicación de los principios de transferencia de calor al diseño de equipo a fin de cumplir con cierto objetivo ingenieril es de importancia extrema, ya que al aplicar estos principios al diseño el individuo trabaja en la importante meta del desarrollo de un producto para beneficio económico. A la larga, la economía juega un papel clave en el diseño y selección de equipo de intercambio de calor, y el ingeniero deberá tenerlo en cuenta cuando trabaje sobre cualquier nuevo problema de diseño de transferencia de calor. El peso y tamaño de los cambiadores de calor que se usan en aplicaciones espaciales o aeronáuticas son parámetros muy importantes y en estos casos las consideraciones de costo, en lo que se refiere a costos de materiales y construcción del cambiador de calor, están subordinadas; sin embargo, el peso y tamaño son factores de costo importantes en la aplicación global en estos campos y por tanto, deben también considerarse como variables económicas.

Una aplicación específica nos proporcionará las reglas a seguir si queremos obtener el mejor diseño en relación con consideraciones económicas, tamaño, peso, etc. Un análisis de todos estos factores está fuera del alcance de nuestro presente estudio, pero no está de más recordar que en la práctica se les deberá tener en cuenta. Nuestro estudio de cambiadores de calor tomará la forma de un análisis técnico, es decir, se delinearán los métodos para predecir el rendimiento de los cambiadores de calor, así como una exposición de los métodos que se pueden usar en la estimación del tamaño del cambiador y el tipo necesario para realizar una tarea específica. A este respecto limitaremos nuestro estudio a cambiadores en los que las principales formas de transferencia de calor son por conducción y convección. Esto no implica que la radiación no sea importante en el diseño de cambiadores de calor, de hecho en muchas de las aplicaciones espaciales para efectuar una transferencia de energía, éste es el medio disponible que predomina. Para obtener una información detallada sobre el diseño de cambiadores de calor por radiación remitimos al lector a los estudios de Siega1 y Howell [1] y Sparrow y Cess [7].

10-2 El coeficiente de transferencia de calor total

Ya hemos estudiado en la Sec. 2-4 el coeficiente de transferencia de calor total con transferencia de calor a través de la pared plana de la Fig. 10-1, expresada como

$$q = \frac{T_A - T_B}{1/h_1A + \Delta x/kA + 1/h_2A} \tag{10-1}$$

en donde T_A y T_B son las temperaturas del fluido en ambos lados de la pared. El coeficiente de transferencia de calor total U se define por medio de la relación

$$q = UA\,\Delta T_{\text{total}} \tag{10-2}$$

Desde el punto de vista de diseño de cambiadores de calor, la pared plana es de aplicación no frecuente; un caso a considerar, de mucha mayor importancia, sería el del cambiador de calor con tubería doble que se muestra en la Fig. 10-2. En esta aplicación un fluido fluye por el interior del tubo de menor calibre mientras que el otro fluye por el espacio anular entre los dos tubos. Los coeficientes de convección se calculan por medio de los métodos descritos en los capítulos precedentes y la transferencia de calor total se obtiene a partir de la red térmica en la Fig. 10-2*b* como

$$q = \frac{T_A - T_B}{\dfrac{1}{h_iA_i} + \dfrac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{1}{h_oA_o}} \tag{10-3}$$

en donde los subíndices i y o corresponden al interior y exterior del tubo interior, el cual es de menor calibre. El coeficiente de transferencia de calor se puede basar a discreción del diseñador, en el área interior o exterior del tubo. De acuerdo con esto,

$$U_i = \frac{1}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{A_i \ln (r_o/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{A_i}{A_o}\dfrac{1}{h_o}} \tag{10-4a}$$

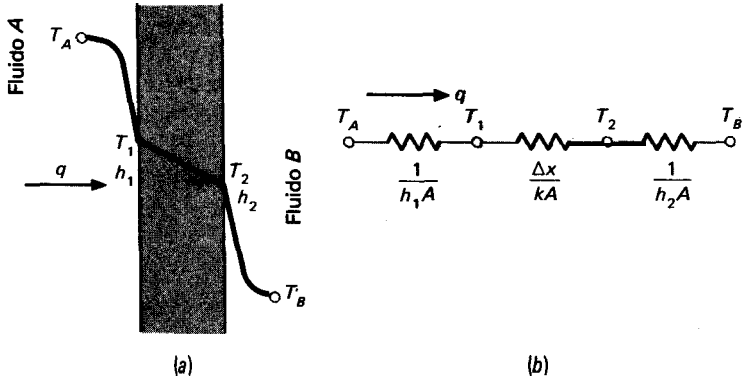


Fig. 10-1 Transferencia de calor total a través de una pared plana.

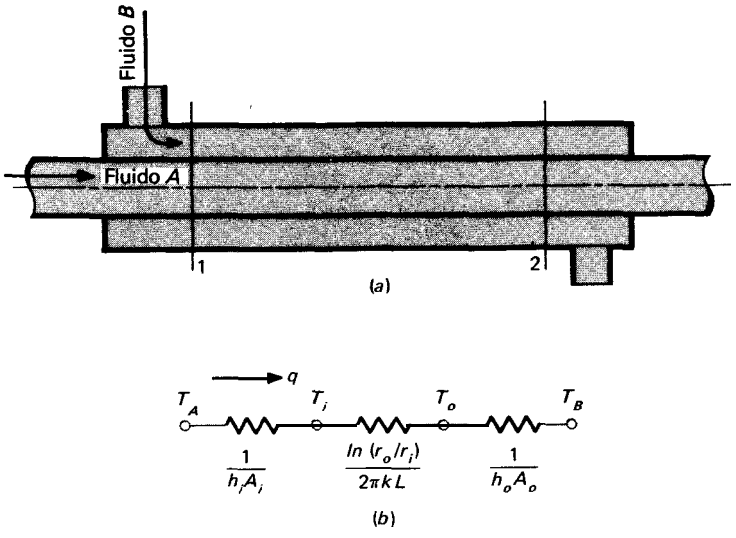


Fig. 10-2 Cambiador de calor de tubería doble: (*a*) esquemático; (*b*) red de resistencias térmicas para transferencia de calor total.

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i}\frac{1}{h_i} + \frac{A_o \ln (r_o/r_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o}} \qquad (10\text{-}4b)$$

Aunque los diseños definitivos de cambiadores de calor se harán en base a cuidadosos cálculos de U, es de gran ayuda tener la tabla de valores del coeficiente de transferencia de calor total para diversas situaciones que pueden encontrarse en la práctica. En las Refs. 5 y 6 se proporciona amplia información sobre este tema y una lista abreviada de valores de U aparece en la Tabla 10-l. Debemos advertir que el valor de U en muchos casos está determinado sólo por uno de los coeficientes de transferencia de calor. En la mayor parte de los problemas, la resistencia de conducción es pequeña comparada con las resistencias de convección.

Entonces, si uno de los valores de h es mucho menor que el otro, tenderá a dominar la ecuación para U. Los Ejs. 10-l y 10-2 ilustran este concepto.

Ejemplo 10-l

Agua a 98 °C fluye a través de una tubería horizontal de acero de 2 plg, Céd. 40 [k = 54 W/m·°C] la cual se expone al aire atmosférico a 20 °C. La velocidad del aire es de 25 cm/s. Calcule el coeficiente de calor total para esta situación, basándose en el área exterior de la tubería.

Solución

Según el Apéndice A las dimensiones de una tubería de acero de 2 plg, Céd. 40 son

Tabla 10-1 Valores aproximados de los coeficientes de transferencia de calor total

Situación física	U Btu/h · pie² · °F	U W/m² · °C
Pared exterior de ladrillo, interior enyesado, sin aislante	0.45	2.55
Pared exterior de madera, interior enyesado: sin aislante	0.25	1.42
Ventana con vidrio plano	0.07	0.4
Con fibra de vidrio como aislante	1.10	6.2
Ventana con doble vidrio plano	0.40	2.3
Condensador de vapor	200-1000	1100-5600
Calentador de alimentación de agua	200–1500	1100-8500
Condensador de freón 12 con enfriador de agua	50-150	280-850
Cambiador de calor agua a agua	150-300	850–1700
Cambiador de calor con tubería con aletas, agua en los tubos, aire a través de ellos	5-10	25-55
Cambiador de calor agua a aceite	20–60	110-350
Vapor a aceite combustible ligero	30-60	170-340
Vapor a aceite combustible pesado	10-30	56-170
Vapor a petróleo destilado o gasolina	50-200	280-1140
Cambiador de calor con tubería con aletas, vapor en los tubos y aire sobre ellos	5-50	28-280
Condensador de amoníaco, agua en los tubos	150-250	850-1400
Condensador de alcohol, agua en los tubos	45-120	255-680
Cambiador de calor gas a gas	2-8	10-40

Diámetro interno = 2.067 plg = 0.0525 m

Diámetro externo = 2.375 plg = 0.06033 m

El coeficiente de transferencia de calor para el agua en el interior de la tubería se determina a partir de las condiciones de flujo con propiedades evaluadas a la magnitud de temperatura. El coeficiente de transferencia de calor convección libre en el exterior de la tubería depende de la diferencia de temperatura entre la superficie y el aire ambiental. Esta diferencia de temperatura depende de¡ balance total de energía. Primero evaluamos h_i y en seguida formulamos un procedimiento iterativo para determinar h_o.

Las propiedades del agua a 98 °C son

$$\rho = 960 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu = 2.82 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.68 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 1.76$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(960)(0.25)(0.0525)}{2.82 \times 10^{-4}} = 44680 \qquad (a)$$

y como encontramos flujo turbulento, podemos usar la Ec. 6-4

$$\text{Nu} = 0.023\ \text{Re}^{0.8}\ \text{Pr}^{0.4}$$
$$= (0.023)(44{,}680)^{0.8}(1.76)^{0.4} = 151.4$$

$$h_i = \text{Nu}\frac{k}{d} = \frac{(151.4)(0.68)}{0.0525} = 1961\ \text{W/m}^2\cdot\text{C}\quad [345\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F}] \qquad (b)$$

Para longitud unitaria de tubería la resistencia térmica del acero es

$$R_s = \frac{\ln (r_o/r_i)}{2\pi k} = \frac{\ln (0.06033/0.0525)}{2\pi(54)} = 4.097 \times 10^{-4} \qquad (c)$$

Una vez más, con base en la unidad de longitud, la resistencia térmica en el interior es

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i 2\pi r_i} = \frac{1}{(1961)\pi(0.0525)} = 3.092 \times 10^{-3} \qquad (d)$$

La resistencia térmica para la superficie exterior sigue siendo desconocida pero se escribe, por longitudes unitarias

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o} \qquad (e)$$

De la Tabla 7-2, para el flujo laminar, la relación simplificada para h_o es

$$h_0 = 1.32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4} = 1.32\left(\frac{T_o - T_\infty}{d}\right)^{1/4} \qquad (f)$$

en donde T_o es la temperatura desconocida de la superficie exterior de la tubería. Designamos como T_i la superficie interior de la tubería y la temperatura del agua como T_w; entonces el equilibrio de energía requiere que

$$\frac{T_w - T_i}{R_i} = \frac{T_i - T_o}{R_s} = \frac{T_o - T_\infty}{R_o} \qquad (g)$$

Combinando las Ecs. e y f nos da

$$\frac{T_o - T_\infty}{R_o} = 2\pi r_o \frac{1.32}{d^{1/4}}(T_o - T_\infty)^{5/4} \qquad (h)$$

Esta relación se puede introducir en la Ec. g para obtener dos ecuaciones con las dos incógnitas T_i y T_o

$$\frac{98 - T_i}{3.092 \times 10^{-3}} = \frac{T_i - T_o}{4.097 \times 10^{-4}}$$

$$\frac{T_i - T_o}{4.097 \times 10^{-4}} = \frac{(\pi)(0.06033)(1.32)(T_o - 20)^{5/4}}{(0.06033)^{1/4}}$$

Este es un conjunto no lineal que se puede resolver por interación para obtener

$$T_o = 97.6^\circ\text{C} \qquad Ti = 97.65\ ^\circ\text{C}$$

Como resultado, el coeficiente de transferencia de calor exterior y la resistencia térmica son

$$h_o = \frac{(1.32)(97.6 - 20)^{1/4}}{(0.06033)^{1/4}} = 7.91\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}\quad [1.39\ \text{Btu/h pie}^2\cdot{}^\circ\text{F}]$$

$$R_o = \frac{1}{(0.06033)(7.91)\pi} = 0.667$$

El cálculo muestra con claridad el hecho de que la convección libre rige la transferencia de calor total debido a que R_o es mucho mayor que R, o R_s. El coeficiente de transferencia de calor basado en el área exterior se escribe en términos de estas resistencias como

$$U_o = \frac{1}{R_i A_o/A_i + A_o R_s + R_o} \qquad (i)$$

Insertando los valores numéricos,

$$U_o = \frac{1}{(3.092 \times 10^{-3})\dfrac{0.06033}{0.0525} + \pi(0.0633)(4.097 \times 10^{-4}) + 0.667} = 1.491 \text{ W/°C·m de longitud}$$

El área exterior para 1.0 m de longitud es

$$A_o = \pi(0.06033) = 0.1895 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$U_o = \frac{1.491}{0.1895} = 7.87 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$$

Por tanto, encontramos que el coeficiente de transferencia total está casi totalmente controlado por el valor de h_o. Podríamos haber esperado este resultado en forma estricta en base a nuestra experiencia con las magnitudes relativas de los coeficientes de convección: los valores de convección libre para el aire son muy bajos comparados con la convección forzada en líquidos.

Ejemplo 10-2

El sistema de tubería y agua caliente del Ej. 10-l se expone a vapor a 1 atm y 100 °C. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total para esta situación basándose en el área exterior de la tubería.

Solución

En el Ej. 10-l determinamos el coeficiente de transferencia de calor por convección en el interior como

$$h_i = 1961 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$$

El coeficiente de convección para la condensación en el interior de la tubería se obtiene utilizando la Ec. 9-12

$$h_o = 0.725\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g h_{fg} k_f^3}{\mu_f d(T_s - T_o)}\right]^{1/4} \qquad (a)$$

en donde T_o es la temperatura exterior de la superficie de la tubería. Las propiedades de la película de agua son

$$\rho = 960 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu_f = 2.82 \times 10^{-4} \text{ kg/m·s} \qquad k_f = 0.68 \text{ W/m·°C} \qquad h_{fg} = 2255 \text{ kJ/kg}$$

por tanto, la Ec. a se convierte en

$$h_o = 0.725\left[\frac{(960)^2(9.8)(2.255\times10^6)(0.68)^3}{(2.82\times10^{-4})(0.06033)(100-T_o)}\right]^{1/4}$$

$$= 17\,960(100-T_o)^{-1/4} \qquad (b)$$

y la resistencia térmica exterior por unidad de longitud es

$$R_o = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{(100-T_o)^{1/4}}{(17{,}960)\pi(0.06033)} = \frac{(100-T_o)^{1/4}}{3403} \qquad (c)$$

El balance de energía requiere que

$$\frac{T_{go}-T_o}{R_O} = \frac{T_i - T_w}{R_s + R_i} \qquad (d)$$

Del Ej. 10-1

$$R_i = 3.092\times10^{-3} \qquad R_s = 4.097\times10^{-4} \qquad T_w = 98\ ^\circ\text{C}$$

y se pueden combinar las Ecs. c y d para obtener

$$3403(100-T_o)^{3/4} = \frac{T_o - T_i}{4.097\times10^{-4}}$$

$$\frac{T_o - T_i}{4.097\times10^{-4}} = \frac{T_i - 98}{3.092\times10^{-3}}$$

Este es un conjunto de ecuaciones no lineales que puede resolverse para obtener

$$T_o = 99.91^\circ\text{C} \qquad T_i = 99.69^\circ\text{C}$$

El coeficiente exterior de transferencia de calor y la resistencia térmica se convierten entonces en

$$h_o = 17\,960(100-99.91)^{-1/4} = 32\,790\ \text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C} \qquad (e)$$

$$R_o = \frac{(100-99.91)^{1/4}}{3403} = 1.610\times10^{-4} \qquad (f)$$

Basándose en la unidad de longitud de tubería, el coeficiente de transferencia de calor total es

$$U_o = \frac{1}{R_i A_o/A_i + A_o R_s + R_o} \qquad (g)$$

$$= \frac{1}{(3.092\times10^{-3})\dfrac{0.06033}{0.0525} + \pi(0.06033)(4.097\times10^{-4}) + 1.610\times10^{-4}}$$

$$= 263.7\ \text{W/°C}\cdot\text{m de longitud}$$

o, con $A_o = 0.1895\ \text{m}^2/\text{m}$ de longitud

$$U_o = \frac{263.7}{0.1895} = 1392\ \text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}\quad [245\ \text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot^\circ\text{F}]$$

En este problema el coeficiente de convección del lado con agua es el factor de control más importante, ya que h_o es muy grande para un proceso de condensación. De hecho, la resistencia térmica exterior es menor que la resistencia por conducción del acero. Las magnitudes relativas aproximadas de las resistencias son

$$R_o \sim 1 \qquad R_s \sim 2.5 \qquad R_i \sim 19$$

10-3 Factores de incrustación

Pasado cierto tiempo en operación las superficies de transferencia de calor de un cambiador de calor pueden cubrirse con diversos depósitos presentes en los sistemas de flujo, o las superficies pueden oxidarse como resultado de la interacción entre los fluidos y el material usado para la construcción del aparato. En ambos casos, esta capa representa una resistencia adicional al flujo de calor y tiene como resultado una reducción en el rendimiento. El efecto total se representa casi siempre por medio de un *factor* de incrustación o resistencia por incrustación, R_f, que debe incluirse junto con las demás resistencias térmicas que forman el coeficiente de transferencia de calor total.

Los factores de incrustación deben obtenerse experimentalmente determinando los valores de U tanto para condiciones limpias como de incrustación en el cambiador de calor. El factor de incrustación se define por consiguiente como

$$R_f = \frac{1}{U_{\text{sucio}}} - \frac{1}{U_{\text{limpio}}}$$

En la Tabla 10-2 se presentan los valores recomendados del factor de incrustación para algunos fluidos.

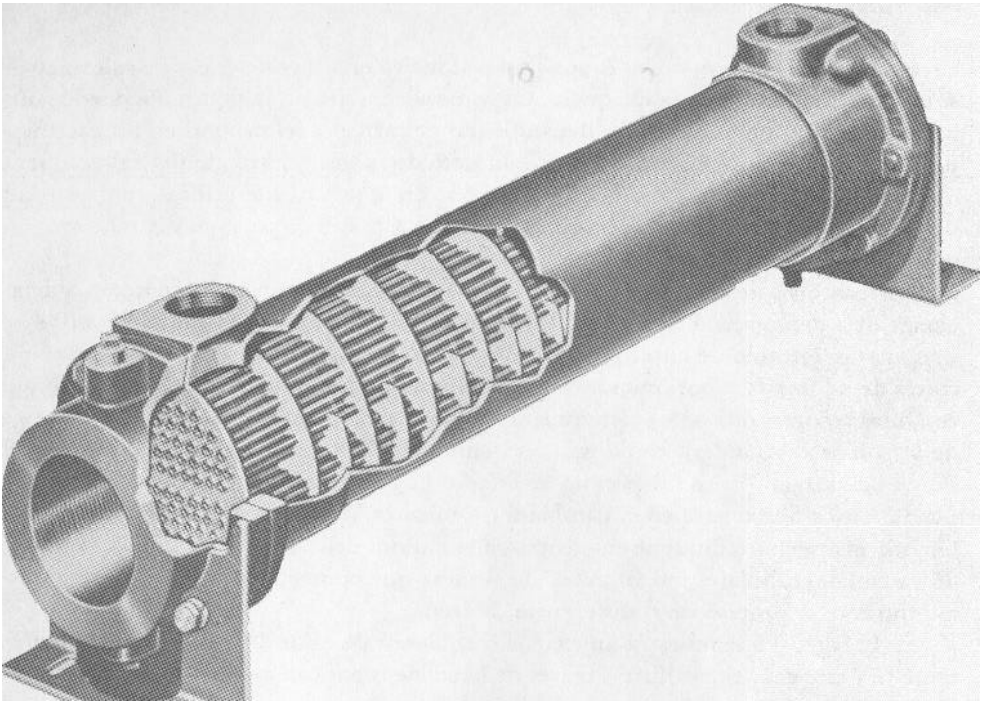
10-4 Tipos de cambiadores de calor

Ya se ha mencionado un tipo de cambiador de calor, el del arreglo de tubería doble tal como se muestra en la Fig. 10-Z. En esta clase de cambiador se puede usar ya sea el flujo a contracorriente o flujo paralelo, con fluido caliente o frío en el espacio anular y el otro fluído dentro de la tubería interior.

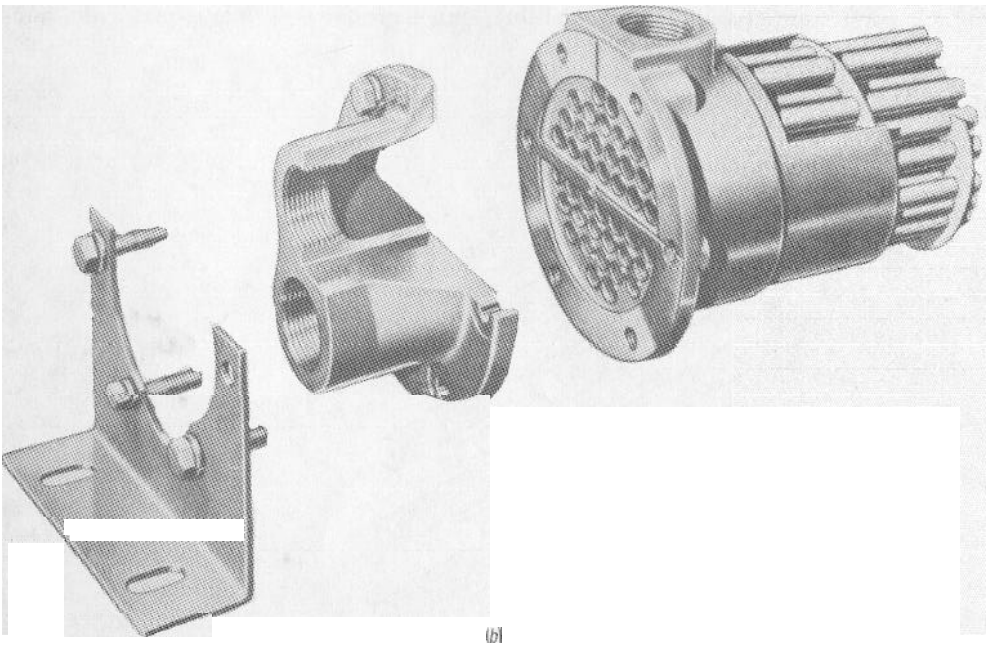
Un tipo de cambiador de calor muy usado en las industrias de procesamiento químico es el del arreglo de chaqueta y tubos que se muestra en la Fig. 10-3. Uno de los fluidos fluye en el interior de los tubos, mientras el otro se fuerza a través de la chaqueta y sobre el exterior de los tubos. Para asegurarse de que el fluido del lado de la

Tabla 10-2 Tabla de factores de incrustación normales, según la Ref. 2

Tipo de fluido	*Factor de incrustación* $h \cdot pie^2 \cdot °F/Btu$	$m^2 \cdot °C/W$
Agua de mar, abajo de 125 °F	0.0005	*0.00009*
Encima de 125 °F	*0.001*	0.0002
Agua tratada para alimentación de caldera, encima de 125 °F	0.001	0.0002
Aceite combustible	0.005	0.0009
Aceite de templar	0.004	0.0007
Vapores de alcohol	0.0005	0.00009
Vapor limpio de aceite	0.0005	0.00009
Aire industrial	0.002	0.0004
Líquido refrigerante	0.001	0.0002



(a)



(b)

Fig. 10-3 (*a*) **Cambiador de calor de chaqueta y tubos de un solo** paso; (*b*) cambiador del **calor de chaqueta y tubos de dos pasos.** (*Young Radiator Company.*)

chaqueta fluirá a través de los tubos y así conducirá una transferencia de calor mayor se colocan deflectores en la chaqueta, tal como se muestra en la figura. Se pueden utilizar uno o más pasos de tubos, dependiendo del arreglo del cabezal en los extremos del cambiador. En la Fig. **10-3*a*** se usa un paso de tubos y el arreglo del cabezal para dos pasos de tubo se muestra en la Fig. **10-3*b***. En la práctica se utiliza gran variedad de arreglos con deflectores y remitimos al lector a la Ref. **2** para mayor información sobre este tema.

Los cambiadores de calor de flujo transversal se utilizan comúnmente en aplicaciones de calentamiento y enfriamiento por medio de aire o gas. En la Fig. **10-4** se muestra un ejemplo de este tipo de cambiadores, en los que un gas puede forzarse a través de un haz de tubos, mientras que en el interior de los tubos se utiliza otro fluido con fines refrigerantes o de calentamiento. En este cambiador de gas que fluye a través de los tubos se considera como una corriente ***mezclada,*** mientras que se dice que el fluido del interior de los tubos es ***no mezclado.*** El gas se considera mezclado porque se puede mover libremente en el cambiador a medida que intercambia calor. En cambio, mientras el otro fluido se encuentra en el interior del cambiador, se halla confinado en canales tubulares individuales, de manera que no puede mezclarse consigo mismo durante el proceso de transferencia de calor.

En la Fig. **10-5** se muestra un tipo de cambiador de calor de flujo transversal diferente. En este caso el gas fluye a través de haces de tubos con aletas y es en consecuencia, un flujo no mezclado ya que se encuentra confinado en canales diferentes entre aletas a medida que pasa a través del cambiador. Este cambiador es típico de los que se usan en acondicionadores de aire.

Si un fluido es no mezclado puede haber un gradiente de temperatura tanto paralelo como normal a la dirección del flujo, mientras que si el flujo es mezclado, habrá

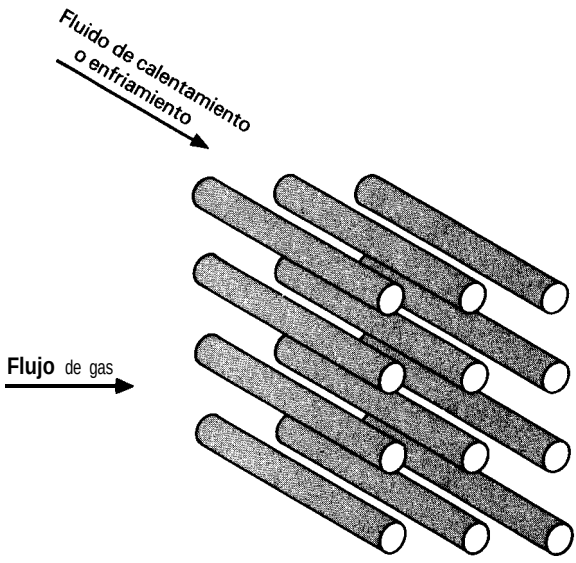


Fig. 10-4 Cambiador de calor de flujo transversal con un fluido mezclado y otro sin mezclar.

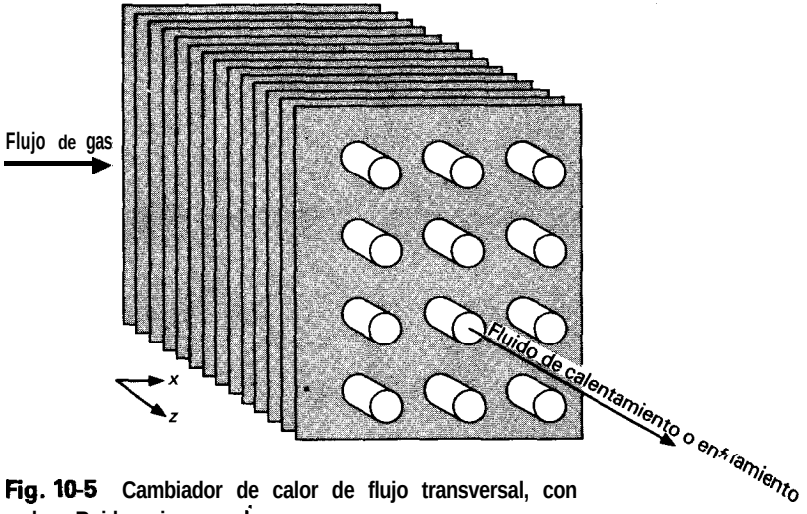


Fig. 10-5 Cambiador de calor de flujo transversal, con ambos Ruidos sin mezclar .

una tendencia en la temperatura del fluido a igualarse en la dirección normal al flujo, como resultado del mezclado. En la Fig. 10-6 se muestra un perfil de temperatura aproximado para el gas que fluye en el cambiador de la Fig. 10-5, suponiendo que el gas se calienta a medida que pasa a través del cambiador. El hecho de que un fluido sea mezclado o sin mezclar influye en la transferencia de calor total en el cambiador ya que esta transferencia de calor depende de la diferencia de temperatura entre los fluidos frío y caliente.

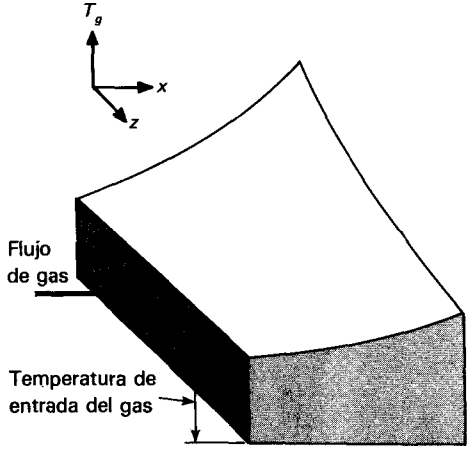


Fig. 10-6 Perfil típico de temperatura para el cambiador de calor de flujo transversal de la Fig. 10-5.

10-5 La diferencia de temperatura media logarítmica

Considérese el cambiador de tubería doble que se muestra en la Fig. 10-2. Los fluidos pueden correr ya sea en flujo paralelo o a contracorriente; y los perfiles de temperatura para estos dos casos se indican en la Fig. 10-7. Nos proponemos calcular la transferencia de calor en este arreglo de tubería doble con

$$q = UA\,\mathrm{AT}_{,,,} \tag{10-5}$$

donde U = coeficiente de transferencia de calor total
A = área de superficie para transferencia de calor compatible con la definición de U
$\mathrm{AT}_{,,,}$ = diferencia de temperatura media adecuada a través del intercambiador de calor

Un examen de la Fig. 10-7 muestra que la diferencia de temperatura entre los fluidos caliente y frío varía entre la entrada y salida, y debemos determinar el valor promedio que se usará en la Ec. 10-5. Para el cambiador de calor de flujo paralelo que se ve en la Fig. 10-7, el calor transferido a través de un elemento de área dA puede escribirse como

$$dq = -\dot{m}_h c_h\,dT_h = \dot{m}_c c_c\,dT_c \tag{10-6}$$

donde los subíndices h y c designan, respectivamente, los fluidos caliente y frío. La transferencia de calor también podría expresarse como

$$dq = U(T_h - T_c)\,dA \tag{10-7}$$

De la Ec. 10-6

$$dT_h = \frac{-dq}{\dot{m}_h c_h}$$

$$dT_c = \frac{dq}{\dot{m}_c c_c}$$

en donde m representa la rapidez de flujo en masa y c es el calor especifico del fluido. Por tanto

$$dT_h - dT_c = d(T_h - T_c) = -dq\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) \tag{10-8}$$

Resolviendo para dq de la Ec. 10-7 y sustituyendo en la Ec. 10-8 se obtiene

$$\frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = -U\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) dA \tag{10-9}$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse ahora entre las condiciones 1 y 2 tal como se indica en la Fig. 10-7. El resultado es

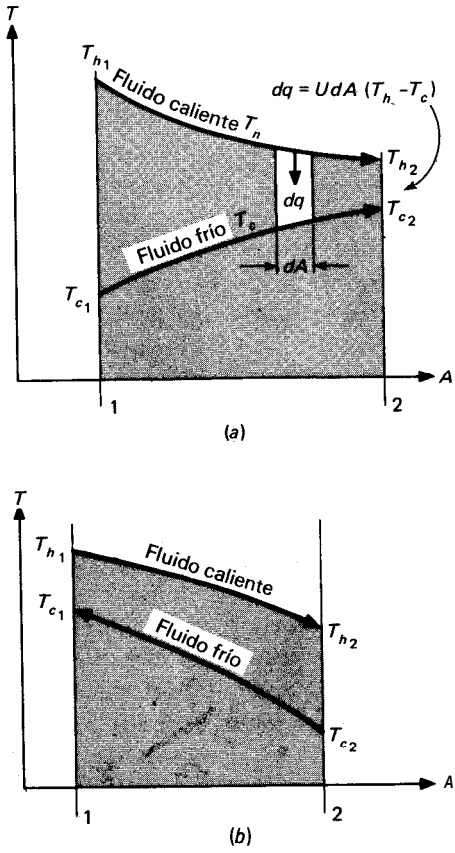


Fig. 10-7 Perfiles de temperatura para flujo paralelo y a contracorriente en un cambiador de calor de doble tubería.

$$\ln \frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = -UA \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c} \right) \tag{10-10}$$

Regresando a la Ec. 10-6, los productos $\dot{m}c_c$ y $\dot{m}_h c_h$ pueden expresarse en términos de la transferencia de calor total q y las diferencias de temperatura totales de los fluidos caliente y frío. Así

$$m_h c_h = \frac{4}{T_{h_1} - T_{h_2}}$$

$$m_c c_c = \frac{4}{T_{c_2} - T_{c_1}}$$

Sustituyendo estas relaciones en la Ec. 10-10 obtenemos

$$q = UA \frac{(T_{h_2} - T_{c_2}) - (T_{h_1} - T_{c_1})}{\ln [(T_{h_2} - T_{c_2})/(T_{h_1} - T_{c_1})]} \tag{10-11}$$

Comparando la **Ec. 10-11** con la **Ec.** 10-5, vemos que la diferencia de la temperatura media es el agrupamiento de términos entre corchetes. Por tanto

$$\Delta T_m = \frac{(T_{h_2} - T_{c_2}) - (T_{h_1} - T_{c_1})}{\ln [(T_{h_2} - T_{c_2})/(T_{h_1} - T_{c_1})]} \qquad (10\text{-}12)$$

A esta diferencia de temperatura se le denomina ***diferencia de temperatura media logarítmica*** (DTML). Expresado verbalmente, es la diferencia de temperatura en un extremo del cambiador menos la diferencia de temperatura en el otro extremo, dividido entre el logaritmo natural del cociente de las dos diferencias. Se deja como ejercicio al lector demostrar que esta relación puede usarse para calcular la DTML para condiciones en contracorriente.

La derivación anterior para **DTML** incluye dos suposiciones importantes: 1) los calores específicos de los fluidos no varían con la temperatura, y 2) los coeficientes de transferencia de calor por convección son constantes a través del cambiador de calor. La segunda suposición es casi siempre la más seria debido a los efectos de entrada, viscosidad del fluido y cambios de conductividad térmica, etc. Normalmente se **deberán** emplear métodos numéricos para corregir estos efectos. La **Sec. 10-7** describe una manera de realizar un análisis de propiedades variables.

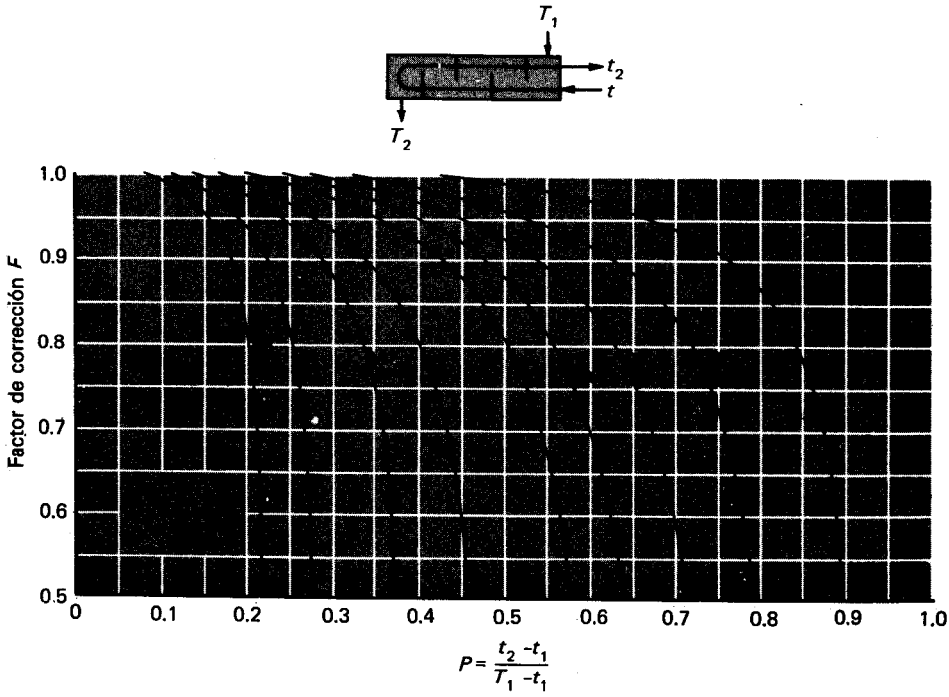


Fig. 10-8 Diagrama del factor de correción para un cambiador con un paso en la chaqueta y dos, cuatro o cualquier otro múltiplo de pasos en los tubos.

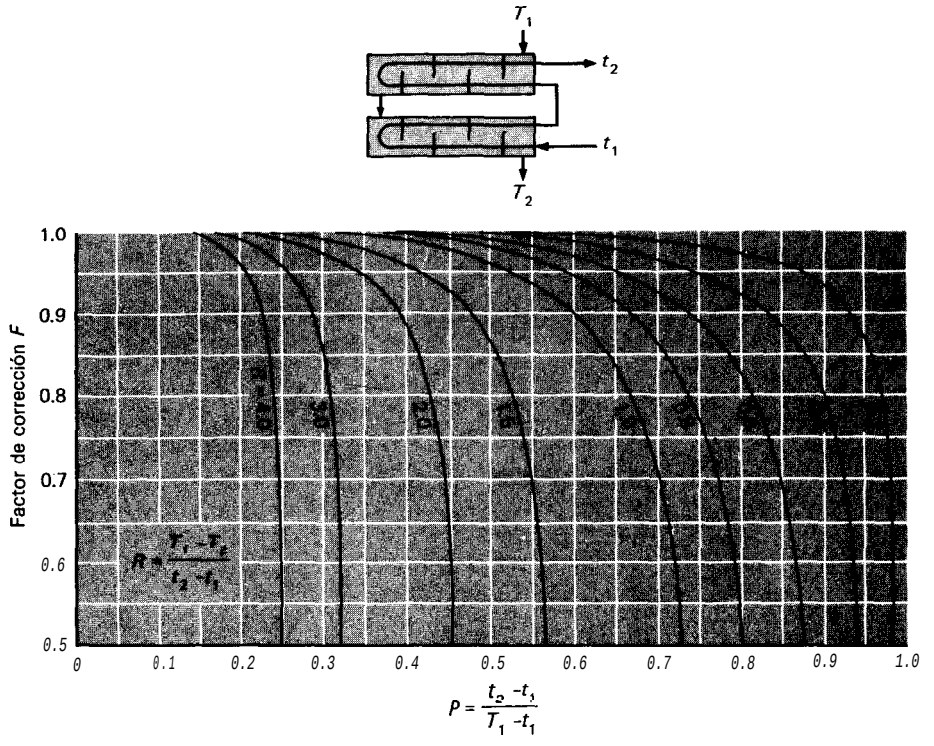


Fig. 10-9 Diagrama del factor de corrección para un cambiador de calor con dos pasos en la chaqueta y cuatro, ocho o cualquier otro múltiplo de pasos en los tubos.

Si se utiliza un cambiador de calor que no sea del tipo de tubo doble, la transferencia de calor se calcula utilizando un factor de corrección aplicado a la DTML *para un arreglo de tubería doble a contracorriente con las mismas temperaturas de fluidos frío y caliente.* La ecuación de transferencia de calor toma la fórma

$$q = UAF\ \mathbf{AT}_{\prime\prime\prime} \tag{10-13}$$

En las Figs. 10-8 a 10-11 se han trazado diagramas de los valores de los factores de corrección F para diversos tipos de cambiadores de calor de acuerdo con la Ref. 4. Cuando existe un cambio de fase, como ocurre en la condensación o ebullición (evaporación), por lo general el fluido permanece a una temperatura esencialmente constante y las relaciones se simplifican. En este caso los factores de corrección en las Figs. 10-8 a 10-11 son todos 1.0. Los Ejs. 10-3 al 10-5 ilustran el uso de la DTML para el cálculo del rendimiento de los cambiadores de calor.

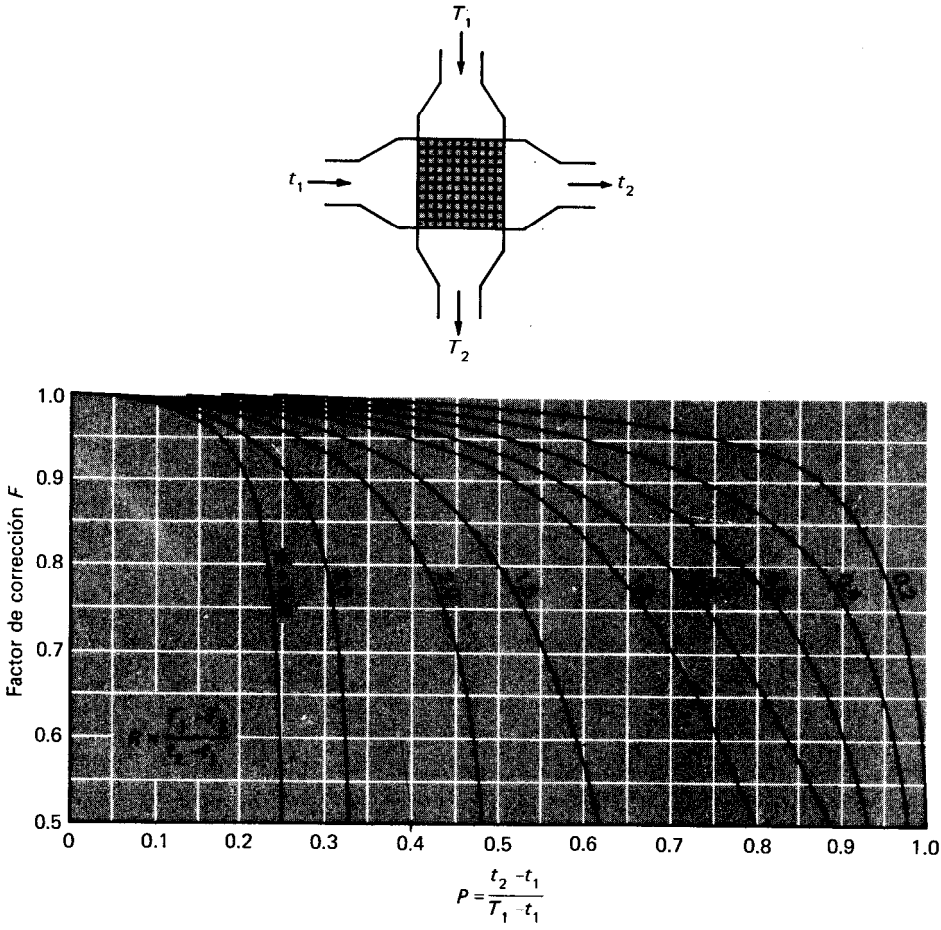


Fig. 10-10 **Diagrama del factor de corrección para cambiadores de un solo paso con flujo transversal, ambos fluidos permanecen sin mezclar.**

Ejemplo 10-3

Un flujo de 68 Kg/min de agua se calienta de 35 a 75 °C por medio de aceite que tiene un calor específico de 1.9 kJ/kg·°C. Se utilizan los fluidos en un cambiador de calor de tubo doble a contracorriente, y el aceite entra al cambiador a 110 °C y lo deja a 75 "C. El coeficiente de transferencia de calor total es 320 W/m²• "C. Calcule el área del cambiador de calor.

Solución

La transferencia de calor total se determina a partir de la energía absorbida por el agua:

$$q = \dot{m}_w c_w \, \mathrm{AT}_{,} = (68)(4180)(75 - 35) = 11.37 \text{ MJ/min} = 189.5 \text{ kW} \quad [6.47 \times 10^5 \text{ Btu/h}] \qquad (a)$$

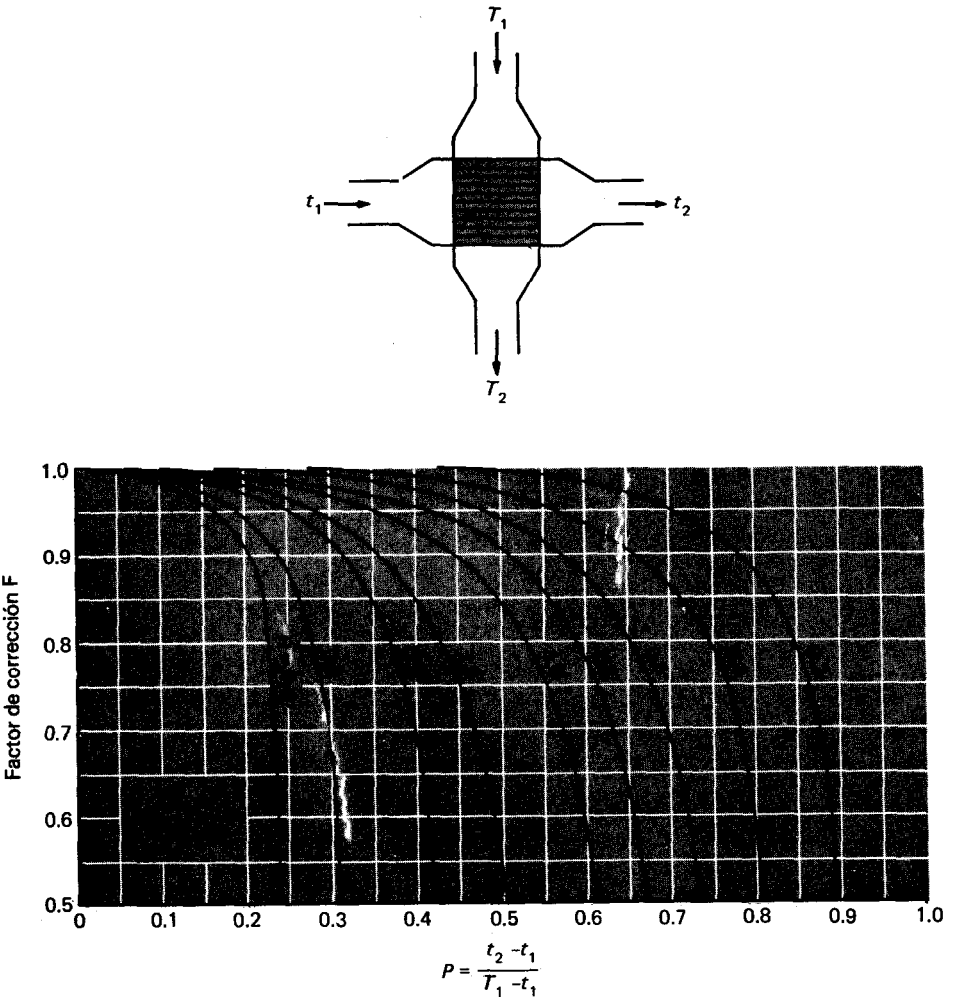


Fig. 10-11 Diagrama del factor de corrección para un cambiador de calor de un solo paso de flujo transversal; con un fluido mezclado y el otro sin mezclar.

Como se conocen todas las temperaturas de los fluidos, se puede calcular la DTML utilizando el esquema de temperatura de la Fig. 10-7*b*:

$$\Delta T_m = \frac{(110 - 75) \quad (75 - 35)}{\ln [(110 - 75)/(75 - 35)]} = 37.44 \text{ °C} \qquad (b)$$

Así como = UA **AT**$_{mm}$

$$A = \frac{1.895 \times 10^5}{(320)(37.44)} = 15.82 \text{ m}^2 \quad [170 \text{ pies}^2]$$

Ejemplo **10-4**

En lugar del cambiador de calor de tubo doble del Ej. 10-3, **se desea utilizar un cambiador de chaqueta y tubos en el que el agua realiza un paso en la chaqueta y el aceite realiza dos pasos de tubo. Calcule el área requerida para este cambiador, suponiendo que el coeficiente de transferencia de calor total es 320** W/m^2 °C.

Solución

Para resolver este problema determinamos un factor de corrección a partir de la Fig. 10-8, el cual usaremos junto con la DTML calculando en base a un cambiador de flujo a contracorriente. De acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 10-8 los parámetros son

$$T, = 3.5\ ^\circ\text{C} \qquad T_2 = 75\ ^\circ\text{C} \qquad t_1 = 110\ ^\circ\text{C} \qquad t_2 = 75\ ^\circ\text{C}$$

$$P = \frac{t_o - t_i}{T_1 - t_1} = \frac{75 - 110}{35 - 110} = 0.467$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{35 - 75}{75 - 110} = 1.143$$

de manera que el factor de corrección es

$$F = 0.81$$

y la transferencia de calor es

$$q = UAF\ \text{AT}_{,,,}$$

de modo que

$$A = \frac{1.895 \times 10^5}{(320)(0.81)(37.44)} = 19.53\ \text{m}^2\ [210\ \text{pies}^2]$$

Ejemplo 10-5

Se calienta agua a una rapidez de SO 000 lb_m/h [3.783 kg/s], de 100 a 130 °F, [37.78 a 54.44 °C] dentro de un cambiador de calor de chaqueta y tubería. En el lado de la chaqueta se utiliza un paso en el que el agua se usa como líquido de calentamiento, 15 000 lb_m/h [1.892 kg/s], y la cual entra al cambiador a 200 °F [93.33 °C]. El coeficiente de transferencia de calor total es 250 $\text{Btu/h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F}$ [1419 $\text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$] y la velocidad promedio del agua dentro de los tubos de $\frac{3}{4}$ plg de diámetro [1.905 cm], es de 1.2 pies/s, [0.366 m/s]. Debido a restricciones de espacio, la longitud de los tubos no debe ser superiora 8 pies [2.438 m]. Calcule el número de pasos en la tubería, de tubos por paso y la longitud de los tubos, de acuerdo con esta restricción.

Solución

Suponemos primero una tubería de un paso y verificamos si satisface las condiciones del problema. La temperatura de salida del agua caliente se calcula a partir de

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \dot{m}_h c_h \Delta T_h$$

$$\Delta T_h = \frac{(30\ 000)(1)(130 - 100)}{(15\ 000)(1)} = 60^\circ\text{F} = 33.33\ ^\circ\text{C} \qquad (a)$$

así

$$T_{h,\text{exit}} = 93.33 - 33.33 = 60\ ^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor total requerida se obtiene de la Ec. (a) para el fluido frío:

$$q = (3.783)(4182)(54.44 - 37.78) = 263.6\ \text{kW} \quad [8.08 \times 10^5\ \text{Btu/h}]$$

Para un cambiador con flujo a contracorriente

$$\text{DTML} = \Delta T_m = \frac{(93.33 - 54.44) - (60 - 37.78)}{\ln[(93.33 - 54.44)/(60 - 37.7811}} = 29.78\ ^\circ\text{C}$$

$$q = UA\ \mathrm{AT}_{,,,}$$

$$A = \frac{2.636 \times 10^5}{(1419)(29.78)} = 6.238\ \mathrm{m^2}\ [67.1\ \mathrm{pies^2}] \qquad (b)$$

Utilizando la velocidad promedio del agua en los tubos y la rapidez del flujo, calculamos el área de flujo total por medio de

$$\dot{m}_c = \rho A u$$

$$A = \frac{3.783}{(1000)(0.366)} = 0.01034\ \mathrm{m^2} \qquad (c)$$

Esta área és el producto del número de tubos y del área de flujo por tubo:

$$0.01034 = n\ \frac{\pi d^2}{4}$$

$$n = \frac{(0.01034)(4)}{\pi(0.01905)^2} = 36\ 3$$

o n = 36 tubos. El área de superficie por tubo y por metro de longitud es

$$\pi d = \pi(0.01905) = 0.0598\ \mathrm{m^2/tubo \cdot m}$$

Recordaremos que el área de superficie total necesaria para un cambiador de tubería de un paso se calculó en la Ec. (b) como 6.238 $\mathrm{m^2}$. Así, podemos calcular la longitud de tubo para este tipo de cambiador a partir de

$$n\pi dL = 6.238$$

$$L = \frac{6.238}{(36)(0.0598)} = 2.898\ \mathrm{m}$$

Esta longitud es mayor de los 2.438 m permitidos, de manera que necesitamos más de un paso. Cuando incrementamos el número de pasos, aumentamos en forma correspondiente el área de la superficie total requerida, debido a la reducción en la DTML causada por el factor de corrección F. En seguida ensayamos dos pasos por tubería. De la Fig. 10-8, $F = 0.88$, por tanto

$$A_{\mathrm{total}} = \frac{q}{UF\,\Delta T_m} = \frac{2.636 \times 10^5}{(1419)(0.88)(29.78)} = 7.089\ \mathrm{m^2}$$

El número de tubos por paso sigue siendo 36 debido a los requerimientos en velocidad. Para el cambiador de tubería de dos pasos el área de superficie total está ahora relacionada con la longitud por medio de

$$A_{\mathrm{total}} = 2n\pi dL$$

de manera que

$$L = \frac{7.089}{(2)(36)(0.0598)} = 1.646\ \mathrm{m}\ [5.4\ \mathrm{pies}]$$

Esta longitud se encuentra dentro del límite de 2.438 m, así que el diseño final escogido es

Número de tubos por paso = 36
Número de pasos = 2
Longitud de los tubos por paso = 1.646 m, [5.4 pies]

10-6 Método de eficacia NUT

El enfoque por DTML al análisis de cambiador de calor es útil cuando las temperaturas de entrada y salida se conocen o se pueden determinar con facilidad. En tal caso la DTML se calcula con facilidad y se pueden determinar el flujo de calor, área de superficie o el coeficiente de transferencia de calor total. Cuando deben evaluarse las temperaturas de entrada o de salida para un cambiador de calor dado, el análisis con frecuencia comprende un procedimiento iterativo debido a la función logarítmica en la DTML. En estos casos el análisis se realiza con mayor facilidad utilizando un método basado en la eficacia con que el cambiador de calor transfiere una cantidad de calor determinada. El método de la eficacia también ofrece muchas ventajas en el análisis de problemas en los que se debe realizar una comparación entre diversos tipos de cambiadores de calor, a fin de seleccionar el más apropiado para realizar la transferencia de calor específica que se tiene como objetivo.

Definimos la eficacia del cambiador de calor como

$$\text{Eficacia} = \epsilon = \frac{\text{transferencia de calor real}}{\text{máxima transferencia de calor posible}}$$

La transferencia de calor real se puede obtener calculando ya sea la energía perdida por el fluido caliente o la energía absorbida por el fluido frío. Considérense los cambiadores de calor de flujo paralelo y a contracorriente que se muestran en la Fig. 10-7. Para el cambiador-de flujo paralelo

$$q = \dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2}) = \dot{m}_c c_c (T_{c_2} - T_{c_1}) \tag{10-14}$$

y para el cambiador a contracorriente

$$q = \dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2}) = \dot{m}_c c_c (T_{c_1} - T_{c_2}) \tag{10-15}$$

Para determinar la máxima transferencia de calor posible para el cambiador, primero aceptamos que este valor máximo se podría obtener si uno de los fluidos sufriera un cambio de temperatura igual a la diferencia máxima de temperatura presente en el cambiador, la cual es la diferencia entre las temperaturas de entrada de los fluidos caliente y frío. El fluido que podría sufrir esta diferencia de temperatura máxima es aquel que tenga el *mínimo* valor de $\dot{m}c$ ya que el balance de energía requiere que la energía que recibe por un fluido sea igual a la que cede el otro; si permitimos que el fluido con el mayor valor de $\dot{m}c$ sufra la diferencia máxima de temperatura, esto requiere que el otro fluido sufra una diferencia de temperatura mayor al máximo, lo cual es imposible. De esta manera, la máxima transferencia de calor posible se expresa como

$$q_{\text{máx}} = (\dot{m}c)_{\text{mín}} (T_{h_{\text{entrada}}} - T_{c_{\text{salida}}}) \tag{10-16}$$

El fluido con el mínimo puede ser el frío o el caliente, dependiendo de las rapideces de flujo en masa y los calores específicos. Para el cambiador de flujo paralelo.

$$\epsilon_h \equiv \frac{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2})}{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{c_1})} = \frac{T_{h_1} - T_{h_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10-17}$$

$$\epsilon_c \equiv \frac{\dot{m}_c c_c (T_{c_2} - T_{c_1})}{\dot{m}_c c_c (T_{h_1} - T_{c_1})} = \frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10-18}$$

Los subíndices en los símbolos de eficacia designan cuál es el fluido con el mínimo valor de $\dot{m}c$.

Para el cambiador a contracorriente.

$$\epsilon_h = \frac{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2})}{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{c_2})} = \frac{T_{h_1} - T_{h_2}}{T_{h_1} - T_{c_2}} \tag{10-19}$$

$$\epsilon_c = \frac{\dot{m}_c c_c (T_{c_1} - T_{c_2})}{\dot{m}_c c_c (T_{h_1} - T_{c_2})} = \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_2}} \tag{10-20}$$

Podemos derivar una expresión para la eficacia en flujo paralelo de la manera siguiente. Reescribiendo la Ec. 10-10 tenemos

$$\ln \frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = -UA \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c} \right) = \frac{-UA}{\dot{m}_c c_c} \left(1 + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h} \right) \tag{10-21}$$

$$\frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = \exp \left[\frac{-UA}{\dot{m}_c c_c} \left(1 + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h} \right) \right] \tag{10-22}$$

Si el fluido frío es el fluido mínimo

$$\epsilon = \frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{T_{h_1} - T_{c_1}}$$

Reescribiendo en la Ec. 10-22 la proporción de temperatura nos da,

$$\frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = \frac{T_{h_1} + (\dot{m}_c c_c / \dot{m}_h c_h)(T_{c_1} - T_{c_2}) - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10-23}$$

Cuando se realiza la sustitución

$$T_{h_2} = T_{h_1} + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h} (T_{c_1} - T_{c_2})$$

a partir de la Ec. 10-6. La Ec. 10-23 se puede reescribir ahora

$$\frac{(T_{h_1} - T_{c_1} + (\dot{m}_c c_c / \dot{m}_h c_h)(T_{c_1} - T_{c_2}) + (T_{c_1} - T_{c_2})}{T_{h_1} - T_{c_1}} = 1 - \left(1 + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h} \right) \epsilon$$

Insertando esta relación en la Ec. 10-22 nos proporciona para la eficacia

$$\epsilon = \frac{1 - \exp[(-UA/\dot{m}_c c_c)(1 + \dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h)]}{1 + \dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h} \tag{10-24}$$

Se puede demostrar que cuando el fluido caliente es el fluido mínimo tenemos como resultado la misma expresión para la eficacia, excepto que $\dot{m}_c c_c$ y $\dot{m}_h c_h$ se intercambian. Como consecuencia, la eficacia se escribe casi siempre

$$\epsilon = \frac{1 - \exp[(-UA/C_{mín})(1 + C_{mín}/C_{máx})]}{1 + C_{mín}/C_{máx}} \tag{10-25}$$

en donde $C = \dot{m}c$ se define como la rapidez de capacidad.

Un análisis similar se puede aplicar al caso de flujo a contracorriente y obtenemos la siguiente relación para la eficacia:

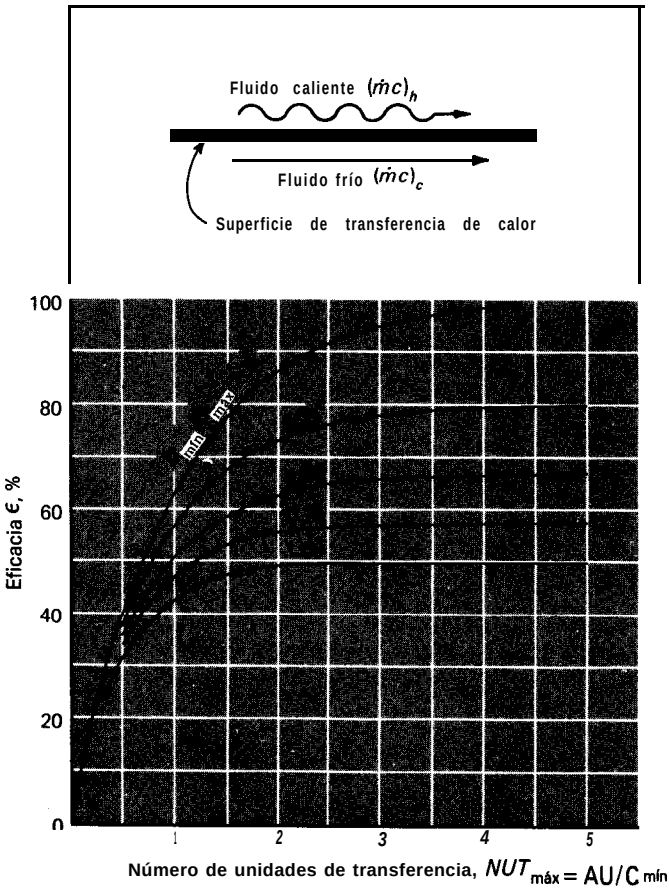


Fig. 10-12 Eficacia para el rendimiento de un cambiador de flujo paralelo.

$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left[(-UA/C_{mín})(1 - C_{mín}/C_{máx})\right]}{1 - (C_{mín}/C_{máx}) \exp\left[(-UA/C_{mín})(1 - C_{mín}/C_{máx})\right]} \qquad (10\text{-}26)$$

El agrupamiento de términos $UA/C_{mín}$ ***se denomina el*** número ***de unidades de transferencia*** (NUT) ya que indica el tamaño del cambiador de calor.

Kays y London [3] presentaron las razones de eficacia para diversos arreglos de cambiadores de calor y algunos de los resultados de sus análisis se encuentran disponibles en forma de gráficas en las Figs. 10-12 a 10-17. Los Ejs. 10-6 a 10-8 ilustran el uso del método de eficacia NUT en el análisis de cambiadores de calor.

Aunque las gráficas de eficacia NUT pueden ser de gran utilidad práctica en los problemas de diseño, existen aplicaciones en las que es necesaria una mayor precisión de la que se puede obtener leyendo las gráficas. Además, procedimientos de diseño más elaborados se pueden basar en computadoras, requiriendo expresiones analíticas para estas curvas. La Tabla 10-3 resume las relaciones de eficacia. En algunos casos el

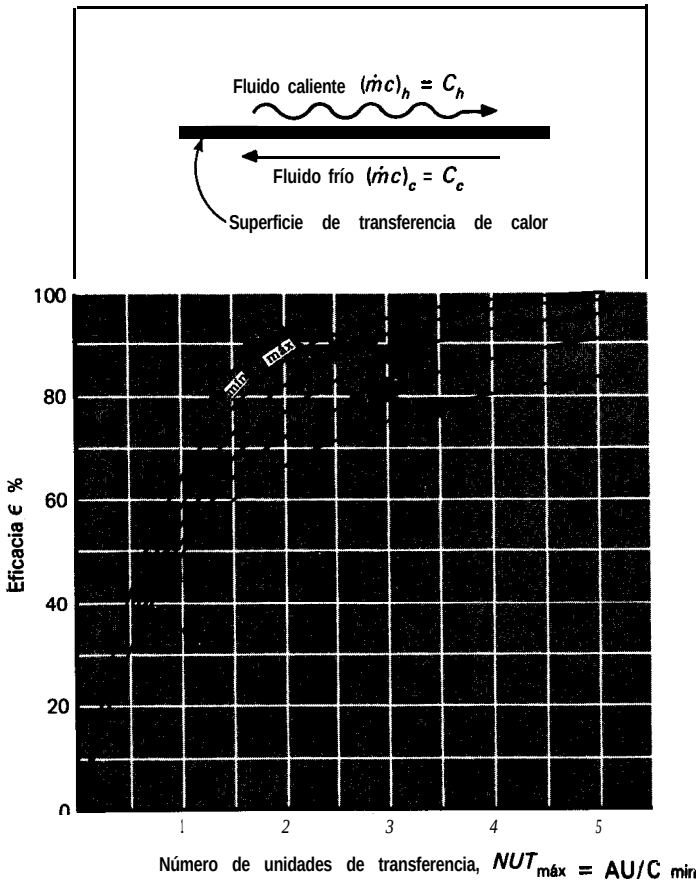


Fig. 10-13 Eficacia para el rendimiento de un cambiador de flujo a contracorriente.

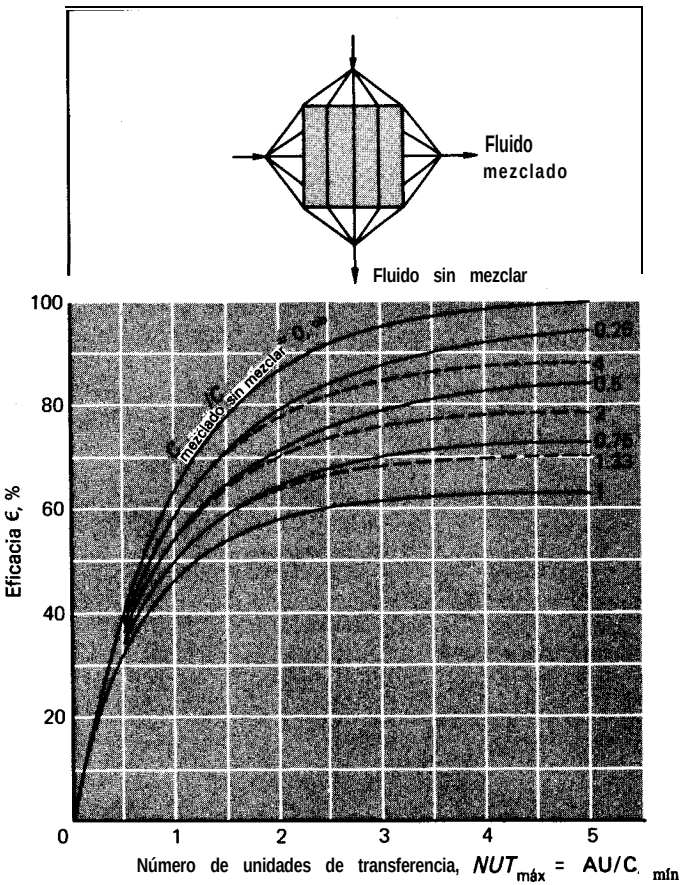


Fig. 10-14 Eficacia para cambiador de flujo transversal con un fluido mezclado.

objetivo del análisis es una determinación de NUT y es posible proporcionar una relación explícita para NUT en términos de eficacia y razón de capacidad. Algunas de estas relaciones se dan en la Tabla 10-4.

Calderas y condensadores

Hace poco señalamos que en los procesos de ebullición o condensación la temperatura del fluido permanece esencialmente constante o el fluido actúa como si tuviera calor específico infinito. En estos casos $C_{mín}/C_{máx} \rightarrow 0$ y todas las relaciones de eficacia de los cambiadores de calor se aproximan a una sola ecuación sencilla,

$$\bullet \quad \blacksquare\bullet\square\mathbb{N}\square\mathbb{O}$$

La ecuación aparece como el último renglón en la Tabla 10-3.

Tabla 10-3 **Relaciones de eficacia de cambiadores de calor**

$N = \text{NUT} = \dfrac{UA}{C_{mín}} \qquad C = \dfrac{C_{mín}}{C_{máx}}$

Geometría de flujo	*Relación*
Doble tubería:	
Flujo paralelo	$\epsilon = \dfrac{1 - \exp\,[-N(1+C)]}{1+C}$
Flujo a contracorriente	$\epsilon = \dfrac{1 - \exp\,[-N(1-C)]}{1 - C\exp\,[-N(1-C)]}$
***Flujo* a contracorriente, C = 1**	$\epsilon = \dfrac{N}{N+1}$
Flujo transversal	
Ambos fluidos sin mezclar	$\epsilon = 1 - \exp\left[\dfrac{\exp\,(-NCn) - 1}{Cn}\right]$ donde $n = N^{-0.22}$
Ambos fluidos mezclados	$\epsilon = \left[\dfrac{1}{1 - \exp\,(-N)} + \dfrac{C}{1 - \exp\,(-NC)} - \dfrac{1}{N}\right]^{-1}$
$C_{máx}$ **mezclado,** $_{mín}$ **sin mezclar**	$\epsilon = (1/C)\{1 - \exp\,[-C(1 - e^{-N})]\}$
C $_{máx}$ **sin mezclar,** $C_{mín}$ **mezclado**	$\epsilon = 1 - \exp\,\{-(1/C)[1 - \exp\,(-NC)]\}$
Chaqueta y tubo	
Un paso de chaqueta, 2, 4, 6 pasos de tubo	$\epsilon = 2\left\{1 + C + (1 + C^2)^{1/2}\dfrac{\exp\,[-N(1+C^2)^{1/2}] + 1}{1 - \exp\,[-N(1+C^2)^{1/2}]}\right\}^{-1}$
Todos los cambiadores con C = 0	$\epsilon = 1 - e^{-N}$

Tabla 10-4 **Relaciones de NUT para cambiadores de calor**
$C = C_{mín}/C_{máx}$ ϵ = eficacia NUT = $UA/C_{mín}$

Geometría de flujo	*Relación*
Doble tubería:	
Flujo paralelo	$N = \dfrac{-\ln\,[1 - (1+C)\epsilon]}{1+C}$
Flujo a contracorriente	$N = \dfrac{1}{C-1}\ln\left(\dfrac{\epsilon - 1}{C\epsilon - 1}\right)$
Flujo a contracorriente, C = 1	$N = \dfrac{\epsilon}{1 - \epsilon}$
Flujo transversal	
C $_{máx}$ **mezclado,** $_{mín}$ **sin mezclar**	$N = -\ln\left[1 + \dfrac{1}{C}\ln\,(1 - C\epsilon)\right]$
C $_{máx}$ **sin mezclar.** $C_{mín}$ **mezclado**	$N = \dfrac{-1}{C}[1 + C\ln\,(1 - \epsilon)]$
Chaqueta y tubo	
***Un* paso de chaqueta. 2, 4, 6 pasos de tubo**	$N = -(1 + C^2)^{-1/2}\ln\left[\dfrac{2/\epsilon - 1 - C + (1 + C^2)^{1/2}}{2/\epsilon - 1 - C - (1 + C^2)^{1/2}}\right]$
Todos los cambiadores, C = 0	$N = -\ln\,(1 - \epsilon)$

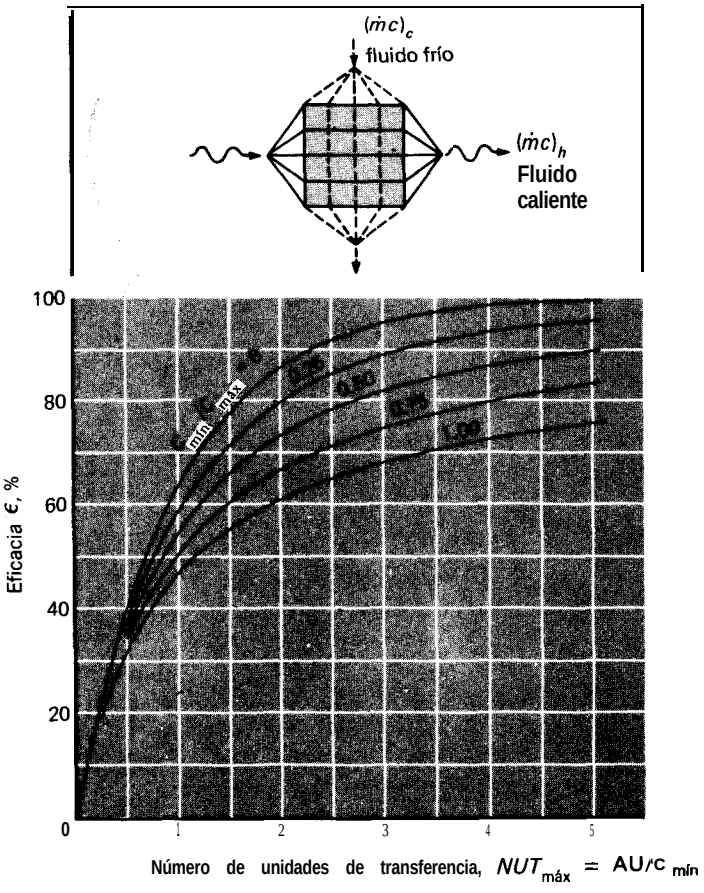


Fig. 10-15 Eficacia para cambiador de flujo transversal con fluidos no mezclados.

Ejemplo 10-6

El cambiador de calor del Ej. 10-3 se usa para calentar agua tal como se describió en este ejemplo. Utilizando las mismas temperaturas de entrada de fluido, calcule la temperatura de salida del agua cuando sólo se calientan 40 kg/min de agua pero se utiliza la misma cantidad de aceite. Calcule también la transferencia de calor total bajo estas nuevas condiciones.

Solución

El flujo del aceite se calcula a partir del balance de energía para el problema original:

$$\dot{m}_h c_h \text{ AT}_{,,} = \dot{m}_r c_r \text{ AT}, \qquad (a)$$

$$\dot{m}_h = \frac{(68)(4180)(75 - 35)}{(1900)(110 - 75)} = 170\ 97 \text{ kg/mín}$$

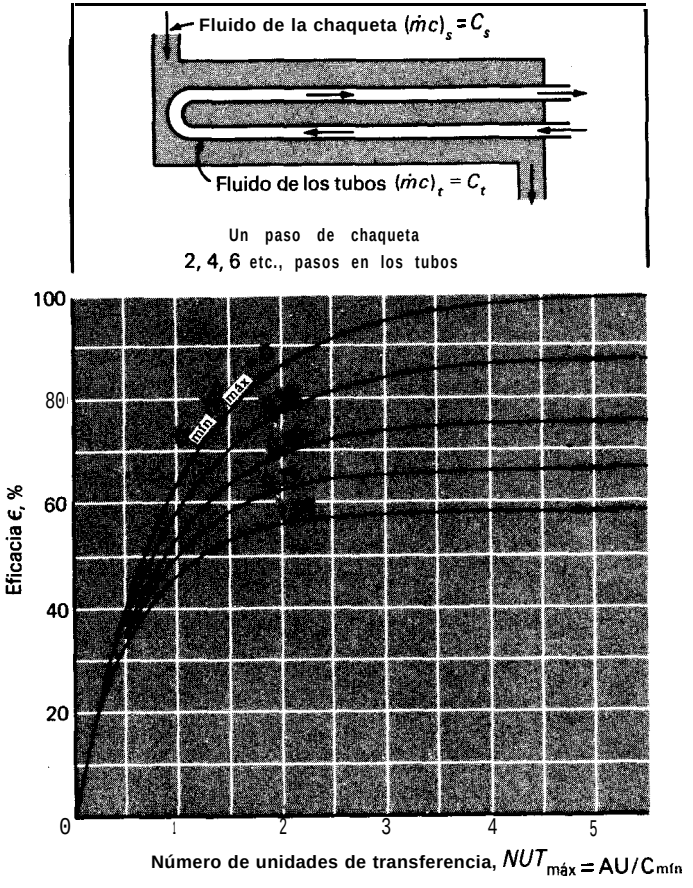


Fig. 10-16 Eficacia para el rendimiento de un cambiador de flujo a contracorriente paralelo I-2.

Las rapideces de capacidad para las nuevas condiciones se calculan ahora como

$$\dot{m}_h c_h = \frac{170.97}{60}(1900) = 5414 \text{ W/ °C}$$

$$\dot{m}_t c_t = \frac{40}{60}(4180) = 2787 \text{ W/°C}$$

de manera que el agua (fluido frío) es el fluido mínimo, y

$$\frac{C_{mín}}{C_{máx}} = \frac{2787}{5414} = 0.515$$

$$\text{NUT}_{máx} = \frac{UA}{C_{mín}} = \frac{(320)(15.82)}{2787} = 1.816$$

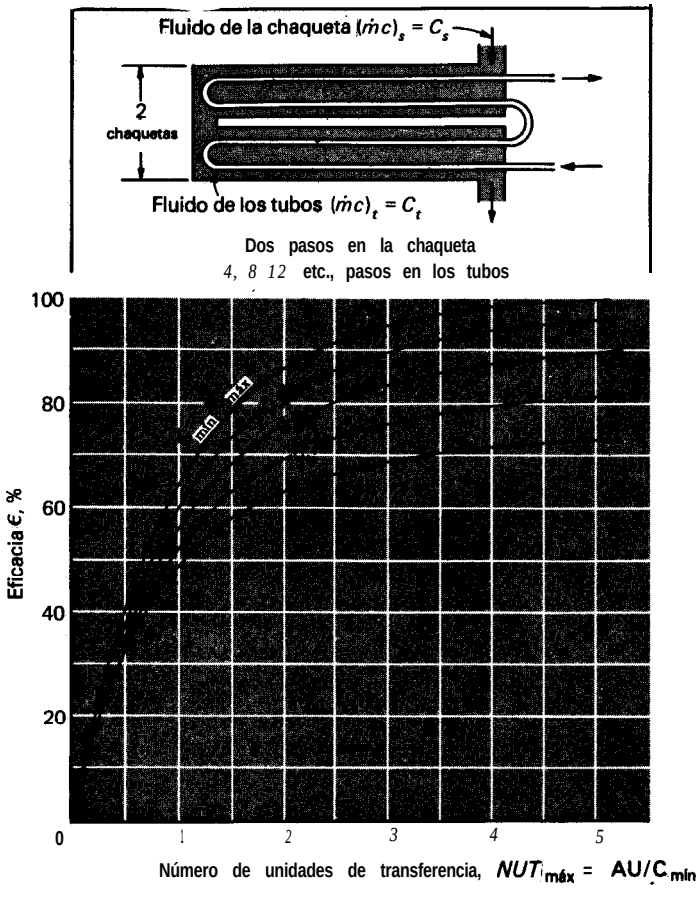


Fig. 10-17 Eficacia para el rendimiento de un cambiador de flujo a contracorriente con multipasos 2-4.

en donde el área de 15.82 m^2 SC torna del Ej. 10-3. Según la Fig. 10-13 o de la Tabla 10-3 la eficacia es

$$\epsilon = 0.744$$

y como el fluido frío es el mínimo, podemos escribir

$$\epsilon = \frac{\Delta T_{\text{frío}}}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{\Delta T_{\text{frío}}}{110 - 35} = 0.744 \qquad (c)$$

$$\Delta T_{\text{frío}} = 55.8\ ^{\circ}\text{C}$$

y la temperatura de salida del agua es

$$T_{\text{salida}} = 35 + 55.8 = 90.8\ ^{\circ}\text{C}$$

La transferencia de calor total bajo las nuevas condiciones de flujo se calculan como

$$q = \dot{m}_c c_c \, \Delta T_c = \frac{40}{60}(4180)(55.8) = 155.5 \text{ kW} \quad [5.29 \times 10^5 \text{ Btu/h}] \qquad (d)$$

Obsérvese que aunque el flujo se ha reducido en un 41% (68 a 40 kg/min), la transferencia de calor se reduce tan sólo en un 18% (189.5 a 155.5 kW), porque el cambiador es más eficaz a un flujo menor.

Ejemplo 10-7

Un cambiador de calor de tubería con aletas como el que se ve en la Fig. 10-5 se utiliza para calentar 5000 pies^3/min [2.36 m^3/s] de aire a 1 atm, de 60 a 85 °F (15.55 a 29.44 °C). El agua caliente entra a los tubos a 180 °F [82.22 °C] y el aire fluye a través de los tubos produciendo un coeficiente de transferencia de calor total promedio de 40 Btu/h·pie^2 °F [227 W/m^2·°C]. El área de la superficie total del cambiador es 100 pies^2 [9.29 m^2]. Calcule la temperatura de salida del agua y la rapidez de transferencia de calor.

Solución

La transferencia de calor se calcula del balance de energía en el aire. Primero, la densidad del aire de entrada es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(288.7)} = 1.223 \text{ kg/m}^3$$

de manera que el flujo de aire en masa (el fluido frío) es

$$\dot{m}_c = (2.36)(1.223) = 2.887 \text{ kg/s}$$

La transferencia de calor es entonces

$$q = \dot{m}_c c_c \, \Delta T_c = (2.887)(1006)(29.44 - 15.55)$$
$$= 40.34 \text{ kW} \quad [1.38 \times 10^5 \text{ Btu/h}] \qquad (a)$$

Del planteamiento del problema no sabemos cuál de los dos fluidos agua o aire es el fluido mínimo. Si el aire es el fluido mínimo, podemos calcular inmediatamente el NUT y utilizar la Fig. 10-15 para determinar la rapidez de flujo del agua y por consiguiente su temperatura de salida. Si el agua es el fluido mínimo se deberá utilizar un procedimiento de prueba y error con la Fig. 10-15 o Tabla 10-3. Suponemos que el aire es el fluido mínimo y en seguida verificamos nuestra suposición. Así

$$\dot{m}_c c_c = (2.887)(1006) = 2904 \text{ W/°C}$$

y

$$\text{NTU}_{\text{máx}} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}} = \frac{(227)(9.29)}{2904} = 0.726$$

y la eficacia basada en el aire como fluido mínimo es

$$\epsilon = \frac{\Delta T_{\text{aire}}}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{29.44 - 15.55}{82.22 - 15.55} = 0.208 \qquad (b)$$

Al introducir la Fig. 10-15 nos es imposible confrontar estas cantidades con las curvas. Esto quiere decir que el fluido caliente es el mínimo. Por tanto, debemos suponer valores para el flujo del agua hasta que podamos igualar los resultados con los dados por la Fig. 10-5 o Tabla 10-3. Primero observarnos que

$$C_{máx} = \dot{m}_c c_c = 2904 \text{ W/°C} \quad (c)$$

$$\text{NUT}_{máx} = \frac{UA}{c_{mín}} \quad (d)$$

$$\epsilon = \frac{\Delta T_h}{\Delta T_{máx}} = \frac{\Delta T_h}{82.22 - 15.55} \quad (e)$$

$$\Delta T_h = \frac{4.034 \times 10^4}{c_{mín}} = \frac{4.034 \times 10^4}{C_h} \quad (f)$$

Las iteraciones so"

				ϵ	
$\frac{c_{mín}}{c_{máx}}$	$C_{mín} = \dot{m}_h c_h$	$\text{NUT}_{máx}$	ΔT_h	*De la Fig. 10-15 o tabla 10-3*	*Calculado a partir de la Ec. (e)*
0.5	1452	1.452	27.78	0.65	0.417
0.25	726	2.905	55.56	0.89	0.833
0.22	639	3.301	63.13	0.92	0.947

Por tanto, estimamos que la rapidez de flujo del agua es cerca de

$$\dot{m}_h c_h = 645 \text{ W/°C}$$

$$\text{ni}_{,,} = \frac{645}{4180} = 0.154 \text{ kg/s} \quad [1221 \text{ lb}_m/\text{h}]$$

y en consecuencia la temperatura de salida del agua es

$$T_{w,\text{salida}} = 82.22 - \frac{4.034 \times 10^4}{645} = 19.68 \text{ °C}$$

Ejemplo 10-8

Un cambiador de calor de doble tubería co" flujo a contracorriente se utiliza para calentar 1.25 kg/s de agua, de 35 a 80 °C, enfriando un aceite [c_p = 2.0 kJ/kg·°C] de 150 a 85 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 150 Btu/h·pie²·°F. Se piensa construir un arreglo similar en otro lugar de la planta, pero se desea comparar el rendimiento de este cambiador de calor de flujo a contracorriente único co" dos pequeños cambiadores de calor de flujo a contracorriente conectados en serie del lado del agua y en paralelo del lado del aceite, tal como se muestra en el dibujo. El flujo de aceite se divide equitativamente entre los dos cambiadores y podemos suponer que el coeficiente de transferencia de calor total para los cambiadores pequeños es el mismo que para el grande. Si los cambiadores pequeños cuesta" 20% más por unidad de área de superficie, ¿cuál será el arreglo más económico, el cambiador grande solo o los dos cambiadores pequeños de igual tamaño?

Solución

Calculemos el área de la superficie que se requiere para ambas alternativas y en seguida comparamos los costos. Para el cambiador grande

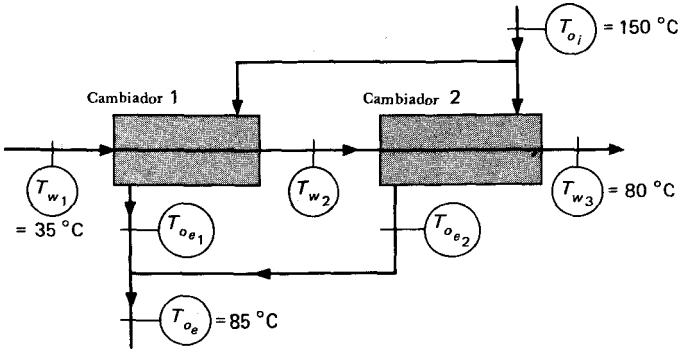


Figura Ejemplo 10-8

$$q = \dot{m}_c c_c \text{ AT, } = \dot{m}_h c_h \text{ AT,}$$
$$= (1.25)(4180)(80 - 35) = \dot{m}_h c_h (150 \quad 85)$$
$$= 2.351 \text{ x } 10^{\text{"}} \text{ W } 18.02 \times 10^5 \text{ Btu/h]}$$

$$\dot{m}_c c_c = 5225 \text{ W/°C} \qquad \dot{m}_h c_h = 3617 \text{ WPC}$$

de manera que el aceite es el fluido mínimo

$$\epsilon_h = \frac{\Delta T_h}{150 - 35} = \frac{150 - 85}{150 - 35} = 0.565$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{3617}{5225} = 0.692$$

De la Fig. 10-13 o la Tabla 10-4, $\text{NUT}_{\text{máx}}$ = 1.09, de manera que

$$A = \text{NUT}_{\text{máx}} \frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1.09)(3617)}{850} = 4.649 \text{ m}^2 \text{ [50.04 pie}^2\text{]}$$

Ahora deseamos calcular el área de la superficie requerida para los dos pequeños cambiadores que se muestran en el dibujo. Tenemos

$$\dot{m}_h c_h = \frac{3617}{2} = 1809 \text{ WPC}$$

$$\dot{m}_c c_c = 5225 \text{ W/°C}$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{1809}{5225} = 0.347$$

El número de unidades de transferencia es el mismo para cada cambiador ya que UA y $C_{\text{mín}}$ son los mismos para cada cambiador. Esto requiere que la eficacia sea la misma para cada uno de ellos. Así,

$$\epsilon_1 = \frac{T_{oi} \quad T_{oe,1}}{T_{oi} - T_{,,,}} = \epsilon_2 = \frac{T_{oi} - T_{oe,2}}{T_{oi} \quad T_{w,2}}$$

$$\epsilon_1 = \frac{150 - T_{oe,1}}{150 - 35} = \epsilon_2 = \frac{150 - T_{oe,2}}{150 - T_{w,2}} \qquad (a)$$

en donde la nomenclatura para las temperaturas está indicada en el dibujo. Como el flujo de aceite es el mismo en cada cambiador y la temperatura de salida promedio deberá ser 85 °C, podemos escribir

$$\frac{T_{oe,1} + T_{oe,2}}{2} = 85 \qquad (b)$$

Un balance de energía en el segundo cambiador de calor nos da

$$(5225)(T_{w3} - T_{w2}) = (1809)(T_{oi} - T_{oe,2})$$
$$(5225)(80 - T_{w2}) = (1809)(150 - T_{oe,2}) \qquad (c)$$

Ahora tenemos las tres ecuaciones a), b) y c) que podrán resolverse para las tres incógnitas $T_{oe,1}$, $T_{oe\ 2}$ y T_{w2}. Las soluciones son

$$T_{oe,1} = 76.98\ ^\circ\text{C}$$
$$T_{oe,2} = 93.02\ ^\circ\text{C}$$
$$T_{w2} = 60.26\ ^\circ\text{C}$$

Las eficacias pueden calcularse entonces como

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{150 - 76.98}{150 - 35} = 0.635$$

De la Fig. 10-13 o Tabla 10-4, obtenemos $\text{NUT}_{\text{máx}} = 1.16$, de manera que:

$$A = \text{NUT}_{\text{máx}} \frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1.16)(1809)}{850} = 2.47\ \text{m}^2$$

Así encontramos que se necesitan 2.47 m^2 de área por cada uno de los cambiadores pequeños, o un total de 4.94 m^2. Esto es más que los 4.649 m^2 requeridos en el cambiador grande: además, el costo por unidad de área es mayor, así que la selección más económica será el cambiador grande solo. Sin embargo. se debe señalar que el costo de bombeo del aceite será tal vez menor con los dos cambiadores pequeños. de manera que esto podría propiciar una decisión en favor de los cambiadores pequeños, si el costo de bombeo representa un factor económico sustancial.

Ejemplo 10-9

Se utiliza aceite caliente a 100 °C para calentar aire en un cambiador de calor de chaqueta y tubería. El aceite corre por seis pasos de tubería y el aire por un paso de chaqueta: se tienen que calentar 2.0 kg/s de aire de 20 a 80 °C. El calor específico del aceite es 2100 J/kg·°C, y su rapidez de flujo es 3.0 kg/s. Calcule el área requerida para el cambiador de calor para $U = 200\ \text{W/m}^2\ ^\circ\text{C}$.

Solución

El balance de energía básico es

$$\dot{m}_o c_o \Delta T_o = \dot{m}_a c_{pa} \Delta T_a$$

$$(3.0)(2100)(100 - T_{oc}) = (2.0)(1009)(80 - 20)$$

$$T_{oc} = 80.78\ ^\circ\text{C}$$

Tenemos

$$\dot{m}_h c_h = (3.0)(2100) = 6300\ \text{W/°C}$$

$$\dot{m}_c c_c = (2.0)(1009) = 2018\ \text{W/°C}$$

de manera que el aire es el fluido mínimo y

$$C = \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{2018}{6300} = 0.3203$$

La eficacia es

$$\epsilon = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{80 - 20}{100 - 20} = 0.75$$

Ahora podemos utilizar ya sea la Fig. 10-16 o bien la relación analítica de la Tabla 10-14 para obtener el NUT. Para este problema escogemos la tabla.

$$N = -(1 + 0.3203^2)^{-1/2} \ln\left[\frac{2/0.75 - 1 - 0.3203 + (1 + 0.3203^2)^{1/2}}{2/0.75 - 1 - 0.3203 - (1 + 0.3203^2)^{1/2}}\right]$$
$$= 1.99$$

Ahora, con $U = 200$ calculamos el área como

$$A = \text{NUT}\frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1.99)(2018)}{200} = 20.09\ \text{m}^2$$

10-7 Cambiadores de calor compactos

Algunas superficies de cambiadores de calor no caen dentro de las categorías estudiadas en las secciones precedentes. Las más importantes son los cambiadores compactos que alcanzan un área de superficie por unidad de volumen muy elevada. Estos cambiadores son sumamente adaptables en aplicaciones en las que se encuentran flujos de gas o valores de h bajos. Kays y London [3] han estudiado de manera muy extensa estos tipos de cambiadores y en la Fig. 10-18 se muestran cuatro configuraciones típicas. En la Fig. 10-18*a* se ve un cambiador de tubo con aletas con los tubos planos, la Fig. 10-18*b* muestra un arreglo circular de tubos aletados con una configuración diferente y las Figs. 10-18*c* y *d* presentan dos maneras de obtener grandes áreas de superficie en ambos lados del cambiador. Estas dos últimas configuraciones se aplican en procesos que comprenden transferencia de calor gas a gas.

En las Figs. 10-19 y 10-20 se muestran la transferencia de calor y el factor de fricción para dos cambiadores compactos típicos. Los números de Stanton y Reynolds se basan en la masa velocidad en el área de sección transversal de flujo mínimo y un diámetro hidráulico indicado en la figura.

$$G = \frac{\dot{m}}{A_c} \tag{10-27}$$

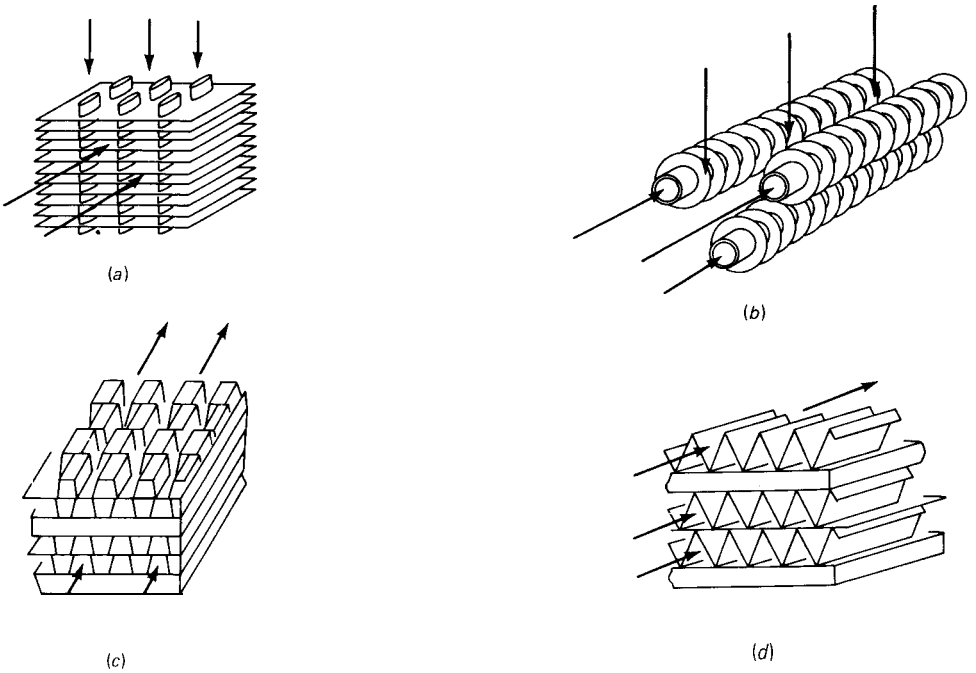


Fig. 10-18 Ejemplos de configuraciones de cambiadores de calor compactos de acuerdo con la Ref. 3.

La razón del área de flujo libre al área frontal

$$\sigma = \frac{A_c}{A} \tag{10-28}$$

también se da en la figura. Así,

$$\mathrm{St} = \frac{h}{Gc_p} \qquad \mathrm{Re} = \frac{D_h G}{\mu}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura global promedio. La transferencia de calor y la fricción del fluido adentro de los tubos se evalúan con el método del diámetro hidráulico estudiado en el Cap. 6. La caída de presión se calcula con la gráfica de factor de fricción f y la siguiente relación:

$$\Delta p = \frac{v_1 G^2}{2g_c}\left[(1+\sigma^2)\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right) + f\frac{A}{A_c}\frac{v_m}{v_1}\right] \tag{10-29}$$

en donde v_1 y v_2 son los volúmenes específicos de entrada y salida, respectivamente, y v_m es el volumen especifico medio en el cambiador, tomando normalmente como $v_m = (v_1 + v_2)/2$.

Los cambiadores de calor compactos involucran procedimientos de diseño bastante meticulosos y se les estudia en detalle en la Ref. 3.

Ejemplo 10-10

El aire a 1 atm y 300 K entra a un cambiador como el que se ve en la Fig. 10-19, a una velocidad de 15 m/s. Calcule el coeficiente de transferencia de calor.

Solución

Obtenemos las propiedades del aire de la Tabla A-5 como

$$\rho = 1.1774 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1.0057 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$
$$\mu = 1.983 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \qquad Pr = 0.708$$

De la Fig. 10-19 tenemos

$$\sigma = \frac{A_c}{A} = 0.697 \qquad D_h = 0.0118 \text{ pie} = 3.597 \text{ mm}$$

La masa velocidad es entonces

$$G = \frac{\dot{m}}{A_c} = \frac{\rho u_\infty A}{A_c} = \frac{(1.1774)(15)}{0.697} = 38.18 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

y el número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{D_h G}{\mu} = \frac{(3.597 \times 10^{-3})(38.18)}{1.983 \times 10^{-5}} = 6.926 \times 10^3$$

En la Fig. 10-19 podemos leer

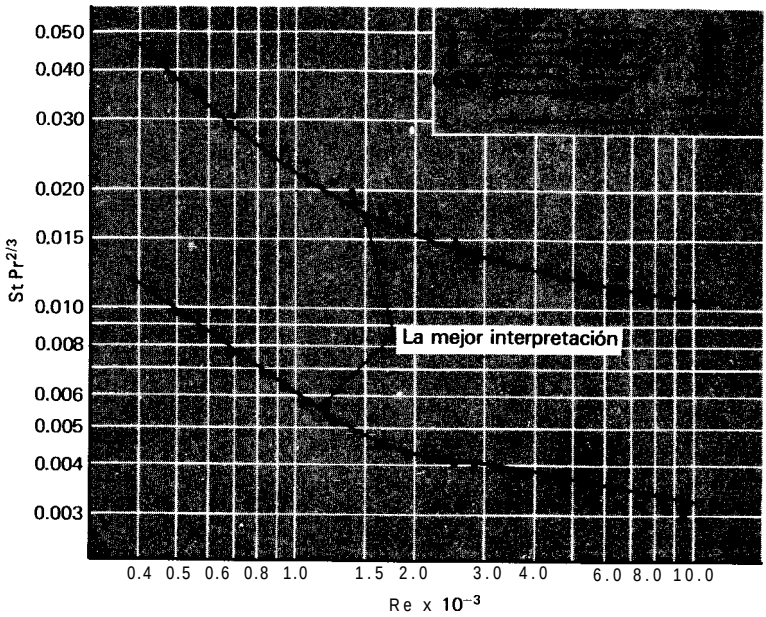
$$\text{St Pr}^{2/3} = 0.0036 = \frac{h}{Gc_p} \text{Pr}^{2/3}$$

y el coeficiente de transferencia de calor es

$$h = (0.0036)(38.18)(1005.7)(0.708)^{-2/3}$$
$$= 174 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad [30.64 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

10-8 Análisis para propiedades variables

El coeficiente de transferencia de calor por convección depende del fluido bajo consideración. De manera correspondiente, el coeficiente de transferencia de calor total para un cambiador de calor puede variar en forma sustancial a través del cambiador si



Inclinación de aletas = 9.68/plg.
Diámetro hidráulico de paso del flujo, D_h = 0.01180 pie
Espesor de aleta de metal = 0.004 plg., cobre
Area de flujo libre/área frontal, σ = 0.697
Area de transferencia de calor total/volumen total, α = 229 pies²/pie³
Area de aleta/área total = 0.795

Fig. 10-19 Transferencia de calor y factor de fricción para un cambiador de calor de tubo plano con aletas, de acuerdo con la Ref. 3.

los fluidos son tales que sus propiedades dependan en forma considerable de la temperatura. En estas condiciones el análisis se realiza mejor en una base numérica o de diferencia finita. Para ilustrar la técnica, consideremos el cambiador de calor sencillo de doble tubería con flujo paralelo de la Sec. 10-5. El cambiador de calor está dividido en incrementos de área de superficie ΔA_j. Para este incremento de área de superficie, las temperaturas caliente y fría son T_{hj} y T_{cj}, respectivamente y supondremos que el coeficiente de transferencia de calor total se puede expresar como una función de estas temperaturas. Así

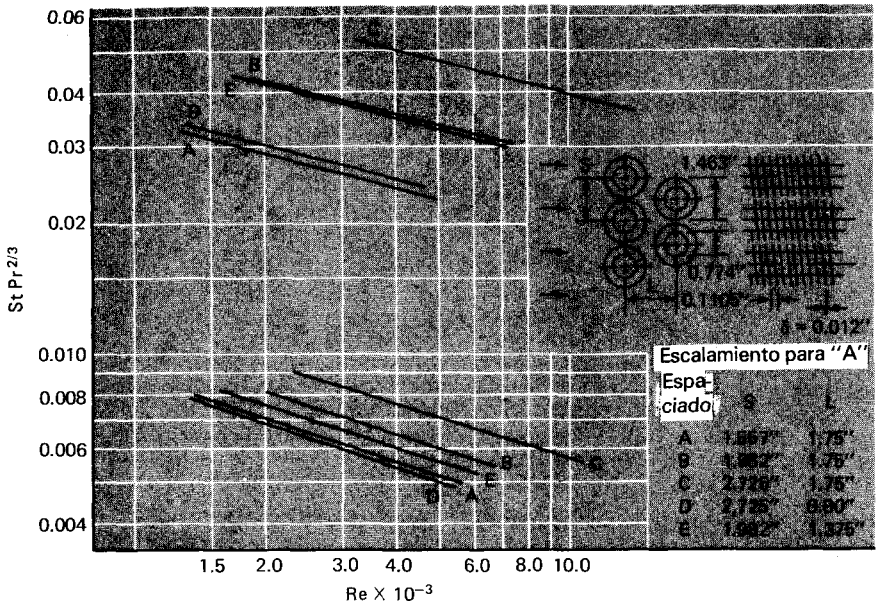
$$U_j = U_j(T_{h_j}, T_{c_j})$$

La transferencia de calor incremental en ΔA_j es, según la Ec. 10-6,

$$\Delta q_j = -(\dot{m}_h c_h)_j (T_{h_{j+1}} - T_{h_j}) = (\dot{m}_c c_c)_j (T_{c_{j+1}} - T_{c_j}) \qquad (10\text{-}30)$$

También,

$$\Delta q_j = U_j \Delta A_j (T_h - T_c)_j \qquad (10\text{-}31)$$



Diámetro externo del tubo = 0.774 plg
Inclinación de las aletas = 9.05/plg
Espesor de aletas = 0.012 plg
Area de aletas/área total = 0.835

Diámetro hidráulico de paso	*B*	C	*D*	*E*
de flujo, D_h =	0.02685	0.0445	0.01587	0.02 108 pie
Area de flujo libre/ área frontal, α =	0.572	0.688	0.537	0.572
Area de transferencia de calor/ volumen total, α =	85.1	61.9	135	108 pies^2/pie^3

Nola: El área mfnima de flujo libre ocurre en rodos los casos en espacios transversales al flujo. excepto para *D*, en el que el área mlnima está en las diagonales.

Fig. 10-20 Transferencia de calor y factor de fricción para un cambiador de calor de tubo circular con aletas, de acuerdo con la Ref. 3.

La ecuación de diferencia finita análoga a la Ec. 10-9 es

$$\frac{(T_h - T_c)_{j+1} - (T_h - T_c)_j}{(T_h - T_c)_j} = -U_j \left[\frac{1}{(\dot{m}_h c_h)_j} + \frac{1}{(\dot{m}_c c_c)_j}\right] \Delta A_j = -K_j(T_h, T_c)\, \Delta A_j \qquad (10\text{-}32)$$

en donde hemos introducido la definición indicada para K_j. Reduciendo la Ec. 10-32, obtenemos

$$\frac{(T_h - T_c)_{j+1}}{(T_h - T_c)_j} = 1 - K_j \Delta A_j \qquad (10\text{-}33)$$

Ahora está claro el procedimiento de análisis numérico, al darse las temperaturas de entrada y flujo:

1. Escoja un valor de ΔA_j adecuado para el analisis.
2. Calcule el valor de Upara las condiciones de entrada y a través del incremento inicial ΔA.
3. Calcule el valor de q para este incremento a partir de la Ec. 10-31.
4. Calcule los valores de T_h, T_c y $T_h - T_c$ para el siguiente incremento, utilizando las Ecs. 10-30 y 10-33.
5. Repita los pasos precedentes hasta que haya empleado todos los incrementos de ΔA.

La transferencia de calor total se calcula entonces a partir de

$$q_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{n} \Delta q_j$$

donde n es el número de incrementos en ΔA.

Un análisis numérico como el que acabamos de ver se realiza mejor con una computadora. Las rapideces de transferencia de calor calculadas por medio de un análisis de propiedades, con frecuencia pueden diferir en cantidades sustanciales de un análisis de propiedades constantes. Por supuesto, la parte más difícil del análisis es la determinación de los valores de h. Para información adicional sobre este complicado pero importante tema remitimos al lector interesado a la literatura sobre transferencia de calor.

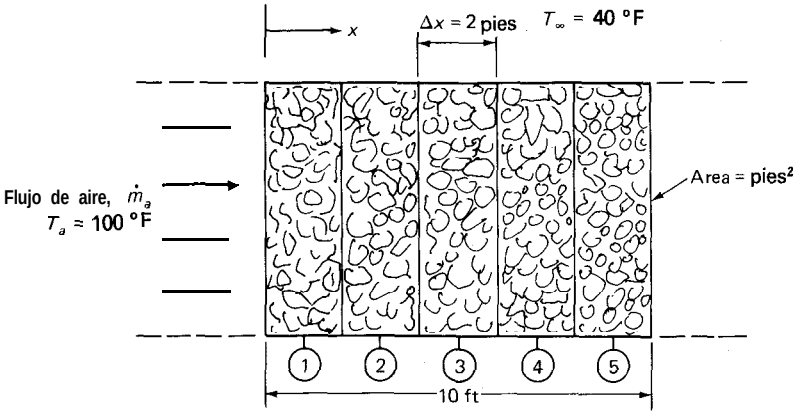
Ejemplo 10-11: Respuesta transitoria del sistema de almacenamiento de energía térmica

Se emplea una unidad de depósito de energía térmica con lecho de roca para absorber energía de una corriente de aire caliente y almacenarlo para su uso posterior. En el dibujo se muestra el esquema para el aparato. La superficie está cubierta con un material que tiene un valor global R de 2 h·°F pies^2/Btu. El área de flujo de entrada es de 5 X 5 = 25 pies^2, y la longitud del lecho de roca es de 10 pies. Las propiedades de la roca son

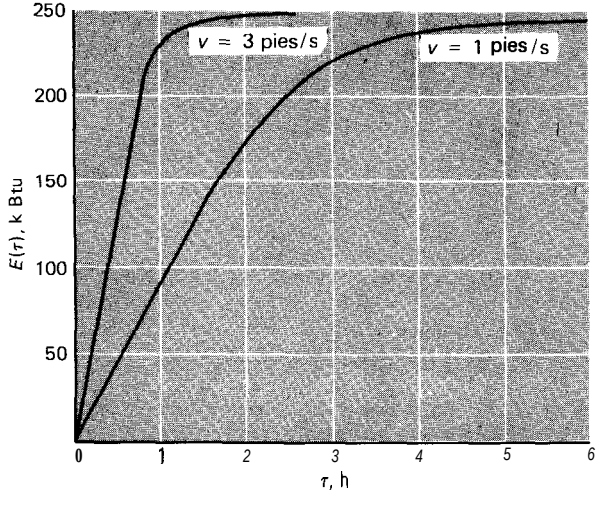
$$\rho_r = 80 \text{ lb}_m/\text{pies}^3 \text{ [1281.4 kg/m}^3\text{]}$$
$$c_r = 0.21 \text{ Btu/lb}_m \cdot °\text{F} \quad [0.88 \text{ kJ/kg} \cdot °\text{C}]$$
$$k_r = 0.5 \text{ Btu/h pie.} °\text{F} \quad \text{[0.87 W/m} \cdot °\text{C]}$$

A medida que el aire fluye a través de la roca, éste se encuentra en un contacto tan directo con ella que las temperaturas del aire y la roca se pueden considerar como iguales en cualquier posición x.

El lecho de roca se encuentra inicialmente a 40 °F y el aire entra a 1 atm y 100 °F. El medio ambiente permanece a 40 °F. Calcule el almacenamiento de energía relativo a 40 °F como una función del tiempo para velocidades de entrada de 1.0 y 3.0 pies/s.



(a)



(b)

Fig. Ej. 10-11 (*a*) **Esquemático,** (*b*) **acumulación de energía.**

Solución

Se puede demostrar que la conducción axil de energía es pequeña comparada con el transporte de energía en masa. Para una diferencia de temperatura de 60 °F sobre una longitud de 2 pies

$$q_{\text{cond}} = \text{KA}\,\frac{\Delta T}{\Delta x} = (0.5)(25)\,\frac{60}{2} = 375\ \text{Btu/h} \quad [109.9\ \text{W}] \tag{a}$$

la densidad del aire a 100 °F es

$$\rho_a = \frac{(14.696)(144)}{(53.35)(560)} = 0.07083\ \text{lb}_m/\text{pie}^3\ [1.1346\ \text{kg/m}^3] \tag{b}$$

y el flujo de masa a 1.0 pie/s es

$$\dot{m}_a = \rho A v = (0.07083)(25)(1.0) = 1.7708 \text{ lb}_m/\text{s} = 6375 \text{ lb}_m/\text{h} \quad [2891.7 \text{ kg/h}] \tag{c}$$

El transporte de energía correspondiente para una diferencia de temperatura de 60 °F es

$$q = \dot{m} c_{p_a} \Delta T = (6375)(0.24)(60) = 91{,}800 \text{ Btu/h} \quad [26\,904 \text{ W}] \tag{d}$$

y éste es mucho mayor que el valor en la Ec. (a).

Ahora escribimos un balance de energía para uno de los nodos axiles corno

Energía transportada hacia el interior − energía transportada hacia el exterior − energía perdida hacia los alrededores = rapideces de acumulación de energía del nodo

o

$$\dot{m}_a c_{p_a}(T^p_{m-1} - T^p_m) - \frac{(T^p_m - T_\infty) P \Delta x}{R_\infty} = \rho_r c_r \Delta V_r \frac{(T^{p+1}_m - T^p_m)}{\Delta \tau} \tag{e}$$

en donde la temperatura de salida del aire desde el nodo m se supone ser la temperatura de la roca de ese nodo (T^p_m). Se puede resolver la Ec. (e) para obtener

$$T^{p+1}_m = F\dot{m}_a c_{p_a} T^p_{m-1} + \left[1 - F\left(\dot{m}_a c_{p_a} + \frac{P \Delta x}{R_\infty}\right)\right] T^p_m + \frac{FP \Delta x}{R_\infty} T_\infty \tag{f}$$

donde

$$F = \frac{\Delta \tau}{\rho_r c_r \Delta V_r}$$

Aquí P es el perímetro y Δx es el incremento x (P = 4 X 5 = 20 pies, para este problema). Por tanto, estamos en posición de calcular las temperaturas en la roca a medida que progresa el tiempo.

El requerimiento de estabilidad es tal que el coeficiente en el término T^p_m no puede ser negativo. Utilizando Ax = 2 pies encontramos que el valor máximo de F es 6.4495 X 10^{-4}, lo cual da un incremento de tiempo máximo de 0.54176 h. Con una velocidad de 3 pies/s el incremento de tiempo máximo para la estabilidad es de 0.1922 h. Para los cálculos seleccionamos los siguientes valores de AT con los valores calculados resultantes de F:

v	AT, h	F
1.0	0.2	2.38095 x 10^{-4}
3.0	0.1	1.190476 x 10^{-4}

Con las propiedades adecuadas e insertando estos valores en la Ec. (f) tenernos corno resultado

$$T^{p+1}_m = 0.3642943 T^p_{m-1} + 0.630943 T^p_m + 0.1904762 \quad \text{para } v = 1.0 \text{ pie/s} \tag{g}$$

$$T^{p+1}_m = 0.546430633 T^p_{m-1} + 0.451188 T^p_m + 0.0952381 \quad \text{para } v = 3.0 \text{ pie/s} \tag{h}$$

El almacenamiento de energía relativa a 40 °F se puede calcular entonces a partir de

$$E(\tau) = \sum_{m=1}^{5} \rho_r c_r \Delta V_r [T_m(\tau) - 401 \tag{i}$$

como una función del tiempo. El procedimiento de cálculo es el siguiente.

1. Inicie todas las T_m en 40 °F, con T_{m-1} para el nodo 1 a 100 °F para todos los incrementos de tiempo.
2. Calcule los nuevos valores de T_m ya sea de la Ec. (g) o de la Ec. (h). avanzando en tiempo hasta que haya alcanzado el punto de interrupción deseado o cuando la temperatura alcanza condiciones de estado estacionario.
3. Utilizando valores calculados de $t_m(\tau)$, evalúe $E(\tau)$ a partir de la Ec. (i).

Los resultados de los cálculos se muestran en la figura que lo acompaña. Para v = 3.0 pies/s, el estado estacionario se alcanza cerca de τ = 1.5 h, mientras que para v = 1.0 pie/s éste se alcanza cerca de τ = 5.5 h. Observe que el valor de estado estacionario de E para v = 1 .O pie/s es menor que para v = 3.0 pies/s debido a que involucra un mayor tiempo y más "fugas" de energía a través del aislante.

Este problema muestra cómo se puede resolver de una manera directa un problema muy complejo, utilizando un planteamiento numérico.

Ejemplo 10-12: Análisis de propiedades variables en un calefactor de conducto

Un conducto de 600 pies de largo con un diámetro de 1 pie sirve de calefactor de ambiente en un área de almacenamiento. Aire caliente entra al conducto a 800 °F y la emisividad de la superficie exterior del conducto es de 0.6. Determine la temperatura del aire en el conducto, la temperatura de pared y el flujo de calor hacia el exterior a lo largo del conducto para rapideces de flujo de 0.3, 1 .O y 1.5 lb_m/s. Tome en cuenta las variaciones en las propiedades del aire. La temperatura de la habitación tanto para convección como para radiación es 70 °F.

Solución

Este es un problema en el que se tiene que utilizar una solución numérica. Escogemos una sección típica de conducto con una longitud Ax y un perímetro P tal como se muestra. y llevamos a cabo los balances de energía. Suponemos que la resistencia de conducción de la pared del conducto es insignificante. Dentro del conducto el balance de energía es

$$\dot{m}_a c_p T_{m,a} = h_i P\,\Delta x\,(T_{m,a} - T_{m,w}) + \dot{m}_a c_p T_{m+1,a} \qquad (a)$$

en donde h_i es el coeficiente de transferencia de calor por convección en el interior. el cual puede calcularse (el flujo es turbulento) a partir de

$$\mathrm{Nu} = \frac{h_i d}{k} = 0.023\ \mathrm{Re}_d^{0.8}\ \mathrm{Pr}^{0.3} \qquad (b)$$

con propiedades evaluadas a la temperatura global del aire $(T_{m\,a})$. El balance de energía para el flujo de calor a través de la pared es

$$q_{\mathrm{conv},i} = q_{\mathrm{cmv.o}} + q_{\mathrm{rad},o}$$

o, utilizando coeficientes de convección y términos de radiación por unidad de área,

$$h_i(T_{m,a} - T_{m,w}) = h_c(T_{m,w} \quad T_\infty) + \sigma\epsilon(T_{m,w}^4 - T_\infty^4) \qquad (c)$$

en donde el coeficiente de convección hacia el exterior se puede calcular a partir de la relación de convección libre,

$$h_c = 0.27 \left(\frac{T_{m,w} - T_\infty}{d} \right)^{1/4} \quad \text{Btu/h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F} \tag{d}$$

Insertando esta relación en la Ec. (c) obtenemos

$$h_i(T_{m,a} \quad T_{m,w}) = \frac{0.27}{d^{1/4}} (T_{m,w} - T_\infty)^{5/4} + \sigma\epsilon(T_{m,w}^4 - T_\infty^4) \tag{e}$$

La Ec, (a) se puede resolver para T_{m} + $_{1,a}$ para obtener

$$T_{m+1,a} = \left(1 - \frac{h_i P \, \Delta x}{\dot{m}_a c_p} \right)_m T_{m,a} + \left(\frac{h_i P \, \Delta x}{\dot{m}_a c_p} \right)_m T_{m,w} \tag{f}$$

Con estas ecuaciones a la mano, podemos formular ahora el algoritmo de cálculo de la siguiente manera. Obsérvese que todas las temperaturas deben estar en grados Rankine debido al término de radiación.

1. Seleccione Ax.
2. Comenzando en x = 0, condiciones de entrada evalúe h_i de la Ec. (8) con propiedades evaluadas en $T_{m,a}$. (A la entrada $T_{m,a}$ = 800 °F = 1260 °R).
3. Resuelva (por iteración) la Ec. (e) para $T_{m,w}$.
4. Resuelva para $T_{m+1,a}$ de la Ec. (f).
5. Repita ahora incrementos sucesivos hasta que alcance el final del conducto (x = 600 pies).
6. El calor perdido en cada incremento es

$$q = P \, \Delta x \, h_i(T_{m,a} - T_{m,w})$$

o el flujo de calor es

$$\frac{q}{A} = h_i(T_{m,a} \quad T_{m,w}) \tag{g}$$

7. Los resultados para $T_{m,a}$, $T_{m,w}$ y $(q/A)_m$ se pueden graficar como en las figuras adjuntas.

Para estos cálculos hemos seleccionado Δx = 50 pies. Para el flujo pequeño (0.3 lb_m/s) observamos que el aire alcanza esencialmente la temperatura de la habitación a medio camino de la longitud del conducto, de manera que se proporciona muy poca calefacción sobrepasando este punto. Con el flujo de 1 .0 lb_m/s sigue existiendo cierto calentamiento en el final del conducto, aunque es muy reducido. El flujo de 1.5 lb_m/s aporta un calentamiento sustancial a lo largo del conducto.

10-9 Consideraciones de diseño de cambiadores de calor

En las industrias de procesamiento y energía o actividades relacionadas, se compran muchos cambiadores de calor por catálogo y la selección se realiza en base al costo y especificaciones proporcionadas por los diferentes fabricantes. En aplicaciones más especializadas, tales como la industria aeroespacial y electrónica, con frecuencia se necesita un diseño particular. Allí en donde el cambiador de calor forma parte del total de una maquinaria o aparato que debe fabricarse, se podrá comparar el objeto estándar; pero cuando las condiciones de costo y manufactura lo requieren, el cambiador de calor podrá diseñarse especialmente para la aplicación. Ya sea el cambiador de calor un

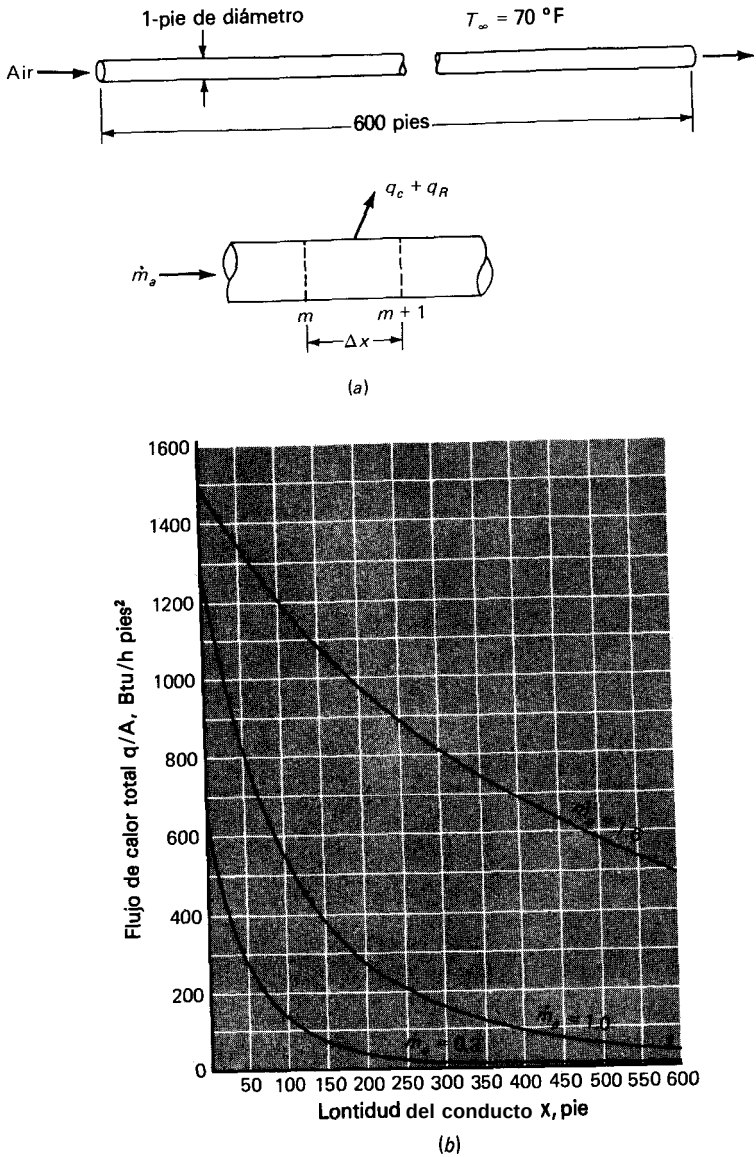
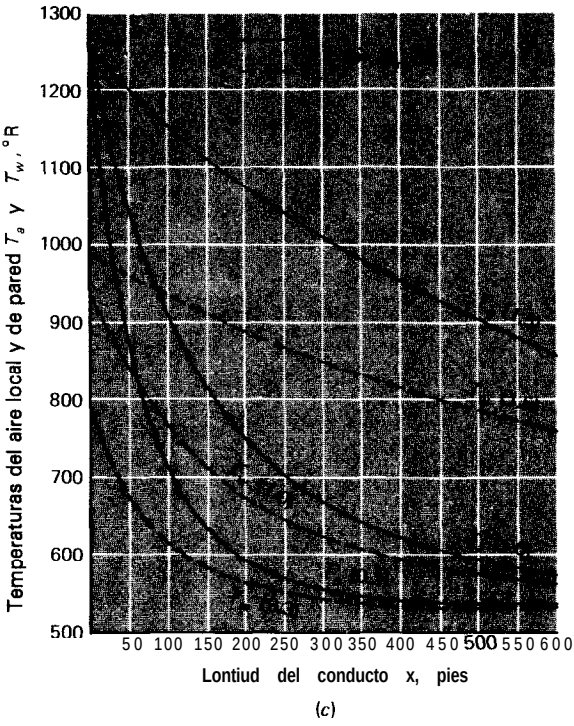


Figura Ejemplo 10-12 *(a)* Esquema, *(b)* flujo de calor, *(c)* perfiles de temperatura.

aparato seleccionado por catálogo o diseñado específicamente para la aplicación, casi siempre se tomarán en consideración los siguientes factores:

1. **Necesidades de transferencia de calor**
2. **costo**



ñg. Ej. 10-12 (Continuación)

3. Tamaño físico
4. Características de caída de presión

Las necesidades de transferencia de calor deberán satisfacerse en la selección o el diseño de cualquier cambiador de calor. La manera en que se satisfacen estos requerimientos depende de la importancia relativa que se dé a los pasos 2 y 4. Forzando los fluidos a través de los cambiadores de calor a velocidades más altas, el coeficiente de transferencia de calor total se puede aumentar, pero este incremento en velocidad resulta en una caída de presión mayor a través del cambiador y por consiguiente en mayor costo de bombeo. Si se incrementa el área de superficie del cambiador, el coeficiente de transferencia de calor total y por tanto, la caída de presión no necesita ser tan grande; sin embargo, pueden haber limitaciones en cuanto al tamaño adecuado y un mayor tamaño de como resultado un mayor costo para el cambiador de calor. Un juicio prudente y una consideración de estos factores tendrá como resultado un diseño adecuado.

Preguntas de repaso

1. Defina el coeficiente de transferencia de calor total.
2. ¿Qué es un factor de incrustamiento?

3. (Por qué un arreglo mezclado o sin mezcla influye en el rendimiento de un cambiador de calor?
4. ¿Cuándo se aplica mejor el método DTML a los cálculos sobre cambiadores de calor?
5. Defina la eficacia.
6. ¿Qué ventajas ofrece el método de eficacia NUT sobre el método de DTML?
7. ¿Qué significa el fluido "mínimo"?
8. ¿Por qué es más efectivo un cambiador de flujo a contracorriente que uno de flujo paralelo?

Problemas

10-1 Para calentar 2.5 kg/s de agua de 35 a 85 °C se utilizan gases calientes de escape en un cambiador de calor de tubos con aletas y flujo transversal. Los gases [c_p = 1.09 kJ/kg• °C entran a 200 y salen a 93 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 180 W/m²• °C. Calcule el área de cambiador de calor usando (a) el enfoque DTML y (b) el método de eficacia NUT.

10-2 Para el cambiador en el Prob. 10-l el flujo de agua se reduce a la mitad, mientras que el flujo de gas se mantiene constante junto con las temperaturas de entrada de los fluidos. Calcule el porcentaje de reducción en transferencia de calor que resulta de esta reducción de flujo. Suponga que el coeficiente de transferencia de calor total permanece constante.

10-3 Repita el Prob. 10-l para un cambiador de chaqueta y tubo con dos pasos en los tubos. El gas es el fluido en la chaqueta.

16-4 Repita el Prob. 10-2 usando el cambiador de chaqueta y tubos del Prob. 10-S.

16-5 Se desea calentar 230 kg/h de agua de 35 a 93 °C con aceite [c_p = 2.1 kJ/kg•°C] que tiene una temperatura inicial de 175 °C. El flujo en masa de aceite es también 230 kg/h. Se dispone de dos cambiadores de calor de doble tubo:

Cambiador 1: $U = 570$ W/m²·°C $A = 0.47$ m²

Cambiador 2: $U = 370$ W/m²·°C $A = 0.94$ m²

¿Cuál cambiador debe usarse?

10-6 Se dispone de un flujo de 230 kg/h de agua a 35 °C para utilizarse como enfriador en un cambiador de calor de doble tubo cuya área de superficie total es 1.4 m². El agua se usará para enfriar aceite [c_p = 2.1 kJ/kg•°C a partir de una temperatura inicial de 120 °C. Debido a otras circunstancias, no puede permitirse una temperatura de salida del agua superior a 99 °C. La temperatura de salida del aceite no debe ser inferior a 60 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 280 W/m²•°C. Estime el flujo máximo de aceite que puede enfriarse, suponiendo que el flujo-de agua se fija en 230 kg/h.

10-7 En un cambiador de calor de flujo a contracorriente entra agua a 99 °C. Se utiliza para calentar una corriente de agua fría de 4 a 32 °C. El flujo de la corriente fría es 1.3 kg/s, y el flujo de la corriente caliente es 2.6 kg/s. El coeficiente de transferencia de calor total es 830 W/m²·°C. ¿Cuál es el área del cambiador de calor? Calcule la eficacia del cambiador de calor.

10-8 Comenzando con un balance de energía básico, derive una expresión para la eficacia de un cambiador de calor en el cual se usa vapor en condensación para calentar un fluido más frío. Suponga que el fluido caliente (vapor condensante) permanece a una temperatura constante a lo largo de todo el proceso.

10-9 En un cambiador de calor de flujo a contracorriente entra agua a 80 °C y sale a 35 °C. El agua se usa para calentar un aceite de 25 a 48 °C. ¿Cuál es la eficacia del cambiador de calor?

10-10 Derive la Ec. 10-12 suponiendo que el cambiador de calor es un arreglo de doble tubo con flujo a contracorriente.

10-11 Derive la Ec. 10-26.

10-12 Se usará vapor saturado a 100 lb/plg^2 abs para calentar bióxido de carbono en un cambiador de calor de flujo transversal que consiste en cuatrocientos tubos de latón de $\frac{1}{4}$ plg de diámetro externo en un arreglo de cuadrados alineados. La distancia entre centros de tubos es $\frac{3}{8}$ plg, tanto en la dirección normal como en la paralela al flujo. El bióxido de carbono fluye transversalmente al banco de tubos, mientras que el vapor se condensa en el interior de los tubos. Se debe calentar un flujo de 1 lb_m/s de CO_2 a 15 lb/plg^2 abs de 70 a 200 °F. Estime la longitud de los tubos para llevar a cabo este calentamiento. Suponga que el coeficiente de transferencia de calor por el lado del vapor es 1000 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$ y desprecie la resistencia térmica de la pared del tubo.

10-13 Repita el Prob. 10-12 con el CO_2 fluyendo en el interior de los tubos y el vapor condensándose en su exterior. Compare estos dos diseños en base a la caída de presión de CO, a través del cambiador.

10-14 Un pequeño cambiador de calor de chaqueta y tubo con un paso de tubo [A = 4.64 m^2 y U = 280 $W/m^2 \cdot °C$] se usara para calentar agua a alta presión empezando a 20 °C con aire caliente inicialmente a 260 °C. Si la temperatura de salida del agua no debe exceder 93 °C y el flujo de aire es 0.45 kg/s, calcule el flujo de agua.

10-15 Dibuje de nuevo las Figs. 10-12 y 10-13 como ϵ versus log $NUT_{máx}$ sobre el intervalo $0.1 < NUT_{máx} < 100$.

10-16 Un cambiador de calor de doble tubo y flujo a contracorriente se usa actualmente para calentar 2.5 kg/s de agua de 25 a 65 °C enfriando un aceite [c_p = 2.1 $kJ/kg \cdot °C$] de 138 a 93 °C. Se desean "purgar" 0.62 kg/s de agua a 50 °C de modo que se reemplazará el cambiador único por un arreglo de dos cambiadores que permiten esto. El coeficiente de transferencia de calor total es 450 $W/m^2 \cdot °C$ para el cambiador único y puede tomarse el mismo valor para cada uno de los cambiadores más pequeños. El mismo flujo total de aceite se usa en el arreglo de los dos cambiadores, con la excepción de que el flujo se divide entre los dos cambiadores. Determine las áreas de cada uno de los cambiadores pequeños y el flujo de aceite a través de cada uno. Suponga que el agua fluye en serie a través de los dos cambiadores, con la purga de agua entre ellos. Suponga que los cambiadores pequeños tienen la misma área.

10-17 Repita el Prob. 10-16 suponiendo que se usa vapor de condensación a 138 °C en lugar del aceite caliente y que los cambiadores son del tipo de chaqueta y tubo, con dos pasos de agua por el lado de los tubos. El coeficiente de transferencia de calor total puede considerarse como 1700 $W/m^2 \cdot °C$ para esta aplicación.

10-18 El condensador en un aire acondicionado de un automóvil se diseña para extraer 60 000 Btu/h de Freón 12 cuando el automóvil se mueve a 40 mi/h y la temperatura ambiente es 95 °F. La temperatura del Freón 12 es 150 °F bajo estas condiciones y puede suponerse que el aumento de temperatura del aire a través del cambiador es 10 °F. El coeficiente de transferencia de calor total para el cambiador de calor de tubo con aletas bajo estas condiciones es 35 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$. Si el coeficiente de transferencia de calor total varía como la velocidad elevada a la 0.7 y el flujo en masa de aire varía directamente como la velocidad, dibuje el porcentaje de reducción en rendimiento del condensador en función de la velocidad entre 10 y 40 mi/h. Suponga que la temperatura del Freón permanece constante e igual a 150 °F.

10-19 Un cambiador de calor de chaqueta y tubo con cuatro pasos en los tubos se usa para calentar 2.5 kg/s de agua de 25 a 70 °C. Se dispone de agua caliente a 93 °C para el proceso de calentamiento y puede usarse un flujo de 5 kg/s. El fluido frío se usa por el lado de los tubos del

cambiador. El coeficiente de transferencia de calor total es 800 $W/m^2 \cdot °C$. Suponiendo que el flujo de fluido caliente y el coeficiente de transferencia de calor total permanecen constantes, dibuje el porcentaje de reducción en transferencia de calor en función del flujo en masa del fluido MO.

10-20 Se construyen dos cambiadores de calor de doble tubo idénticos con tubería estándar de 2 plg, Céd. 40, colocados dentro de un tubo estándar de 3 plg. La longitud de los cambiadores es de 10 pies; se calentarán 40 gal/min de agua inicialmente a 80 °F pasándola a través de los tubos interiores de los cambiadores en un arreglo en serie y se dispone de 30 gal/min de agua a 120 °F y 30 gal/min de agua a 200 °F, para realizar este calentamiento. Las dos corrientes de calentamiento pueden mezclarse de cualquier modo que se desee y después introducirse a los cambiadores de calor. Determine el arreglo del flujo para un rendiiiento õptimo (máxima transferencia de calor)- y la transferencia de calor total bajo estas condiciones.

10-21 Un tubo largo de acero con 5 cm de diámetro interno y 3.2 mm de espesor de pared pasa a través de una habitación grande que se mantiene a 30 °C y presión atmosférica; por uno de sus extremos entran 0.6 kg/s de agua caliente a 82 °C. Si el tubo tiene 15 m de longitud, calcule la temperatura de salida del agua, considerando pérdida de calor tanto por convección libre como por radiación hacia el exterior del tubo.

10-22 Una parte de la salmuera de un sistema de refrigeración grande se usará para proporcionar agua helada para aire acondicionado de un edificio de oficinas. La salmuera está disponible a 15 °C y se requieren 105 kW de enfriamiento. El agua helada de los enfriadores del aire acondicionado entra a un cambiador de calor de chaqueta y tubo a 10 °C y el cambiador se diseñará de tal modo que la temperatura de salida del agua helada no sea inferior a 5 °C. El coeficiente de transferencia de calor total para el cambiador de calor es 850 $W/m^2 \cdot °C$. Si el agua helada se usa por el lado de los tubos y se emplean dos pasos de tubo, dibuje el área de cambiador de calor que se requiere, en función de la temperatura de salida de la salmuera.

10-23 Un regenerador de gases de turbina es un cambiador de calor que usa los gases calientes de escape de la turbina para precalentar el aire cedido a la cámara de combustión. En un análisis de aire estándar de los ciclos de gas de la turbina, se supone que la masa de combustible es pequeña comparada con la masa de aire y en consecuencia, el flujo de gas caliente a través de la turbina es en esencia el mismo que el flujo de aire al interior de la cámara de combustión. Usando esta suposición y suponiendo también que el calor específico de los gases calientes de escape es el mismo que el del aire de entrada, derive una expresión para la eficacia de un regenerador tanto bajo condiciones de flujo a contracorriente como de flujo paralelo.

10-24 En un cambiador de calor de doble tubo entra agua a 90 °C y sale a 55 °C. Se usa para calentar un aceite de 25 a 50 °C. Calcule la eficacia del cambiador de calor.

10-25 Un cambiador de calor de doble tubo y flujo a contracorriente se usará para calentar 0.6 kg/s de agua de 35 a 90 °C con un flujo de aceite de 0.9 kg/s. El aceite tiene un calor específico de 2.1 $kJ/kg \cdot °C$ y entra al cambiador de calor a una temperatura de 175 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 425 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el área del cambiador de calor y la eficacia.

10-26 Un cambiador de calor de chaqueta y tubo se diseña para calentar 7.5 kg/s de agua de 85 a 99 °C. El proceso de calentamiento se lleva a cabo por vapor en condensación a 345 kN/m^2. Se usa un paso por la chaqueta junto con dos pasos de tubos, consistiendo cada uno de ellos de treinta tubos de 2.5 cm de diámetro externo. Suponiendo un valor de U de 2800 W/m^2, calcule la longitud de tubos que se requiere en el cambiador de calor.

10-27 Suponga que el cambiador de calor del Prob. 10-26 ha estado en operación por largo tiempo, de modo que se aplican los factores de incrustación de la Tabla 10-2. Calcule la temperatura de salida del agua para condiciones de incrustación, suponiendo el mismo flujo total.

10-28 Se emplean gases de caldera calientes a 425 °C [c_p = 1.2 kJ/kg·°C] en un cambiador de calor de flujo transversal para calentar un aceite de motor de 35 a 80 °C. Usando la información que se proporciona en este capítulo, obtenga un diseño aproximado para el cambiador de calor, para un flujo de aceite de 0.6 kg/s.

10-29 Un cambiador de calor de flujo transversal y tubos con aletas usa agua caliente para calentar una cantidad apropiada de aire de 15 a 25 °C. El agua entra al cambiador de calor a 70 °C y lo deja a 40 °C, y la rapidez de transferencia de calor total debe ser de 29 kW. El coeficiente de transferencia de calor total es 45 W/m²·°C. Calcule el área del cambiador de calor.

10-30 Calcule la rapidez de transferencia de calor para el cambiador en el Prob. 10-29, cuando el flujo de agua se reduce a la mitad del valor de dio.

10-31 Un pequeño condensador de vapor se diseña para condensar 0.76 kg/min de vapor a 83 kN/m² con agua de enfriamiento a 10 °C. La temperatura de salida del agua no debe ser superior a 57 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 3400 W/m²·°C. Calcule el área que se reqmere para un cambiador de calor de doble tubo.

10-32 Suponga que la temperatura de entrada del agua en el Prob. 10-31 se eleva a 30 °C. ¿Qué porcentaje de incremento en flujo sería necesario para mantener la misma rapidez de condensación?

10-33 Un cambiador de calor de doble tubo y flujo a contracorriente se usa para calentar agua de 25 a 50 °C enfriando aceite de 100 a 65 °C. El cambiador está diseñado para una transferencia de calor total de 29 kW con un coeficiente de transferencia de calor total de 340 W/m²·°C. Calcule el área de superficie del cambiador.

10-34 Suponga que el aceite del Prob. 10-33 está lo suficiente sucio para que sea necesario aplicar en el análisis un factor de incrustación de 0.004. ¿Cuál es el área de superficie bajo estas condiciones? ¿Cuánto se reducirá la transferencia de calor si el cambiador en el Prob. 10-33 se usará con este factor de incrustación y las mismas temperaturas de entrada de los fluidos?

10-35 Un cambiador de chaqueta y tubo con un paso de chaqueta y dos pasos de tubos se usa como un sistema de transferencia de calor de agua a agua con el fluido caliente en el lado de la chaqueta. El agua caliente se enfría de 80 a 60 °C y el fluido frío se calienta de 10 a 65 °C. Calcule el área de superficie para una transferencia de calor de 60 kW y un coeficiente de transferencia de calor de 1100 W/m²·°C.

10-36 ¿Cuál es la transferencia de calor para el cambiador del Prob. 10-35 si el flujo del fluido caliente se reduce a la mitad, mientras que las condiciones de entrada y el coeficiente de transferencia de calor se conservan constantes?

10-37 Haga de nuevo el Ej. 6-4 usando el concepto de DTML. Repítalo para una temperatura de entrada de aire de 37 °C.

10-38 En un tubo de 2.5 cm de diámetro interno entra aire a 207 KN/m² y 200 °C a 6 m/s. El tubo es de cobre, tiene un espesor de 0.8 mm y una longitud de 3 m. Aire atmosférico a 1 atm y 20 °C fluye normalmente por el exterior del tubo con una velocidad de corriente libre de 12 m/s. Calcule la temperatura del aire a la salida del tubo. ¿Qué efecto tendría de reducir el flujo de aire caliente a la mitad?

10-39 Repita el Prob. 10-38 para el agua que entra al tubo a 1 m/s y 95 °C ¿Qué efecto tendría reducir el flujo de agua a la mitad?

10-40 En un tubo de acero de 2.5 cm de diámetro interno, con un espesor de pared de 0.8 mm fluye agua caliente a 90 °C y una velocidad de 4 m/s. Se fuerza aceite de motor transversalmente

al tubo a una velocidad de 7 m/s. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total para este arreglo.

10-41 En un tubo de acero de 2.5 cm de diámetro interno, con un espesor de pared de 0.8 mm, fluye agua caliente de 90 °C y una velocidad de 4 m/s. Este tubo constituye el interior de un cambiador de calor de doble tubo. El tubo exterior tiene 3.75 cm de diámetro interno yen el espacio anular fluye aceite de motor a 20 °C y una velocidad de 7 m/s. Calcule el coeficiente de transferencia de calor total para este arreglo. La longitud del tubo es de 6.0 m.

10-42 Un cambiador de calor de chaqueta y tubo opera con dos pasos en la chaqueta y cuatro en los tubos. El fluido de la chaqueta es etilenglicol, que entra a 140 °C y sale a 80 °C con una velocidad del flujo de 4500 kg/h. Por los tubos fluye agua, entrando a 35 °C y saliendo a 85 °C. El coeficiente de transferencia de calor total para este arreglo es 850 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el flujo de agua que se requiere y el área del cambiador de calor.

10-43 La velocidad del flujo de glicol en el cambiador de calor del Prob. 10-42 se reduce a la mitad conservando las mismas temperaturas de entrada de ambos fluidos. ¿Cuál es la temperatura de salida del agua bajo estas nuevas condiciones y cuánto se redujo la rapidez de transferencia de calor?

10-44 Por razones de prioridades, la velocidad del flujo de fluido caliente en los Probs. 10-42 y 10-43 debe reducirse 40%. La misma velocidad del flujo de agua debe calentarse de 35 a 85 °C. Para llevar a cabo esto, se agrega un precalentador de vapor de chaqueta y tubo, con el vapor que se condensa a 150 °C y un coeficiente de transferencia de calor total de 2000 $W/m^2 \cdot °C$ ¿Qué área de superficie y flujo de vapor se requieren para el precalentador?

10-45 Un calentador de aceite de motor utiliza etilenglicol a 100 °C en la entrada de un banco de tubos que consiste en 50 tubos de cobre, de 5 líneas de alto con un diámetro externo de 2.5 cm y un espesor de pared de 0.8 mm. Los tubos tienen 70 cm de largo con $S_p = S_n = 3.75$ cm en un arreglo en línea. El aceite entre el banco de tubos a 20 °C y una velocidad de 1 m/s. El glicol entra a los tubos con una velocidad de 1.5 m/s. Calcule la transferencia de calor total y la temperatura de salida del aceite. Repítalo para una velocidad de entrada del glicol de 1 .O m/s.

10-46 Un precalentador de aire para una planta de energía consiste en un cambiador de calor de flujo transversal, en el que se usan los gases calientes de escape para calentar el aire de entrada a 1 atm y 20 °C. Los gases entran a 375 °C y un flujo de 5 kg/s. El flujo de aire es 4.6 kg/s y el cambiador de calor tiene $A = 110$ m^2 y $U = 50$ $W/m^2 \cdot °C$. Calcule la rapidez de transferencia de calor y la temperatura de salida para los dos casos, ambos fluidos sin mezclar y un fluido mezclado. Suponga que los gases calientes tienen las propiedades del aire.

10-47 Se usa vapor en condensación a 100 °C con $h = 5000$ $W/m^2 \cdot °C$ en el interior de los tubos del cambiador del Ej. 10-10. Si el cambiador de calor tiene un área frontal de 0.5 m^2 y una profundidad de 40 cm en la dirección del flujo de aire, calcule la rapidez de transferencia de calor y la temperatura de salida del aire. Enuncie las suposiciones.

10-48 Un calentador de agua de alimentación utiliza un cambiador de chaqueta y tubos con vapor en condensación en un paso de chaqueta a 150 °C. El agua entra a los tubos a 40 °C y hace cuatro pasos para producir valor de U total de 2500 $W/m^2 \cdot °C$. Calcule el área del cambiador para un flujo en masa de 2.5 kg/s de agua, con una temperatura de salida del agua de 120 °C.

10-49 Suponga que el cambiador del Prob. 10-48 ha estado en servicio largo tiempo, de modo que presenta un factor de incrustamiento de 0.0002 $m^2 \cdot °C/W$. ¿Cuál sería la temperatura de salida del agua bajo estas condiciones?

10-50 Una unidad de recuperación de aire a aire usa un cambiador de flujo transversal con ambos fluidos sin mezcla y una velocidad del flujo de aire de 0.5 kg/s en ambos lados. El aire calien-

te entra a 40 °C mientras que el aire frío entra a 20 °C. Calcule las temperaturas de salida para $V = 40$ W/m²·°C y un área total del cambiador de 20 m².

10-51 Suponga que las dos velocidades de los flujos en el Prob. 10-50 se reducen a la mitad. ¿Cuáles serían las temperaturas de salida en este caso, suponiendo que no hay cambio en U? ¿Y si las dos velocidades de los flujos se duplicaran?

10-52 Se usa agua caliente a 90 °C en los tubos de un cambiador de calor de tubos con aletas. El aire fluye transversalmente a las aletas y entra a 1 atm, 30 °C, con un flujo de 65 kg/min. El coeficiente de transferencia de calor total es 52 W/m²·°C, y la temperatura de salida del aire debe ser 45 °C. Calcule la temperatura de salida del agua si el área total es 8.0 m².

10-53 Un microprocesador debe programarse para controlar el cambiador del Prob. 10-52, vaciando el flujo de agua para mantener la misma temperatura de salida cuando haya cambios en la temperatura de entrada del agua. Calcule el porcentaje de cambios necesarios para el flujo de agua con temperaturas de entrada de agua de 60, 70, 80 y 100 °C. Suponga que V permanece constante.

10-54 Un cambiador de calor de doble tubo y flujo a contracorriente se emplea para calentar 30 kg/s de agua de 20 a 40 °C con un aceite caliente a 200 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 275 W/m²·°C. Determine la eficacia y el NUT para temperaturas de salida del aceite de 190, 180, 140 y 80 °C.

10-55 Un cambiador de calor de chaqueta y tubo se diseña para vapor en condensación a 200 °C en la chaqueta, con un paso: se calientan 50 kg/s de agua de 60 a 90 °C. El coeficiente de transferencia de calor total es 4500 W/m²·°C. Se instala un controlador en la entrada del vapor para variar la temperatura controlando la presión y se desea conocer el efecto sobre la temperatura de salida del agua. Calcule la eficacia y la temperatura de salida del agua para temperaturas de entrada del vapor de 180, 160, 140 y 120 °C. Use expresiones analíticas para derivar una relación para la temperatura de salida del agua en función de la temperatura de entrada del vapor.

Referencias

1 Siegal, R., and J. R. Howell: "Thermal Radiation Heat Transfer," 2d ed., Hemisphere Publishing Corp., New York, 1980.

2 "Standards of Tubular Exchanger Manufacturers Asaociation," 4th ed., 1959.

3 Kays, W. M., and A. L. London: "Compact Heat Exchangers," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

4 Bowman, R. A., A. E. Mueller, and W. M. Nagle: Mean Temperature Difference in Design, *Trans. ASME,* vol. 62, p. 283, 1940.

5 Perry, J. H. (ed.): "Chemical Engineers' Handbook," 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

6 American Soeiety of Heating and Air Conditioning Engineers Guide, annually.

7 Sparrow, E. M., and R. D. Cess: "Radiation Heat Transfer," Wadsworth Publishing Co., Inc.. New York, 1966.

11
Transferencia de Masa

II-I Introducción

La transferencia de masa puede ocurrir debido a diferentes fenómenos. Hay transferencia de masa asociada con la convección, en que la masa se transporta de un lugar a otro en el sistema de flujo. Este tipo de transferencia de masa ocurre a nivel macroscópico y casi siempre se le estudia dentro del tema de mecánica de fluidos. Cuando se tiene una mezcla de gases o líquidos contenidos de manera que existe un gradiente de concentración de uno o más de los componentes a través del sistema, habrá transferencia de masa a nivel macroscópico como resultado de la difusión desde regiones de alta concentración hacia regiones de baja concentración. En este capítulo nos interesa ver principalmente algunas de las relaciones sencillas que se pueden utilizar para calcular difusión de masa y su relación ron la transferencia de calor. No obstante, no debemos olvidar que el tema de la transferencia de calor en general incluye tanto la difusión de masa a escala molecular como el transporte global de masa, que puede resultar de un proceso de convección.

La difusión de masa no sólo podrá ocurrir a nivel molecular sino que también en sistemas de flujo turbulento habrán rapideces de difusión elevadas como resultado de los procesos de mezclado con remolinos rápidos, justo en los lugares en los que la existencia de estos procesos de mezclado aumentan la transferencia de calor y la acción viscosa en el flujo turbulento.

Aunque esté fuera del alcance de nuestro estudio, es conveniente mencionar que la difusión de masa también puede ser el resultado de un gradiente de temperatura en un sistema; a esto se le denomina difusión térmica. De manera similar, cierto gradiente de concentración puede dar lugar a un gradiente de temperatura y a la consiguiente transferencia de calor. A estos dos efectos se les llama *fenómenos acoplados* y se les puede estudiar por medio de métodos de termodinámica irreversible. Para información sobre la termodinámica irreversible y fenómenos acoplados, y sus aplicaciones en los procesos de difusión, referimos al lector a los monogramas de Prigogine [1] y de Groot [2].

11-2 Ley de difusión de Fick

Considérese el sistema que se muestra en la Fig. 11 -1. Una división delgada separa los gases *A* y B. Cuando se elimina la división, los gases difunden entre ellos hasta que se establece el equilibrio y la concentración de los gases dentro de la caja es uniforme. La rapidez de difusión se expresa por la ley de difusión de Fick, la cual establece que el flujo de masa por unidad de área de un componente es proporcional al gradiente de concentración. Así

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = -D \frac{\partial C_A}{\partial x} \tag{11-1}$$

donde D = coeficiente de proporcionalidad constante de difusión, m^2/s
m_A = flujo de masa por unidad de tiempo kg/s
C_A = concentración en masa del componente A por unidad de volumen, kg/m^3

También se podría escribir una expresión similar a la Ec. 1 l-1 para la difusión del componente *A* en cualquiera de las dos direcciones y o *z*.

Obsérvese la semejanza que existe entre la Ec. ll-l y la ley de Fourier de conducción de calor.

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

y la ecuación para esfuerzo cortante entre capas de fluido,

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

La ecuación de conducción de calor describe el transporte de energía, la ecuación de viscosidad describe el transporte de momento a través de las capas fluidas y la ley de difusión describe el transporte de masa.

Para comprender el mecanismo físico de la difusión, considérese el plano imaginario que se señala por medio de las líneas discontinuas enla Fig. ll -2. La concentración de componente *A* es mayor en el lado izquierdo de este plano que en el derecho. Una concentración mayor significa que hay más moléculas por unidad de volumen. Si el sistema es un gas o un líquido, las moléculas se mueven en forma aleatoria y a mayor concentración, mayor será el número de moléculas que atraviesan un plano dado por

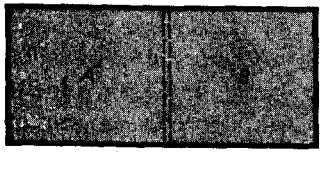


Fig. 11-1 Difusión del componente *A* en el componente *B*.

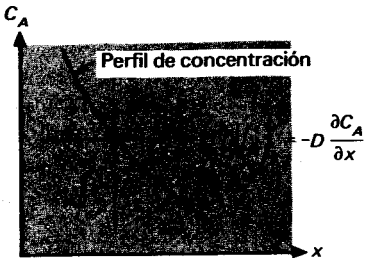


Fig. 11-2 Esquema que muestra la dependencia de la difusión con el perfil de concentración.

unidad de tiempo. Por tanto, sobre el promedio, hay más moléculas cruzando el plano de izquierda a derecha que en la dirección opuesta. Esto da por resultado una transferencia de masa neta de la región de alta concentración hacia la región de baja concentración. El hecho de que las moléculas chocan entre sí influye fuertemente en el proceso de difusión. En una mezcla de gases existe una gran diferencia entre los choques entre moléculas similares y moléculas diferentes. La colisión entre moléculas similares no altera en forma apreciable al movimiento básico de las moléculas, porque las dos moléculas son idénticas y no tiene importancia cuál de las dos moléculas son idénticas y no tiene importancia cuál de las dos moléculas cruce un cierto plano. La colisión de dos moléculas diferentes, digamos *A* y *B*, puede dar como resultado el que la molécula *B* cruce un plano particular en lugar de la molécula *A*. En general, las moléculas tienen masas diferentes; por tanto la transferencia de masa dependerá de la colisión. Utilizando la teoría cinética de los gases es posible predecir analíticamente las rapideces de difusión para algunos sistemas, tomando en cuenta el mecanismo de colisión y el peso molecular de los gases constituyentes. Para obtener una idea general de los problemas que involucra, referimos al lector al estudio hecho por Present [3].

En los gases las rapideces de difusión dependen sin lugar a dudas de la velocidad molecular y en consecuencia, debemos esperar una dependencia del coefkiente de difusión con la temperatura, ya que ésta indica la velocidad molecular promedio.

11-3 Difusión en gases

Gilliland [4] ha propuesto una ecuación semiempírica para el coeficiente de difusión en gases:

$$D = 435.7 \frac{T^{3/2}}{p\,(V_A^{1/3} + V_B^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_b}} \qquad (11\text{-}2)$$

en donde D está en centímetros cuadrados por segundo, T está en grados Kelvin, p es la presión total del sistema en newtons por metro cuadrado, y V_A y V_B son los volúmenes moleculares de los componentes *A* y *B* tal como se calcularon a partir de los volúmenes atómicos de la Tabla 11 · 1; M_A y M_B son los pesos moleculares de los componentes *A* y *B*. El Ej. 1 l-l muestra el uso de la Ec. 11 -2 para el calculo de los coeficientes de difusión.

Tabla 11-1 Volúmenes atómicos*

Aire	29.9	En aminas secundarias	1.20
Bromo	27.0	Oxígeno, molécula (O_2)	7.4
Carbono	14.8	Unida a otros dos elementos	
Bióxido de carbono	34.0	En aldehídos y cetonas	7.4
Cloro:		En ésteres metílicos	9.1
Terminal como en R — Cl	21.6	En ésteres etílicos	9.9
Medio como en R — CHCl — R	24.6	En ésteres y éteres	11.0
Flúor	8.7	En ácidos	12.0
Hidrógeno, molécula (H_2)	14.3	En unión con S, P, N	8.3
En compuestos	3.7	Fósforo	27.0
Yodo	37.0	Azúfre	25.6
Nitrógeno molécula (N_2)	15.6	Agua	18.8
En aminas primarias	10.5		

* Para un anillo de tres miembros, reste 6.0. Para un anillo de cuatro miembros, reste 6.5. Para un anillo de cinco miembros, reste 11.5. Para un anillo de seis miembros, reste 15.0. Para un anillo de naftaleno reste 30.0

La Ec. 11-2 ofrece una expresión conveniente para el cálculo del coeficiente de difusión para diversos compuestos y mezclas, pero no deberá usarse como sustituto de valores experimentales del coeficiente de difusión cuando se tienen éstos para un sistema específico. Las Refs. 3 y de la 5 a la 9 proporcionan mayor información sobre los coeficientes de difusión. En el Apéndice A se da una tabla abreviada de los coeficientes de difusión.

Ejemplo 11-1

Calcule el coeficiente de difusión para CO, en aire a presión atmosférica y a 25 °C utilizando la Ec. 11-2 y compare este valor con el de la Tabla A-8.

Solución

De la Tabla 11-1 tenemos

$$V_{CO_2} = 34.0 \qquad M_{CO_2} = 44$$

$$V_{aire} = 29.9 \qquad M_{aire} = 28.9$$

$$D = \frac{(435.7)(298)^{3/2}}{(1.0132 \times 10^5)[(34.0)^{1/3} + (29.9)^{1/3}]^2}\sqrt{\frac{1}{44} + \frac{1}{28.9}}$$

$$= 0.132 \text{ cm}^2/\text{s}$$

De la Tabla A-8

$$D = 0.164 \text{ cm}^2/\text{s} = 0.62 \text{ pie}^2/\text{h}$$

de manera que los dos valores concuerdan.

De la exposición concerniente a la Fig. ll-l nos percatarnos que el proceso de difusión ocurre en dos direcciones al mismo tiempo; es decir, el gas A se difunde en el B al mismo tiempo que el gas B se difunde en el A. Por tanto, podemos consultar el coeficiente de difusión para cualquiera de los dos procesos.

Al trabajar con la ley de Fick, podemos usar flujo de masa por unidad de área y concentración en masa tal como en la Ec. ll - 1, o podremos expresar la ecuación en términos de concentraciones molales y flujos. No hay una regla general para decir qué tipo de expresión será más conveniente, así que el problema específico bajo consideración determinará la que debe usarse. Para los gases, la ley de Fick puede expresarse de manera conveniente en términos de las presiones parciales utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos. (Esta transformación sólo sirve para gases a bajas presiones o en un estado en el que se aplique la ecuación de estado de los gases perfectos.)

$$p = \rho RT \tag{11-3}$$

La densidad ρ representa la concentración en masa que se usa en la ley de Fick. La constante de los gases R para un gas específico podrá expresarse en términos de la constante universal de los gases R_0 y el peso molecular del gas:

$$R_A = \frac{R_0}{M_A} \tag{11-4}$$

donde $R_0 = 8315 \text{ J/kg} \cdot \text{mol} \cdot \text{K}$

Entonces $C_A = \rho_A = \dfrac{p_A M_A}{R_0 T}$

En consecuencia, la ley de difusión de Fick para el componente A en el componente B puede escribirse

$$\frac{m_A}{A} = -D_{AB} \frac{M_A}{R_0 T} \frac{dp_A}{dx} \tag{11-5}$$

si se considera la difusión isotérmica. Para el sistema en la Fig. ll - 1 también podemos escribir para el componente de difusión B en el componente A

$$\frac{\dot{m}_B}{A} = -D_{BA} \frac{M_B}{R_0 T} \frac{dp_B}{dx} \tag{11-6}$$

considerando también condiciones isotérmicas. Obsérvense los diferentes subíndices en el coeficiente de difusión. Ahora considérese una situación física llamada contradifusión equimolal, tal como lo indica la Fig. 1 1-3; N_A y N_B representan las rapideces de difusión en estado estacionario de los componentes A y B, respectivamente. En esta situación de estado estacionario cada molécula de A es reemplazada por una molécula B y viceversa. Las rapideces de difusión mola1 se expresan por

$$N_A = \frac{\dot{m}_A}{M_A} = -D_{AB} \frac{A}{R_0 T} \frac{dp_A}{dx}$$

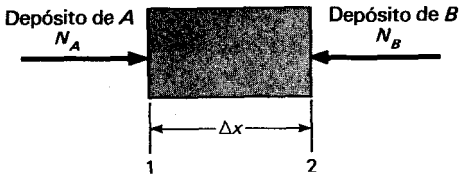


Fig. II-3 Esquema que ilustra difusión equimolal.

$$N_H = \frac{m_B}{M_B} = -D_{BA} \frac{A}{R_0 T} \frac{dp_B}{dx}$$

En estado estacionario la presión total del sistema permanece constante de manera que

$$p = p_A + p_B$$

Y

$$\frac{dp_A}{dx} + \frac{dp_B}{dx} = 0$$

0

Debido a que cada molécula de A está reemplazando una molécula de B, podemos considerar iguales las rapideces de difusión mola1

$$-N_A = N_B$$

0

$$-D_{AB} \frac{A}{R_0 T} \frac{dp_A}{dx} = -D_{BA} \frac{A}{R_0 T} \frac{dp_A}{dx}$$

en donde la Ec. 1 l-7 se ha usado para expresar el gradiente de presión del componente B. Así encontramos

$$D_{AB} = D_{BA} = D \tag{11-8}$$

El cálculo de D se puede realizar con la Ec. 11-2.

Podríamos integrar la Ec. ll -5 para obtener el flujo de masa del componente A como

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = \frac{-DM_A}{R_0 T} \frac{p_{A_2} - p_{A_1}}{\Delta x} \tag{11-9}$$

de acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 11-S.

Considérese ahora la evaporación isoténnica de agua de una superficie y su difusión subsecuente a través de una capa de aire estático, tal como se muestra en la Fig. 11-4. La superficie libre del agua está expuesta al aire del tanque, tal como se muestra. Suponemos que el sistema es isotérmico y que la presión total permanece constante. Suponemos además que el sistema se encuentra en estado estacionario. Esto

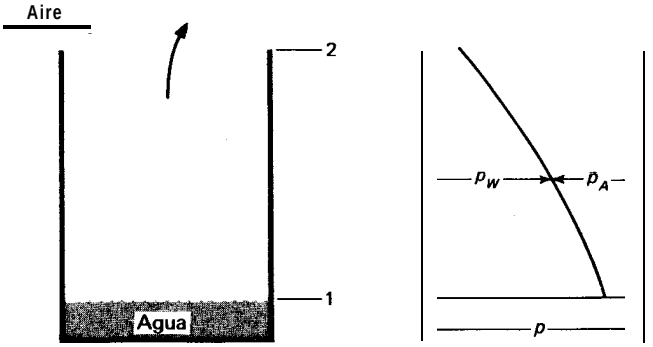


Fig. 114 Difusión de vapor de agua en aire.

requiere que existe un ligero movimiento de aire sobre la parte superior del tanque para extraer el vapor que se difunde en ese punto. Sea cual fuere el movimiento de aire necesario para lograr esto, se supone que no crea turbulencias ni altera los perfiles de concentración en el aire en el tanque. Además suponemos que tanto el aire como el vapor se comportan como gases ideales.

A medida que se evapora el agua, se difundirá hacia arriba en el aire y en un estado estacionario este movimiento hacia arriba deberá equilibrarse por un movimiento de difusión del aire hacia **abajo,** de manera que la concentración en cualquier posición x permanecerá constante. Pero en la superficie del agua no podrá existir movimiento neto de masa de aire hacia abajo. En consecuencia debe haber un movimiento de masa global hacia arriba con una velocidad justo lo suficiente para equilibrar la difusión de aire hacia **abajo.** Este movimientó de masa global hacia abajo produce entonces un flujo de masa ***adicional*** de vapor hacia arriba.

La difusión de aire hacia abajo se expresa por

$$\dot{m}_A = \frac{-DAM_A\, dp_A}{R_0 T \quad dx} \tag{11-10}$$

en donde A indica la sección transversal de área del tanque. Esto debe balancearse por la transferencia de masa global hacia arriba de manera que

$$-\rho_A A v = -\frac{p_A M_A}{R_0 T} A v \tag{11-11}$$

en donde v es la velocidad de masa global, hacia arriba.

Combinando las Ecs. **11** -10 y ll-ll, encontramos

$$v = \frac{D}{p_A}\frac{dp_A}{dx} \tag{11-12}$$

La difusión en masa de vapor hacia arriba es

$$m_w = -DA \frac{M_w}{R_0 T} \frac{dp_w}{dx} \tag{11-13}$$

y el transporte global de vapor es

$$\rho_w A v = \frac{p_w M_w}{R_0 T} A v \tag{11-14}$$

El transporte total de masa es la suma que se expresa en las Ecs. **11-13 y 11-14.** Sumando estas cantidades y haciendo uso de la Eq. 11-12 nos da

$$\dot{m}_{w_{\text{total}}} = -\frac{DAM_w}{R_0 T} \frac{dp_w}{dx} + \frac{p_w M_w}{R_0 T} A \frac{D}{p_A} \frac{dp_A}{dx}$$

La presión parcial del vapor acuoso puede relacionarse con la presión parcial del aire utilizando la ley de Dalton,

$$p_A + p_w = p$$

0

$$\frac{dp_A}{dx} = -\frac{dp_w}{dx}$$

ya que la presión total es constante. La masa de flujo total del vapor acuoso se convierte entonces en

$$\dot{m}_{\text{total}} = -\frac{DM_w A}{R_0 T} \frac{p}{p - p_w} \frac{dp_w}{dx} \tag{11-15}$$

A esta relación se le llama la ley de Stefan. Se puede integrar para que dé

$$\dot{m}_{w_{\text{total}}} = \frac{DpM_w A}{R_0 T (x_2 - x_1)} \ln \frac{p - p_{w_2}}{p - p_{w_1}} = \frac{DpM_w A}{R_0 T (x_2 - x_1)} \ln \frac{p_{A_2}}{p_{A_1}} \tag{11-16}$$

Ejemplo 11-2

Estime la rapidez de difusión de agua desde el fondo de un tubo de ensaye de 10 mm de diámetro y 15 cm de largo en aire atmosférico seco a 25 °C.

Solución

Utilizarnos la Ec. 11-16 para calcular el flujo de masa. La presión parcial en el fondo del tubo de ensaye es la presión de saturación que corresponde a 25 °C (77 °F), y la presión del vapor se puede tomar como cero en la parte superior del tubo, ya que se está dispersando en el aire seco. De acuerdo con esto.

$$p_{A_1} = p - p_{w_1} = 14.696 \quad 0.4593 = 14.237 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs} = 9.8155 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$
$$p_{A_2} = p - p_{w_2} = 14.696 \quad 0 = 14.696 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs} = 1.0132 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

De la Tabla A-8

$$D = 0.256 \text{ cm}^2/\text{s} \qquad \dot{m}_w = \frac{DpM_wA}{R_0T(x_2 - x_1)} \ln \frac{p_{A_1}}{p_{A_1}}$$

$$m_w = \frac{(0.256 \times 10^{-4})(1.0132 \times 10^5)(18)(\pi)(5 \times 10^{-3})^2}{(8315)(298)(0.15)} \ln \frac{1.0132}{0.98155}$$
$$= 3.131 \times 10^{-10} \text{ kg/s } [0.00113 \text{ g/h}]$$

11-4 Difusión en líquidos y sólidos

La ley de difusión de Fick también se utiliza en problemas que involucran difusión en líquidos y sólidos, y la mayor dificultad se encuentra en la determinación del valor del coeficiente de difusión para el líquido o sólido específico. Por desgracia, sólo se dispone de teorías aproximadas para la predicción de coeficientes de difusión en estos sistemas. Es más, hay escasez de datos experimentales y se necesita realizar mucho más trabajo tanto en el campo teórico como en el experimental. Bird, Stewart y Lightfoot [9] estudian el cálculo de la difusión en líquidos y Jost [6] proporciona un estudio detallado de las diversas teorías que se han empleado para predecir valores del coeficiente de difusión. Para mayor información sobre difusión en líquidos y sólidos remitimos al lector a estos libros.

La difusión en sólidos es compleja debido a la gran influencia de los campos de fuerza molecular sobre el proceso. Con frecuencia, para estos sistemas se utiliza la ley de Fick (Ec. ll-l), junto con un coeficiente de difusión determinado experimentalmente, a pesar de que existen indicios de que esta relación puede no ser adecuada para describir los procesos físicos. El valor numérico del coeficiente de difusión para líquidos y sólidos es mucho menor que para los gases, lo que se debe básicamente a campos de fuerza molecular mucho más grandes, el mayor número de colisiones y la consecuente reducción de la libertad de movimiento de las moléculas.

11-5 El coeficiente de transferencia de masa

Podríamos definir el coeficiente de transferencia de masa de manera semejante a la que Se usó para definir el coeficiente de transferencia de calor. Así

$$\dot{m}_A = h_{D_A} A (C_{A_1} - C_{A_2}) \tag{11-17}$$

donde m_A = flujo difusivo de masa del componente A
h_{D_A} = coeficiente de transferencia de masa
C_{A_1}, C_{A_2} = concentraciones en las que ocurre la difusión

Si consideramos una difusión en estado estacionario a través de una capa de espesor Δx,

$$m_A = \frac{DA(C_{A_2} - C_{A_1})}{\Delta x} = h_{D_A} A(C_{A_2} - C_{A_1})$$

$$h_{D_A} = \frac{D}{\Delta x} \tag{11-18}$$

Para el ejemplo de evaporación de agua que se estudió antes,

$$C_{w_1} - C_{w_2} = \frac{M_w}{R_0 T}(p_{w_1} - p_{w_2})$$

de manera que el coeficiente de transferencia de masa para esta situación se puede escribir

$$h_{D_w} = \frac{Dp}{(x_2 - x_1)(p_{w_1} - p_{w_2})} \ln \frac{p - p_{w_2}}{p - p_{w_1}} \tag{11-19}$$

Obsérvese que las unidades de los coeficientes de transferencia de masa son metros por segundo en unidades del SI.

Ya hemos visto que las leyes de los fenómenos que gobiernan las transferencias de calor, masa y momento son similares. En el Cap. 5 se demostró que las ecuaciones de energía y momento de una capa límite laminar son semejantes, esto es

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{11-20}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{11-21}$$

Observamos también que la razón ν/α, el número de Prandtl, era el lazo de unión entre los campos de velocidad y temperatura, y era por consiguiente un parámetro importante en todos los problemas de transferencia de calor por convección. Si consideramos una capa límite laminar en una placa plana en la que está ocurriendo difusión como resultado de cierta condición de transferencia de masa en la superficie, podríamos derivar una ecuación para la concentración de un componente particular en la capa límite. Esta ecuación sería

$$u \frac{\partial C_A}{\partial x} + v \frac{\partial C_A}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C_A}{\partial^2 y} \tag{ll-221}$$

en donde C_A es la concentración del componente que está difundiendose a través de la capa límite. Obsérvese la semejanza entre la Ec. ll-22 y las Ecs. ll-20 y 11-21. Los perfiles de concentración y velocidad tendrán la misma forma cuando $v_* = D$ o $v/D = 1$. La proporción adimensional v/D se llama *número de Schmidt,*

$$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \tag{11-23}$$

y es importante en problemas en los que tanto la convección como la transferencia de masa son importantes. Así el número de Schmidt juega un papel similar al del número de Prandtl en los problemas de transferencia de calor por convección. Mientras que en los problemas de transferencia de calor por convección escribimos para la dependencia funcional del coeficiente de transferencia de calor

$$\frac{hx}{k} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

en los problemas de transferencia de masa por convección deberíamos escribir la relación funcional como

$$\frac{h_D x}{D} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Sc})$$

Los perfiles de concentración y temperatura serán similares cuando $\alpha = D$ o $\alpha/D = 1$, a la razón α/D se le denomina *número de Lewis*

$$\mathrm{Le} = \frac{\alpha}{D} \tag{11-24}$$

Las semejanzas entre las ecuaciones que gobiernan las transferencias de calor, masa y momento sugieren que la relación empírica para el coeficiente de transferencia de masa sería similar a las del coeficiente de transferencia de calor. Y éste es el caso y en seguida presentamos algunas de las relaciones empíricas para los coeficientes de transferencia de masa. Gilliland [4] presentó la ecuación

$$\frac{h_D d}{D} = 0.023 \left(\frac{\rho u_m d}{\mu}\right)^{0.83} \left(\frac{\nu}{D}\right)^{0.44} \tag{11-25}$$

para la evaporación de líquidos en el aire contenido en el interior de columnas circulares, en las que el líquido moja la superficie y el aire es forzado a través de la columna. El agrupamiento de términos $h_D x/D$ o $h_D d/D$ se denomina *número de Sherwood*

$$\mathrm{Sh} = \frac{h_D x}{D} \tag{11-26}$$

Obsérvese la semejanza entre la Ec. 11-25 y la de Dittus-Boelter, Ec. 6-4. La Ec. 11-25 es válida para

$$2000 < \mathrm{Re}_d < 35000 \qquad y \qquad 0.6 < Sc < 2.5$$

y se puede aplicar para flujos en tubos lisos.

La analogía de Reynolds para flujo en tuberías se puede extender a problemas de transferencia de masa, a fin de expresar su coeficiente en términos del factor de fricción. La analogía se escribe

$$\frac{h_D}{u_m} \mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{11-27}$$

la cual se puede comparar con la analogía para transferencia de calor (Ec. 6-10):

$$\frac{h}{u_m c_p \rho} \mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{11-28}$$

Para flujo sobre placas planas lisas, la analogía de Reynolds se transforma en

laminar:
$$\frac{h_D}{u_\infty} \mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{C_f}{2} = 0.332\ \mathrm{Re}_x^{-1/2} \tag{11-29}$$

turbulento:
$$\frac{h_D}{u_\infty} \mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{C_f}{2} = 0.0296\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} \tag{11-30}$$

Las Ecs. ll-29 y ll-30 son análogas a las Ecs. 5-55 y 5-81.

Cuando las transferencias de calor y masa ocurren simultáneamente, los coeficientes de transferencias de masa y calor se pueden relacionar dividiendo la Ec. ll-28 entre la Ec. 11-27:

$$\frac{h}{h_D} = \rho c_p \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3} = \rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} = \rho c_p \mathrm{Le}^{2/3} \tag{11-31}$$

Ejemplo 11-3

Sobre un termómetro encerrado dentro de una envoltura húmeda, sopla aire seco a presión atmosférica. Este es el termómetro clásico de bulbo húmedo. El termómetro marca 18.3 °C. ¿Cuál es la temperatura del aire seco?

Solución

Resolvemos este problema observando primero que el termómetro no intercambia calor neto en condiciones de estado estacionario, y que el calor necesario para evaporar el agua de la envoltura deberá venir del aire. Por tanto, realizamos el balance de energía

$$hA(T_\infty - T_w) = \dot{m}_w h_{fg}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor y $\dot{m}_w$ es la masa de aire evaporada. Ahora

$$\dot{m}_w = h_D A (C_w \quad C_\infty)$$

de modo que:
$$hA(T_\infty - T_w) = h_D A (C_w - C_\infty) h_{fg}$$

Usando la Ec. 11-31. tenemos

$$\rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} (T_\infty - T_w) = (C_w - C_\infty) h_{fg} \qquad (a)$$

La concentración en la superficie C_w es la que corresponde a condiciones de saturación a la temperatura marcada por el termómetro. De acuerdo con las tablas de vapor a 65 °F [18.3 °C].

$$p_g = 0.3056 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs} = 2107 \text{ N/m}^2$$

and

$$C_w = \frac{p_w}{R_w T_w} = \frac{(2107X18)}{(8315X291.3)} = 0.01566 \text{ kg/m}^3$$

Las otras propiedades son

$C_\infty = 0$ **(Dado que la corriente libre es aire seco)**

$$\rho = \frac{p}{R\ T} \frac{1.0132 \times 10^5}{(287)(291.3)} = 1.212 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 1.004 \text{ kJ/kg} \cdot °C \qquad \frac{\alpha}{D} = \frac{Sc}{Pr} = 0.845$$

$$h_{fg} = 1057 \text{ Btu/lb}_m = 2.456 \text{ MJ/kg}$$

Así, de (a)

$$T_\infty - T_w = \frac{(0.01566 - 0X2.456 \times 10^6)}{(1.212)(1004)(0.845)^{2/3}} = 35.36 \text{ °C}$$

$$T_\infty = 53.69 \text{ °C}$$

Se deberá corregir el cálculo volviendo a calcular la densidad a la temperatura del promedio aritmético entre la pared y las condiciones de corriente libre. Con estos ajustes el resultado es

$$\rho = 1.143 \text{ kg/m}^3 \qquad T_\infty = 55.8 \text{ °C}$$

No es necesario corregir la proporción Sc/Pr porque este parámetro no cambia de una manera apreciable sobre la escala de temperatura.

Ejemplo II-4

La corriente de aire del Ej. 1 1-3 se encuentra a 32.2 °C [90 °F] mientras que la temperatura del bulbo húmedo permanece a 18.3 °C; calcule la humedad relativa de la corriente de aire.

Solución

De la termodinámica, recordamos que la humedad relativa se define como la razón entre la concentración de vapor y la concentración en condiciones de saturación para la corriente de aire. Por tanto, calculamos la concentración real de vapor de agua en la corriente de aire a partir de

$$\rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} (T_\infty - T_w) = (C_w - C_\infty) h_{fg} \qquad (a)$$

yen seguida comparamos esto con la concentración de saturación para determinar la humedad relativa. Las propiedades se toman del Ej. 11 -3:

$$\rho = 1.212 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1.004 \text{ kJ/kg}\cdot\text{°C} \qquad \frac{\alpha}{D} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = 0.845$$

$$T_w = 18.3 \text{ °C} \quad [65 \text{ °F}] \qquad T_\infty = 32.2 \text{ °C} \quad [90\text{°F}]$$

$$C_w = 0.01566 \text{ kg/m}^3 \qquad h_{fg} = 2.456 \text{ MJ/kg}$$

Insertamos en la Ec. (a) los valores numéricos y obtenemos

$$(1.212)(1004)(0.845)^{2/3}\,(32.2 - 18.3) = (0.01566 - C_\infty)(2.456 \times 10^6)$$

de modo que

$$C_\infty = 0.0095 \text{ kg/m}^3$$

A 32.2 °C [90 °F] la concentración de saturación para la corriente libre se obtiene de las tablas de vapor:

$$C_g(90\ ^\circ\text{F}) = 2.136 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{pie}^3 = 0.0342 \text{ kg/m}^3$$

Por tanto. la humedad relativa es

$$\text{RH} = \frac{0.0095}{0.0342} = 27.8\%$$

II-6 Procesos de evaporación en la atmósfera

Ya hemos descrito algunos procesos de evaporación e indicado relaciones entre transferencias de calor y masa. En la atmósfera, las continuas evaporaciones y condensaciones de agua del suelo, océanos y lagos influyen en todas las formas de vida y producen muchas de las variaciones diarias de clima que gobiernan el medio ambiente en la Tierra. Estos procesos son muy complicados porque en la práctica son gobernados por importantes corrientes de convección atmosféricas de difícil descripción analítica.

Consideremos primero la difusión de vapor de agua desde una superficie horizontal hacia el aire en reposo tal como se indica en la Fig. 11-5. En la superficie, la presión parcial del vapor es p_s. La presión del vapor disminuye en forma continua con un incremento en la elevación z hacia el valor de la "atmósfera libre" de p_∞. La difusión molecular del vapor de agua se puede escribir en la forma de la Ec. ll-13 como

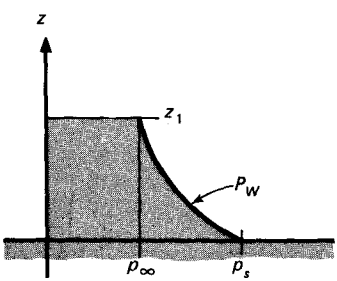


Fig. 11-5 Difusión de vapor de aire desde una superficie horizontal.

$$\frac{m_w}{A} = -D_w \frac{M_w}{R_o T} \frac{dp_w}{dz} \tag{11-32}$$

en donde A es el área de superficie bajo consideración. En aplicaciones hidrológicas es conveniente expresar esta relación en términos de la densidad y presión atmosférica locales. La presión total se puede expresar como

$$p = \rho \frac{R_o}{M} T \tag{11-33}$$

en donde ϱ y M son la densidad y peso molecular del aire húmedo, respectivamente. Como la concentración molar del vapor de agua es tan pequeña en las aplicaciones atmosféricas, el peso molecular del aire húmedo es esencialmente la del aire seco, y se pueden combinar las Ec. ll-32 y ll-33 para obtener

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -D_w \frac{M_w}{M_a} \frac{\rho}{p} \frac{dp_w}{dz}$$

Pero, M_w/M_a = 0.622, de manera que

$$\frac{m_w}{A} = -0\ 622 D_w \frac{\rho}{p} \frac{dp_w}{dz} \tag{11-34}$$

Utilizando las condiciones de frontera

$$p_w = p_s \qquad \text{en } z = 0$$

$$P r = p_\infty \qquad \text{en } z = z_1$$

La Ec. ll-34 se puede integrar para obtener

$$\frac{m_u}{A} = 0.622 D_w \frac{\rho}{p} \frac{p_s - p_\infty}{z_1} \tag{11-35}$$

Los procesos de evaporación en la atmósfera son mucho más complicados que lo que indica la sencilla forma de la Ec. ll-35 por dos razones:

1. El proceso de difusión comprende movimientos turbulentos en contraflujo considerables, de manera que el coeficiente de difusión D_w puede variar en forma significativa con la altura z.

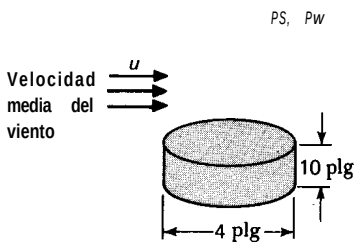


Fig. ll-6 Crisol estándar tipo A para medir la evaporación.

2. El aire muy rara vez se encuentra inmóvil y las corrientes de aire contribuyen en forma sustancial en la rapidez de evaporación.

Como en muchos de los problemas de convección ya vistos, la solución a un problema complicado de este tipo con frecuencia se obtiene recurriendo a medidas cuidadosamente controladas en la búsqueda de una relación empírica para predecir las rapideces de evaporación.

En este problema, como se muestra en la Fig. ll -6, se utiliza un "crisol estándar". El movimiento medio del viento se mide 6 plg arriba del borde del crisol y las rapideces de evaporación del agua se miden con el crisol colocado en el suelo (crisol terrestre) o flotando sobre agua (*crisol flotante*). Para el crisol terrestre y con una atmósfera con-***vectivamente estable,*** las rapideces de evaporación se han correlacionado por medio de la experiencia [13] como

$$E_{l_p} = (0.37 + 0.0041u)(p_s - p_w)^{0.88} \qquad (11\text{-}36)$$

donde E_{l_p} = evaporación en crisol terrestre, pulgada/día

u = movimiento diario del viento medido 6 plg por encima del borde del crisol, millas/día

p_s = presión de vapor a saturación a la temperatura del aire de bulbo seco a 5 pies del suelo, plg Hg

p_w = presión de vapor real del aire bajo condiciones de temperatura y humedad a 5 pies del suelo, plg Hg

La transferencia de calor hacia el crisol influye de manera diferente las rapideces de evaporación de los experimentos en el suelo o agua. Para convertir las medidas del crisol a las de una superficie natural se multiplica la Ec. ll -36 por un *coeficiente de crisol* que es de 0.7 para el crisol terrestre y 0.8 para el crisol flotante. Si la atmósfera no es convectivamente estable, los gradientes de densidad vertical pueden ocasionar desviaciones sustanciales de la Ec. 1 l-36. Estos problemas se estudian en las Refs. 10 a 13.

Ejemplo 11-5

Se utiliza un crisol terrestre estándar para medir la rapidez de evaporación en aire atmosférico a 100 °F y 30% de humedad relativa. La velocidad media del viento es 10 mi/h. ¿Cuál será la rapidez deevaporación en $lb_m/h \cdot pie^2$ en la Tierra bajo estas condiciones?

Solución

Para este cálculo podemos utilizar la Ec. 1 l-36. De acuerdo con las tablas de vapor de la termodinámica

$$PR = p_g \quad \text{en } 100°F = 0.9492 \text{ lb/plg}^2 \text{ abs} = 1.933 \text{ plg Hg} \quad [6.545 \text{ kN/m}^2]$$

$$\text{Humedad relativa} = \frac{p_w}{PS}$$

$$p_w = (0.30)(1.933) = 0.580 \text{ plg Hg} \quad [1.964 \text{ kN/m}^2]$$

También, $\bar{u} = 10$ mi/h = 240 mi/día [386.2 km/día].

La Ec. ll-36 nos da ahora, con la aplicación del factor 0.7,

$$E_{lp} = 0.7[0.37 + (0.0041)(240)](1.933 - 0.580)^{0.88}$$
$$= 1.237 \text{ plg/día } [31.41 \text{ mm/día}]$$

Observando que el crisol estándar tiene un diámetro de 4 pies, podemos utilizar el número para calcular la rapidez de evaporación de masa por unidad de área corno

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = \frac{E_{lp}}{12} \rho_w$$
$$= \frac{(1.237K62.4)}{12} = 6.432 \text{ lb}_m\text{/día·pie}^2 \quad [31.43 \text{ kg/m}^2 \text{ día}]$$
$$= 0.268 \text{ lb}_m\text{/h·pie}^2 \text{ [1.31 kg/h·m}^2\text{]}$$

Como aspecto interesante, podríamos calcular la rapidez de difusión molecular para el valor de agua a partir de la Ec. ll-35 tomando z_1 corno los 5 pies de altura sobre el crisol estándar. Debido a que

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

La Ec. 1 l·35 se puede escribir corno

$$\frac{m_w}{A} = 0.622 \frac{D_w}{RT} \frac{p_s - p_w}{z_1}$$

De la Tabla A-8,

$$D_w = 0.256 \text{ cm}^2\text{/s} = 0.99 \text{ pie}^2\text{/h}$$

de modo que:

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = \frac{(0.622)(0.99)(0.9492)(1 - 0.3)}{(53.35)(560)(5.0)}$$
$$= 2.74 \times 10^{-6} \text{ lb}_m\text{/h·pie}^2 \text{ [134 mg/h·m}^2\text{]}$$

Este número es sumamente pequeño en comparación con el cálculo anterior. Esto quiere decir que en el proceso de evaporación real, la difusión turbulenta y el transporte por convección juegan un papel dominante en comparación con la difusión molecular.

Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se define el coeficiente de difusión?
2. Defina el coeficiente de transferencia de masa.
3. Defina los números de Schmidt y Lewis. ¿Cuál es la importancia física de cada uno de ellos?
4. ¿Por qué las rapideces de evaporación no se pueden calcular por medio de las ecuaciones de difusión molecular ordinarias?

Problemas

11-1 Utilizando un razonamiento físico justifique la dependencia $T^{3/2}$ del coeficiente de difusión, tal como lo muestra la Ec. 11-2. Sugerencia: Recuerde que la velocidad molecular media es proporcional a $T^{1/2}$ y que la densidad de un gas perfecto es inversamente proporcional a la temperatura.

11-2 Utilizando la Ec. 11-2, calcule el coeficiente de difusión para benceno en aire atmosférico a 25 °C.

11-3 Aire seco a presión atmosférica y a 25 °C sopla a través una placa plana a una velocidad de 1.5 m/s. La placa mide 30 cm^2 y está cubierta por una película de agua que se puede evaporar. Trace el flujo de calor de la placa como una función de la temperatura de la placa entre $T_w \simeq$ 15 °C y T_w = 65 °C.

11-4 La envoltura de un termómetro de bulbo mojado está empapado en benceno, y el termómetro se expone a una corriente de aire seco. El termómetro marca 26 °C. Calcule la temperatura de corriente libre del aire. La presión de vapor del benceno es 13.3 kN/m^2 y la entalpía de la vaporización es 377 kJ/kg a 26 °C.

11-5 Dentro de una tubería, fluye aire seco a 25 °C y presión atmosférica a una velocidad de 3 m/s. La pared está cubierta por una delgada película de agua y la temperatura de la pared es de 25 "C. Calcule la concentración de vapor de agua en el aire de salida en la tubería de 3 m de longitud.

11-6 Un crisol abierto de 15 cm de diámetro y 7.5 cm de profundidad contiene agua a 25 °C y se encuentra expuesto a aire atmosférico a 25 °C y 50% de humedad relativa. Calcule la rapidez de evaporación del agua en gramos por hora.

11-7 Un tubo de ensayo de 1.25 cm de diámetro y 15 cm de profundidad contiene benceno a 26 °C y se encuentra expuesto a aire atmosférico a 26 °C. Utilizando las propiedades dadas en el Prob. 11-4, calcule la rapidez de evaporación del benceno en gramos por hora.

ll-8 Aire seco a 25 °C y presión atmosférica sopla sobre una superficie de hielo de 30 cm^2 a una velocidad de 1.5 m/s. Estime la cantidad de humedad evaporada por hora, suponiendo que el bloque de hielo se encuentra perfectamente aislado a excepción de la superficie expuesta a la corriente de aire.

11-9 Se necesita medir la temperatura de una corriente de aire, pero el termómetro disponible no tiene una escala lo suficientemente alta para hacerlo. En consecuencia se coloca una envoltura mojada alrededor del termómetro antes de colocarlo en medio de la corriente de aire. El termómetro marca 32 °C. Estime la temperatura real del aire, suponiendo que está seco a presión atmosférica.

11-10 Suponga que un antebrazo puede aproximarse por medio de un cilindro de 4 plg de diámetro y 1 pie de longitud. Se expone el brazo a una temperatura ambiente de aire seco a 115 °F en medio de la brisa que sopla en el desierto a 10 mi/h y recibe del Sol un flujo de calor radiante de 350 $Btu/h \cdot pie^2$ de área expuesta (área expuesta para el cilindro = Ld). Si el brazo transpira de manera que se encuentre cubierto con una delgada capa de agua, estime la temperatura de la superficie del brazo. Ignore la generación de calor interno del brazo. Suponga una emisividad unitaria por la capa de agua.

11-11 Una placa de 30 cm^2 se coloca en un túnel de aire de baja velocidad; la superficie se encuentra cubierta por una delgada capa de agua. El aire seco esta a temperatura atmosférica y 43

°C y sopla sobre la placa a una velocidad de 12 m/s. Las paredes que forman el túnel de viento se encuentran a 10 °C. Calcule la temperatura de equilibrio de la placa suponiendo una emisividad unitaria para la película de agua.

11-12 Calcule la rapidez de evaporación para el sistema del Prob. 11-11.

11-13 Refine el análisis del Prob. 11-10 suponiendo una generación de calor corporal de 1860 W/m^3.

11-14 Un tubo pequeño de 6.4 mm de diámetro y 13 cm de profundidad contiene agua y su extremo superior se encuentra abierto al aire atmosférico a 20 °C, 1 atm y 50% de humedad relativa. Al fondo del tubo se le añade calor. Trace la rapidez de difusión del agua como una función de la temperatura del agua sobre una escala de 20 a 82 °C.

11-15 Aire seco a 20 °C entra a un tubo a 1.25 cm de diámetro interno en el que la superficie interior se encuentra cubierta con agua en estado líquido. La velocidad media de flujo es 3 m/s, y la pared del tubo se mantiene a 20 °C. Calcule la rapidez de difusión del vapor de agua en las condiciones de entrada. ¿Cuánta humedad adquiere el aire en un tubo de 1 m de longitud?

11-16 Sobre una placa de 30 cm^2 sopla aire seco a 65 °C y una velocidad de 6 m/s. La placa está recubierta por un material de porosidad uniforme al cual se le envía agua a 25 °C. Suponiendo que la cara inferior de la placa se encuentra aislada, estime la cantidad de agua que se deberá enviar a fin de mantener la temperatura de la placa en 38 °C. Suponga que la temperatura de radiación de los alrededores es de 65 °C, y que la superficie porosa irradia como un cuerpo negro.

11-17 Aire seco a presión atmosférica sopla sobre una placa plana aislada y cubierta con un delgado material encerado, el cual ha sido embebido en alcohol etílico. La temperatura de la placa es de 25 °C. Calcule la temperatura de la corriente de aire suponiendo que la concentración de alcohol es despreciable en la corriente libre. Calcule también la rapidez de transferencia de masa del alcohol para una placa de 30 cm^2 cuando la velocidad de corriente libre es 7 m/s.

11-18 La ecuación de Carrier expresa la presión parcial real del vapor de agua en términos de las temperaturas de bulbo húmedo y seco como

$$p_v = p_{gw} - \frac{(p - p_{gw})(T_{DB} - T_{WB})}{2800 - T_{WB}}$$

donde p_v = presión parcial real, lb/plg^2 abs
p_{gw} = presión de saturación correspondiente a la temperatura del bulbo seco, lb/plg^2 abs
p = presión de mezcla total, lb/plg^2 abs
T_{DB} = temperatura de bulbo seco, °F
T_{WB} = temperatura de bulbo húmedo, °F

A través de un termómetro de bulbo húmedo sopla aire a 1 atm y 100 °F, produciendo una temperatura de 70 °F. Calcule la humedad relativa de la corriente de aire utilizando la ecuación de Carrier y compárela con los resultados obtenidos por medio de los métodos de este capítulo.

11-19 Suponga que el bulbo seco del Prob. 11-18 se expone a un medio ambiente de radiación negra a 100 °F. ¿Qué temperatura de equilibrio marcarla el bulbo suponiendo una emisividad unitaria para la cera?

ll-20 Una brisa ligera a 2.2 m/s sopla a través de un crisol de evaporación estándar. Las condiciones atmosféricas son 20 °C y 40% de humedad relativa. ¿Cuál será la rapidez de evaporación para el crisol terrestre en gramos por metro cuadrado? ¿Cuál será la rapidez de evaporación para una velocidad cero?

11-21 Una brisa que sopla a través de un crisol terrestre estándar a 4.5 m/s produce una rapidez de evaporación de 0.3 $g/s \cdot m^2$ ¿Cuál es la humedad relativa si la temperatura de bulbo seco (ambiente) del aire es 40 °C?

Referencias

1 Prigogine, 1.: "Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes," Charles C Thomas, Publisher, Springfield, Ill., 1955.

2 Groot, S. R. de: "Thermodynamics of Irreversible Processes," North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.

3 Present, R. D.: "Kinetic Theory of Gases," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

4 Gilliland, E. R.: Diffusion Coefficients in Gaseous Systems, *Ind. Eng. Chem.,* vol. 26, p. 681, 1934.

5 Perry, J. H. (ed.): "Chemical Engineers' Handbook," 4th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

6 Jost, W.: "Diffision in Solids, Liquids and Gases," Academic Press, Inc., New York, 1952.

7 Reid, R. C., and T. K. Sherwood: "The Properties of Gases and Liquids," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

8 "Handbook of Chemistry and Physics," Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1960.

9 Bird, R., W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot: "Transport Phenomena," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

10 Instructions for Climatological Observers, *U.S. Dept. Commerce Weather Bur. Circ.* B., 10th ed. rev., October 1955.

ll Water-Loss Investigations, vol. 1, *Lake Hefner Studies Tech. Rep., U.S. Geol. SUN. Circ.* 229, 1952.

12 Nordenson, T. J., and D. R. Baker: Comparative Evaluation of Evaporation Instruments, *J. Geophys. Rec.,* vol. 67, no. 2, p. 671, February 1962.

13 Kohler, M. A., T. J. Nordenson, and W. E. Fox: Evaporation from Pans and Lakes, U.S. *Dept. Commerce Weather Bur. Res. Pap. 38,* May 1955.

12
Tópicos Especiales en la Transferencia de Calor

12-1 Introducción

Algunos temas especializados de la transferencia de calor son importantes para la tecnología moderna. En este capitulo presentaremos una breve introducción a cinco de ellos. El estudio que se hará aquí no intenta ser completo, sino más bien, indicar el mecanismo físico básico de los procesos involucrados. Desde luego que sería posible incluir estos temas en otros capítulos del libro, sin embargo, hemos decidido agruparlos para enfocar la atención de una manera especial sobre los temas que se presentan. Debido a que la exposición a continuación representa tan sólo un estudio sumario de los tópicos para información adicional, el lector interesado deberá consultar las referencias adecuadas.

12-2 Transferencia de calor en sistemas de dinámica de magnetofluidos (DMF)

Se sabe que un conductor eléctrico en movimiento dentro de un campo magnético genera una fem proporcional a la rapidez de movimiento y fuerza del campo magnético. En forma correspondiente, este último ejerce sobre el conductor una fuerza coercitiva que tiende a impedir su movimiento. El flujo de corriente en el conductor genera un calor por el efecto joule de acuerdo con la conocida relación I^2R. Cuando un fluido conductor se mueve a través de un campo magnético se experimentan efectos parecidos. Un gas ionizado, ya sea como resultado de una elevación de la temperatura o de un proceso de excitación adecuado, es conductor eléctrico y puede experimentar la influencia de un campo magnético.

Nuestro principal-interés se encuentra en la transferencia de calor hacia un fluido conductor bajo la influencia de un campo magnético. Este tipo de problema es impor-

tante en sistemas que comprenden plasmas a temperaturas elevadas, aplicables a conversión de energía por fusión nuclear, sistemas de metales líquidos y de generación de energía por dinámica de magnetofluidos. Nuestro estudio se limitará a un caso sencillo que sirve para ilustrar la influencia que puede tener un campo magnético sobre el flujo y la transferencia de calor en un fluido conductor.

Examinemos primero algunos conceptos electromagnéticos básicos. Para un sistema con carga neutra la densidad de corriente J se expresa por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{12-1}$$

en donde σ es la conductividad eléctrica y E el vector de campo eléctrico. La fuerza del campo magnético B se expresa por

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{12-2}$$

en donde a μ_0 se le llama la permeabilidad magnética y H es la intensidad del campo magnético. La fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre un sistema de partículas cargadas está dada por

$$\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E} \tag{12-3}$$

en donde ρ_e es la densidad de carga (carga por unidad de volumen). La fuerza magnética ejercida en un conductor transportador de corriente es

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{12-4}$$

La fuerza electromagnética total esta dada por la suma de las Ecs. 12-3 y 12-4:

$$\mathbf{F}_{em} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{12-5}$$

El trabajo realizado en el sistema por unidad de tiempo por la fuerza electromagnética es

$$W_{em} = \mathbf{F}_{em} \cdot \mathbf{V} \tag{12-6}$$

en donde V es la velocidad del conductor. El campo megnético induce un voltaje en el conductor de magnitud V x **B** y en forma subsecuente una corriente de

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \tag{12-7}$$

Existe un transporte de carga más como resultado de la velocidad macroscópica V, dada por

$$\mathbf{J}_{\text{trans}} = \rho_e \mathbf{V} \tag{12-8}$$

La ***corriente de conducción*** se define ahora como

$$\mathbf{J}_c = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \tag{12-9}$$

y el flujo total de corriente es

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \rho_e \mathbf{V} \tag{12-10}$$

Un cuidadoso manejo de las ecuaciones precedentes nos proporciona la siguiente relación para el trabajo electromagnético:

$$W_{em} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \frac{\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}_c}{\sigma} \tag{12-11}$$

Al segundo término en la Ec. 12-11 se le denomina calentamiento óhmico y está dado como el producto de la resistividad y la corriente de conducción al cuadrado.

Ahora deseamos aplicar estas relaciones a un sistema de flujo de capa límite muy sencillo. Considérese el flujo sobre la placa plana mostrada en la Fig. 12-1. Sobre el flujo se ejerce un campo magnético constante B, dirigido en la dirección y. Suponemos que este campo es uniforme a través de la capa límite y que el campo magnético ejercido es cero. Al escribir una ecuación de momento para este sistema de flujo, sólo necesitamos considerar la fuerza magnética tal como se da en la Ec. 12-4. Si suponemos todas las propiedades constantes, incluyendo la conductividad eléctrica, obtenemos

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mathbf{J}_c \times \mathbf{B})_x \tag{12-12}$$

Esta es una ecuación de momento, equivalente a la Ec. 5-11 para un flujo convencional. Obsérvese que sólo se considera el componente x de la fuerza magnética, ya que la ecuación representa una suma de fuerzas en la dirección x. La velocidad del fluido se escribe

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \tag{12-13}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_c &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\ &= \sigma(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \times B_y\mathbf{j} = \sigma u B_y \mathbf{k}\end{aligned} \tag{12-14}$$

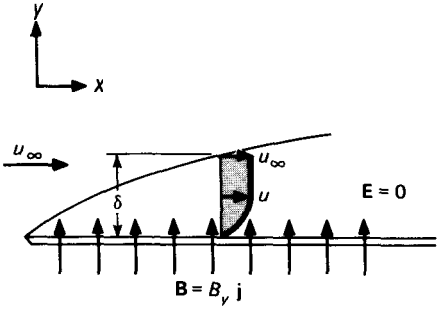


Fig. 12-1 Capa limite hidromagnética.

Así
$$\mathbf{J}_c \times \mathbf{B} = -\sigma u B_y^2 \mathbf{i} \tag{12-15}$$

y
$$(\mathbf{J}_c \times \mathbf{B})_x = -\sigma u B_y^2 \tag{12-16}$$

La ecuación de momento se convierte en

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_y^2}{\rho}u \tag{12-17}$$

La ecuación integral de momento equivalente para un gradiente de presión cero es

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} + \int_0^\delta \sigma B_y^2 u\, dy = \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \rho u(u_\infty - u)\, dy\right] \tag{12-18}$$

Podemos escribir las mismas condiciones en el perfil de velocidad como en la Sec. 5-2, de manera que se emplea el perfil de parábola cúbica para realizar la integración,

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{12-19}$$

Insertando la Ec. 12-19 en la Ec. 12-18 y realizando la integración se obtiene

$$\frac{3\nu u_\infty}{2\delta} + \frac{5\sigma u_\infty B_y^2}{8\rho}\delta = \frac{39}{280}u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \tag{12-20}$$

Esta ecuación diferencial es lineal en δ^2 y se puede resolver para obtener

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = \frac{2.40}{\mathrm{Re}_x N}(e^{8.97N} - 1) \tag{12-21}$$

en donde a N se le denomina *número de influencia magnética,*

$$N = \frac{\sigma B_y^2 x}{\rho u_\infty} \tag{12-22}$$

El número de Reynolds está definido en la forma convencional, es decir,

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu}$$

La relación para el espesor de capa límite laminar, de acuerdo con la Ec. 5-4 es

$$\frac{\delta_0}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{12-23}$$

Podemos así formar la razón de comparación

$$\frac{\delta_m}{\delta_0} = \frac{0.334}{N^{1/2}} (e^{8.97N} - 1)^{1/2} \tag{12-24}$$

en donde ahora δ_m es el espesor de capa límite en presencia de un campo magnético y δ_0 es el espesor para el campo magnético cero. La relación funcional que se expresa en la Ec. 12-24 está trazada en la Fig. 12-2. El efecto de un campo magnético mayor es aumentar el espesor de la capa límite como resultado del incremento en la fuerza de reacción. El efecto es análogo al flujo contra un gradiente de presión positivo.

En seguida examinaremos el efecto de la fuerza magnética sobre la transferencia de calor desde la placa. Una vez más suponemos propiedades constantes, así como un campo eléctrico aplicado cero. El término de trabajo electromagnético se convierte entonces en

$$W_{em} = -\frac{\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}_c}{\sigma} \tag{12-25}$$

y la ecuación de energía de capa límite se escribe

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{dx} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{J}_c}{\sigma} \tag{12-26}$$

Considérese ahora la placa plana que se ve en la Fig. 12-3. La superficie de la placa se mantiene a la temperatura constante T_w, la temperatura de corriente libre es T_∞ y el espesor de la capa límite térmica se designa por el signo convencional, δ_t. Para simplificar el análisis, consideramos un flujo incompresible de baja velocidad de manera que los efectos de calentamiento viscoso son despreciables. La ecuación integral de energía se convierte entonces en

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} (T_\infty - T) u \, dy \right] = \alpha \frac{dT}{dy} \Big]_{y=0} - \frac{\sigma}{\rho c_p} \int_0^{\delta_t} B_y^2 u^2 \, dy \tag{12-27}$$

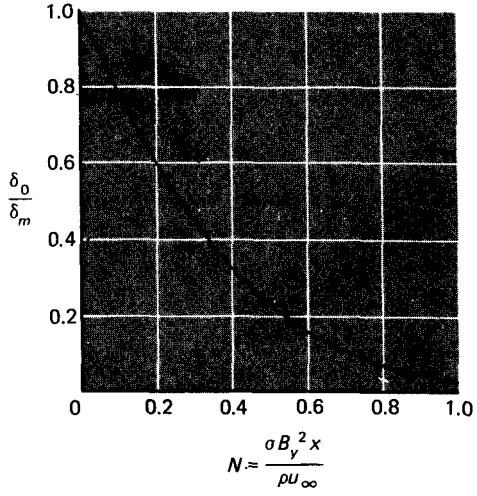


Fig. 12-2 Influencia del campo magnético sobre el espesor de capa límite.

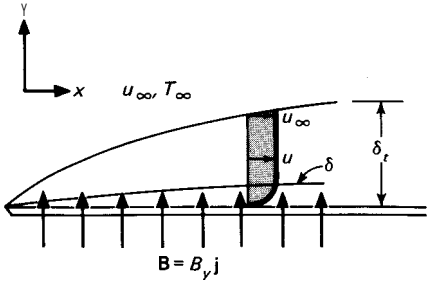


Fig. 12-3 Capa límite térmica en flujo de dinámica de magnetofluido.

ya que

$$\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{[\sigma(\mathbf{V}\times\mathbf{B})]\cdot[\sigma(\mathbf{V}\times\mathbf{B})]}{\sigma} = \sigma B_y^2 u^2 \tag{12-28}$$

En la Ec. 12-27 se supone que los efectos de calentamiento magnético están limitados a la región de capa límite. Una vez más, como en la Sec. 5-6, podemos escribir una función del tipo de parábola cúbica para la distribución de temperatura, de modo que

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T-T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{12-29}$$

Si en este punto se siguiera el mismo procedimiento que en la Sec. 5-6, las funciones de temperatura y velocidades expresadas por las Ecs. 12-19 y 12-29 se insertarían en la Ec. 12-27 a fin de obtener una ecuación diferencial a resolver para δ_t, el espesor de capa límite en presencia de un campo magnético. El problema con este enfoque es la ecuación no lineal resultante, la cual debe resolverse por métodos numéricos.

Supóngase que el fluido es sumamente conductivo, como ocurre con un metal líquido. En este caso, el espesor de capa límite térmica sería mucho mayor que el espesor hidrodinámico. Esto es evidente por el hecho de que los números de Prandtl, para metales líquidos son muy bajos, del orden de 0.01. Entonces, para un líquido tal, podríamos aproximar el comportamiento real del fluido con un modelo de flujo viscoso para el transporte de energía en una capa límite térmica, tal como se esbozó en la Sec. 6-5. Suponemos un perfil de velocidad constante

$$u = u_\infty \tag{12-30}$$

Ahora, insertando las Ecs. 12-19 y 12-30 en la ecuación integral de energía, obtenemos

$$\frac{3u_\infty\theta_\infty}{8}\frac{d\delta_t}{dx} = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t} - \frac{\sigma B_y^2 u_\infty^2}{\rho c_p}\delta_t \tag{12-31}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal en δ_t^2, y tiene la solución

$$\delta_t^2 = \frac{4\alpha}{Ku_\infty}(1 - e^{-2Kx}) \tag{12-32}$$

donde
$$K = \frac{8\sigma B_y^2 u_x}{3\theta_x \rho c_p} \tag{12-33}$$

El coeficiente de transferencia de calor en presencia de un campo magnético se puede calcular ahora a partir de

$$h_m = \frac{-k(\partial T/\partial y)_{y=0}}{T, \quad - T_\infty} - \frac{3k}{26,} \tag{12-34}$$

En forma adimensional

$$\mathrm{Nu}_m = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\sqrt{N\ \mathrm{Ec}\ \mathrm{Re}_x\ \mathrm{Pr}}\,(1 - e^{-5.33N\ \mathrm{Ec}})^{-1/2} \tag{12-35}$$

donde
$$\mathrm{Nu}_m = \text{número de Nusselt} = \frac{h_m x}{k} \tag{12-36}$$

$$\mathrm{Ec} = \text{número de Eckert} = \frac{u_\infty^2}{c_p \theta_\infty} \tag{12-37}$$

y Pr es el número de Prandtl del fluido. Si se resuelve la Ec. 12-27 para el caso de un campo magnético cero, pero con el mismo modelo de flujo viscoso de la Sec. 6-5, se obtiene

$$\mathrm{Nu}_0 = \frac{h_0 x}{k} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{\mathrm{Re}_x\ \mathrm{Pr}} \tag{12-38}$$

La razón de comparación de interés en el caso de transferencia de calor es entonces

$$\frac{\mathrm{Nu}_m}{\mathrm{Nu}_0}\left(\frac{5.33N\ \mathrm{Ec}}{1 - e^{-5.33N\ \mathrm{Er}}}\right)^{1/2} \tag{12-39}$$

Esta ecuación se ha trazado en la Fig. 12-4. Se debe observar que el campo magnético aumentará la rapidez de transferencia de calor para valores positivos del número de Eckert $(T_\infty > T_w)$ y disminuirá la transferencia de calor para números de Eckert negativos $(T_w > T,)$. Este comportamiento es el resultado del hecho de que el campo magnético tiende a calentar el fluido, reduciendo o incrementado así el gradiente de temperatura entre el fluido y la placa.

Es necesario advertir que el análisis precedente está muy idealizado y se ha usado principalmente para ilustrar los efectos del campo magnético en la transferencia de calor. Un análisis más realista consideraría la variación de la conductividad eléctrica del fluido y tomaría en cuentra el perfil de velocidad exacta en lugar del modelo de flujo viscoso. Romig [1] presenta una revisión de relaciones más exacta para la transferencia de calor en sistemas DMF, y en el texto de Sutton y Sherman [2] encontramos una revisión completa sobre el tema de la dinámica de magnetofluidos.

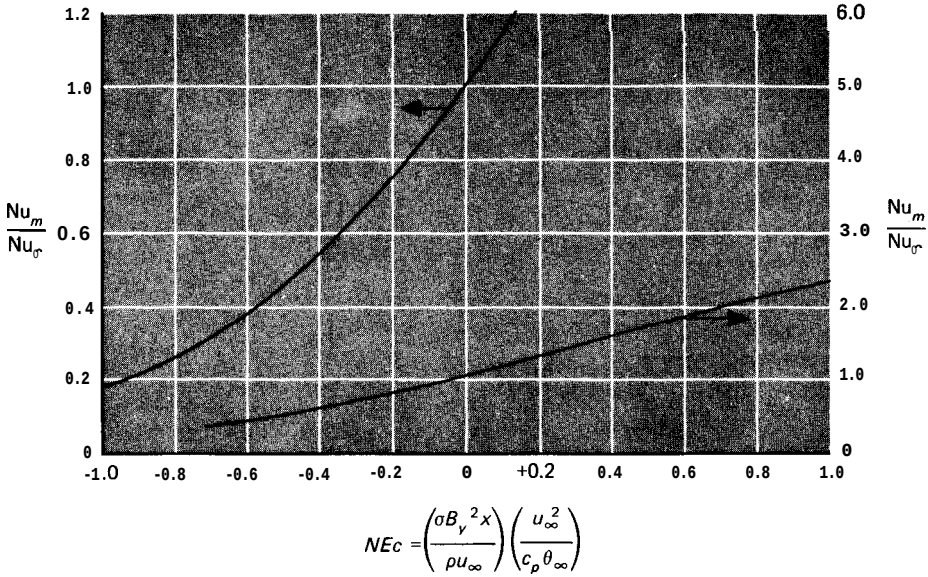


Fig. 12-4 Influencia del campo magnético en la transferencia de calor en una placa plana.

12-3 Enfriamiento por transpiración

Cuando se encuentran situaciones de transferencia de calor a alta velocidad, tal como la que se describe en la Sec. 5-12, la temperatura de pared adiabática de la superficie expuesta a la corriente de flujo puede volverse muy alta, y tal vez requiera un enfriamiento significativo para reducir la temperatura de la superficie a un valor razonable. Una de las técnicas usadas para enfriar la superficie es el llamado enfriamiento por transpiración o exudación. Esta técnica opera según el principio que se muestra en la Fig. 12-5. Una placa plana porosa se expone a una corriente de flujo a alta velocidad, mientras que a través de la placa se fuerza un fluido hacia la capa límite. Este fluido puede ser el mismo de la corriente libre u otro diferente. El proceso de inyección transporta energía adicional de la región próxima a la superficie de la placa en cantidades muy superiores a las que normalmente se conducirán hacia la capa limite. También se tiene un efecto sobre el perfil de velocidad de la capa limite y en forma correspondiente, en las características de fricción en el arrastre.

Para un flujo incompresible sin calentamiento viscoso y con un gradiente de presión cero, las ecuaciones de capa límite que deben resolverse son las ya conocidas y presentadas en el Cap. 5, cuando el fluido inyectado es igual al de la corriente libre:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (12\text{-}40)$$

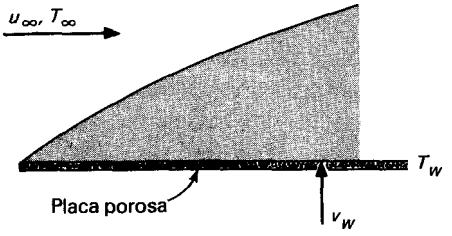


Fig. 12-5 Placa plana porosa con inyección de fluido.

Sin embargo, las condiciones de frontera son diferentes a las que se usaron en el Cap. 5. Ahora debemos tomar

$$v = v_w \qquad \text{en } y = 0 \tag{12-41}$$

en lugar de v = 0 en y = 0, ya que tenemos una velocidad de inyección finita. Seguimos teniendo:

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0$$
$$u = u_\infty \qquad \text{en } y \to \infty$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y \to \infty$$

Las ecuaciones de capa límite pueden resolverse por la técnica esbozada en el Apéndice B o por medio del método integral del Cap. 5. Eckert y Hartnett [3] desarrollaron un amplio conjunto de soluciones para el problema de enfriamiento por transpiración y nosotros presentamos el resultado de sus análisis sin examinar las técnicas empleadas para la resolución de las ecuaciones.

La Fig. 12-6 muestra los perfiles de velocidad en capa límite, que es el resultado de diversas rapideces de inyección en una capa límite laminar. El parámetro de inyección

$$\frac{v_w}{u_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

emplea la definición convencional del número de Reynolds como Re, $= \rho u_\infty x/\mu$. Los valores negativos del parámetro de inyección indican succión en la placa y producen perfiles de velocidad mucho menos agudos. Para parámetros de inyección con valores mayores a 0.619, la capa límite desaparece por completo de la placa. Para las diferentes rapideces de inyección, los perfiles de temperatura tienen formas similares. El efecto total del proceso de inyección (o succión) en la transferencia de calor se indica en la Fig. 12-7. Como se esperaba, la desaparición causa una reducción en la transferencia de calor, mientras que la succión causa un incremento.

Una aplicación importante del enfriamiento por transpiración es la del flujo de plano de estancamiento, como se ilustra en la Fig. 12-8. En la Ref. 3 se han desarrollado resoluciones para la influencia de la transpiración sobre la transferencia de calor en la proximidad de tal línea de estancamiento y en la Fig. 12-9 se muestran los resulta-

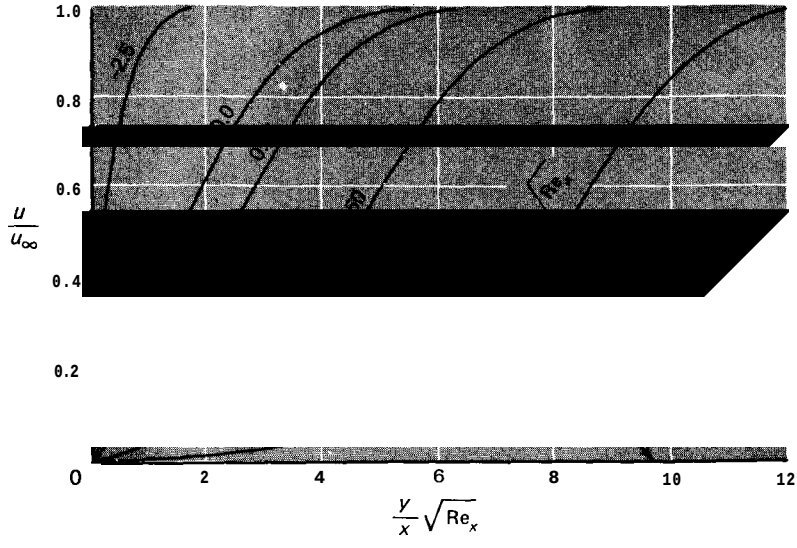


Fig. 12-6 Perfiles de velocidad en capa límite laminar para inyección en una placa plana, según la Ref. 3.

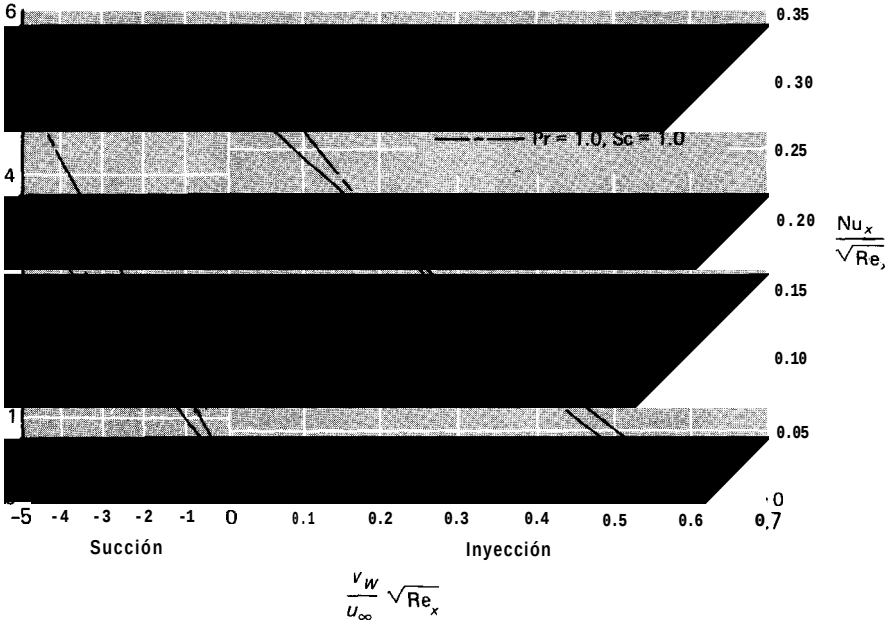


Fig. 12-7 Efecto de la inyección de fluido sobre la transferencia de calor en una placa plana de acuerdo con la Ref. 3.

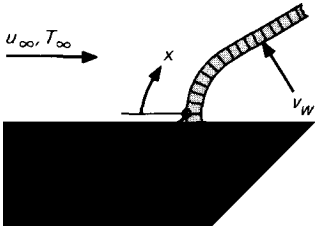


Fig. 12-8 Flujo de plano de estancamiento con inyección de fluido.

dos. Como era de esperarse, la inyección de gas o su succión puede ejercer un efecto significativo en el factor de recuperación de temperatura para flujo sobre una placa plana. Estos efectos se encuentran indicados en la Fig. 12-10, en la que el factor de recuperación está definido en forma convencional como

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{aw} - T_\infty}{u_\infty^2/2c_p} \tag{12-42}$$

En este punto es conveniente recordar al lector que todas las curvas presentadas arriba involucran la inyección de un gas, el cual es idéntico al gas del flujo libre (casi siempre aire). Cuando se utilizan gases diferentes en la inyección, se debe tener en cuenta la difusión en masa en la capa límite. Esta situación ha sido analizada en diversos trabajos, para el estudio de estos problemas enviamos al lector interesado a las

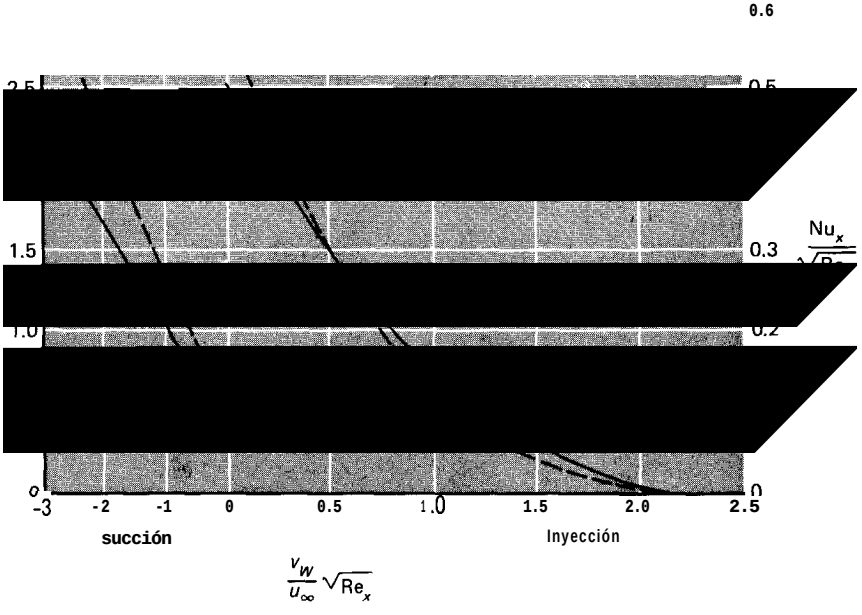


Fig. 12-9 Efectos de la inyección de fluido sobre la transferencia de calor en plano de estancamiento, de acuerdo con la Ref. 3.

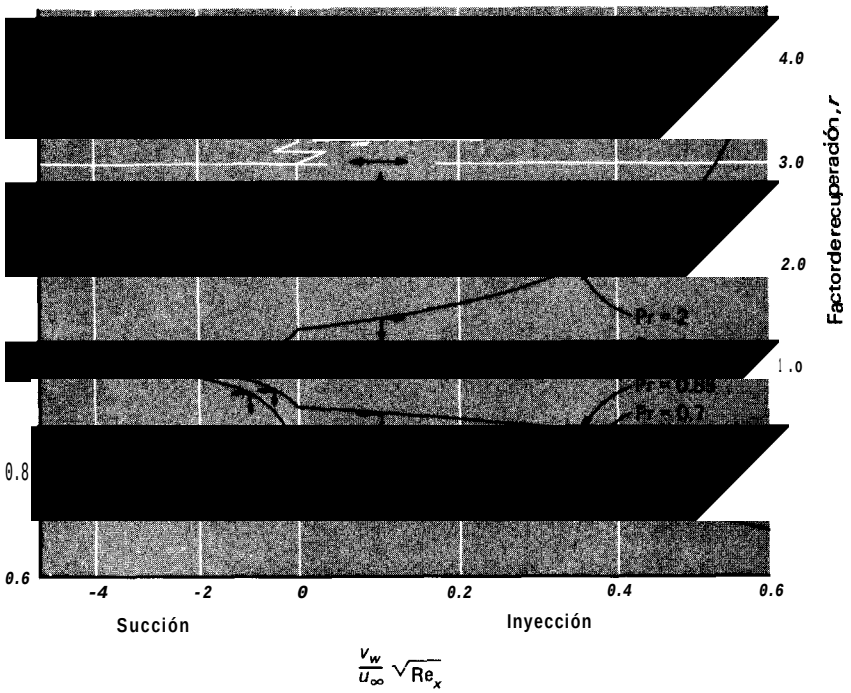


Fig. 12-10 Efectos de la inyección de fluido sobre el factor de recuperación para flujo sobre una placa plana, de acuerdo con la Ref. 3.

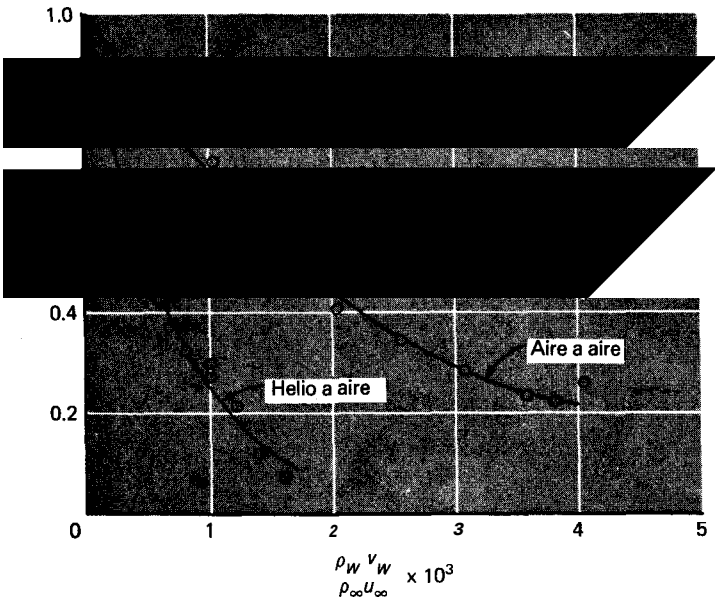


Fig. 12-11 Reducción de la transferencia de calor en la superficie debido a diversas rapideces de inyección de acuerdo con la Ref. 6. $M = 3.0$, $Re_x = 4 \times 10^6$, $T_w = 507$ °R, $T_\infty = 474$ °R.

Refs. 4, 5 y 7. Los resultados experimentales de la Ref. 6 indican el comportamiento aproximado que resulta del uso de diferentes enfriadores, tal como lo muestra la Fig. 12-11. En esta figura el producto $\rho_w v_w$ se refiere a la densidad y velocidad de la inyección de gas en la pared. La razón h/h_0 representa la razón del coeficiente de transferencia de calor con inyección y sin inyección. En general, los gases de poco peso presentan un efecto de enfriamiento superior al de la inyección de aire debido a sus calores específicos más elevados.

Ejemplo 12-1

Para las condiciones de flujo del Ej. 5-9, calcule el porcentaje de reducción en la transferencia de calor en una posición en la que Re, = 5 X 10' y el parámetro de inyección es 0.2. Para este cálculo suponga propiedades constantes evaluadas a la temperatura promedio entre las temperaturas de recuperación y la de corriente libre. Calcule también el flujo de una masa de aire de enfriamiento requerido por unidad de área en este lugar.

Solución

Primero calculamos la temperatura de recuperación (pared adiabática). De la Fig. 12-10

$$r = 0.79 \quad \text{para Pr} = 0.7$$

Del Ejemplo 5-8

$$T_0 = 652 \text{ K} = 379 \text{ °C} \quad [714 \text{ °Fl}$$

$$T_\infty = -40 \text{ °C} = 233 \text{ K L-40 °Fl}$$

$$u_\infty = 918 \text{ m/s} \quad [3011 \text{ pies/s}]$$

Así

$$T_{aw} - T_\infty = 0.79(652 \quad 233) = 331$$

$$T_{aw} = 233 + 331 = 564 \text{ K}$$

Evaluamos propiedades en

$$T_r = \frac{564 + 233}{2} = 398.5 \text{ K}$$

De acuerdo con la Fig. 12-7, con

$$\frac{v_w}{u_\infty}\sqrt{\text{Re}_x} = 0.2 \quad y \qquad \text{Pr} = 0.7$$

obtenemos

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0.19$$

Para una inyección cero tenemos

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = 0.29$$

El porcentaje de reducción en la transferencia de calor se obtiene comparando estos dos últimos números:

$$\text{Reducción en transferencia de calor} = \frac{0.29 \quad 0.19}{0.29} \times 100 = 34.5\%$$

La masa

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = \rho_w v_w$$

$$v_w = \left(\frac{v_w}{u_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\right)\frac{u_\infty}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

·s]

12-4 Transferencia de calor a baja densidad

Cierto número de situaciones prácticas involucran transferencia de calor entre una superficie sólida y un gas de baja densidad. Al emplear el término *baja* densidad, nos referimos a aquellas circunstancias en las que la trayectoria libre media de las moléculas del gas ha dejado de ser pequeña en comparación con las dimensiones características de la superficie de transferencia de calor. Esta trayectoria libre media es la distancia que viaja en promedio una molécula, entre colisiones. Entre más grande sea esta distancia, mayor será ésta requerida para comunicar la temperatura de una superficie caliente. Esto quiere decir que no podremos suponer necesariamente que un gas muy cerca de la superficie tendrá la misma temperatura que la superficie caliente, tal como se supuso en el análisis de capa límite del Cap. 5. Debido a que la trayectoria libre media también se encuentra en relación con el momento de transporte entre moléculas, también nos veremos forzados a abandonar nuestra suposición de una velocidad de fluido cero cerca de una superficie estacionaria, para aquellos casos en los que la trayectoria libre media no es despreciable en comparación con las dimensiones de la superficie.

Se pueden anticipar tres regímenes de flujo generales para el flujo sobre una placa plana, que se muestra en la Fig. 12-12. En el primero, la región de flujo continuo se encuentra cuando la trayectoria libre media λ es muy pequeña en comparación con una dimensión característica de cuerpo. Esta es la situación de transferencia de calor

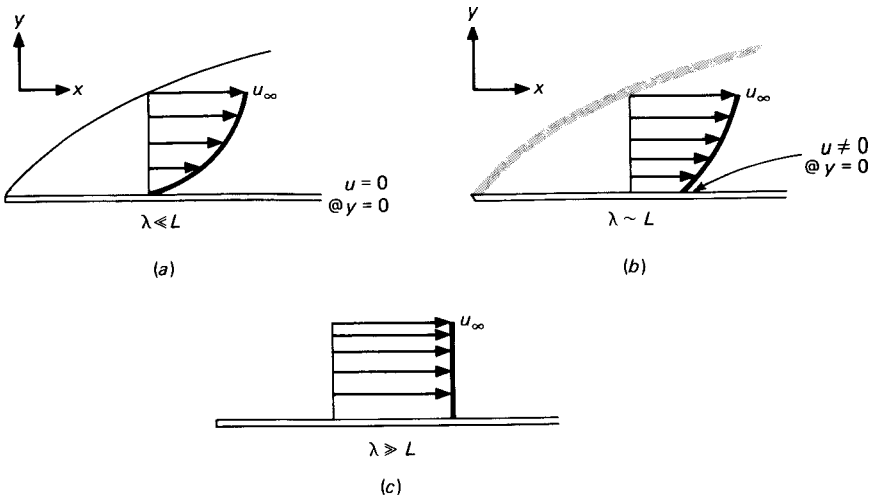


Fig. 12-12 Tres tipos de regímenes de flujo para una placa plana: (*a*) flujo continuo; (*b*) flujo de deslizamiento; (*c*) flujo de molécula libre.

por convección analizada en capítulos precedentes. A presiones de gas menores, cuando $\lambda \sim L$, el flujo parece "deslizarse" a lo largo de la superficie y $u \neq 0$ en $y = 0$. A esta situación se le llama de manera muy adecuada flujo de deslizamiento. A densidades aún menores, todo momento e intercambio de energía es el resultado de un riguroso bombardeo molecular de la superficie. A este régimen se le denomina flujo molecular libre y debe analizarse fuera de la mecánica convencional de fluidos continuos.

Es evidente que el parámetro de mayor interés es una razón entre la trayectoria libre media y a la dimensión característica de cuerpo. A este grupo se le denomina el *número de Knudsen,*

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} \tag{12-43}$$

De acuerdo con la teoría cinética de los gases, la trayectoria libre media se puede calcular a partir de

$$\lambda = \frac{0.707}{4\pi r^2 n} \tag{12-44}$$

en donde r es el radio molecular efectivo para colisiones y n es la densidad molecular. Una relación aproximada para la trayectoria libre media de moléculas de aire se expresa por

$$\lambda = 2.27 \times 10^{-5} \frac{T}{P} \quad \text{metros} \tag{12-45}$$

en donde T está en grados Kelvin y p en newtons por metro cuadrado.

La rapidez del sonido en un gas está relacionada con la velocidad molecular $\bar{v}$ a través de la relación

$$a = \bar{v}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}} \tag{12-46}$$

La velocidad molecular media puede expresarse por

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi}} \tag{12-47}$$

en donde R es la constante de los gases para un gas particular. Se puede demostrar que las propiedades de transporte (viscosidad, conductividad térmica, coeficiente de difusión) de un gas están relacionadas directamente con la velocidad molecular media. Basándose en esta relación, la representación de la teoría cinética del número de Reynolds se puede derivar como

$$\mathrm{Re} = \frac{2u_\infty L}{\bar{v}\lambda} \tag{12-48}$$

Utilizando la Ec. 12-46, el número de Mach se expresa como

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{\bar{v}}\sqrt{\frac{8}{\pi\gamma}} \tag{12-49}$$

Ahora, combinando las Ecs. 12-43, 12-48 y 12-49, el número de Knudsen puede expresarse como

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}\frac{M}{\mathrm{Re}} \tag{12-50}$$

Esta relación nos permite interpretar un régimen de flujo de baja densidad en términos de los parámetros de flujo convencionales, los números de Mach y Reynolds. La Fig. 12-13 nos proporciona una representación aproximada de estos efectos.

Como un primer ejemplo de la transferencia de calor a baja densidad consideremos las dos placas paralelas infinitas de la Fig. 12-14. Se mantienen las placas a temperaturas diferentes y separadas por un medio gaseoso. Despreciemos los efectos de convección natural. Si la densidad del gas es suficientemente alta para que $\lambda \to 0$, se experimentará un perfil de temperatura lineal a través del gas tal como se muestra para el caso de λ_1. A medida que se disminuye la densidad del gas, las trayectorias libres medias mayores requerirán una mayor distancia de las superficies de transferencia de calor a fin de que el gas se ajuste a las temperaturas de superficie. En la Fig. 12-14*b* se muestran los perfiles de temperatura esperados. Extrapolando la porción recta de las curvas de baja densidad a la pared, se produce un "salto" de temperatura ΔT, que puede calcularse realizando el siguiente balance de energía:

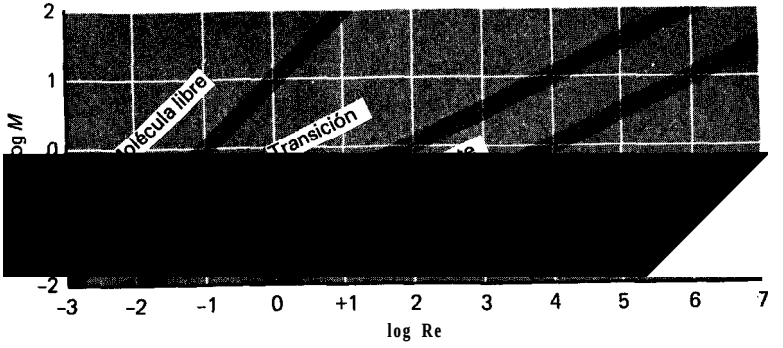
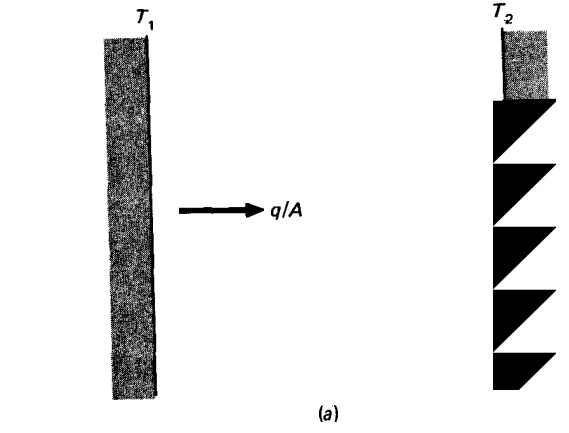
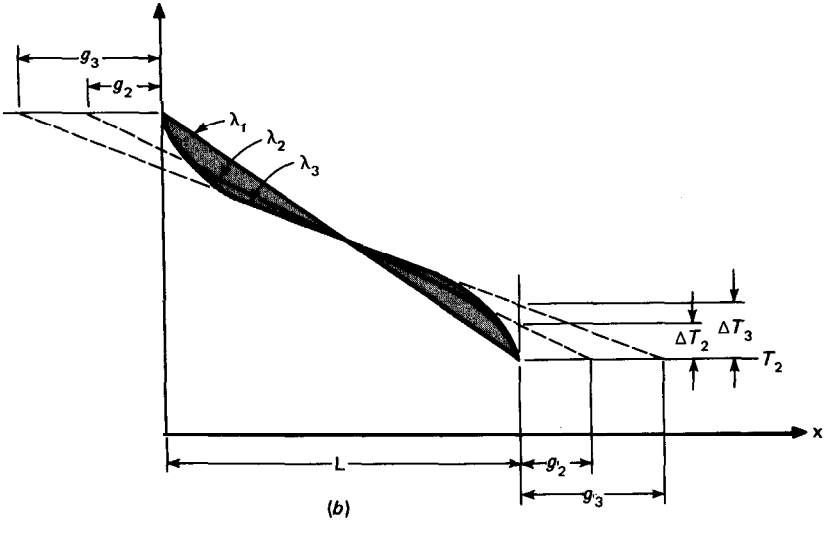


Fig. 12-13 Relación de los regímenes de flujo para los números de Mach y Reynolds.





$$\frac{q}{A} = k\,\frac{T_1 - T_2}{g + L + g} = k\,\frac{\Delta T}{g} \tag{12-51}$$

En esta ecuación estamos suponiendo que la distancia de extrapolación g es la misma para las superficies de ambas placas. En general, el salto de temperatura dependerá del tipo de superficie y estas distancias de extrapolación no serán iguales a menos que los materiales sean idénticos. Para materiales diferentes deberemos tener

$$\frac{q}{A} = k\,\frac{T_1 - T_2}{g_1 + L + g_2} = k\,\frac{\Delta T_1}{g_1} = k\,\frac{\Delta T_2}{g_2} \tag{12-52}$$

en donde ahora ΔT_1 y ΔT_2 son los saltos de temperatura en las dos superficies de transferencia de calor y g_1 y g_2 son las distancias de extrapolación correspondientes. Para superficies idénticas el salto de temperatura se expresará entonces como

$$\Delta T = \frac{g}{2g + L}\,(T_1 - T_2) \tag{12-53}$$

Se pueden desarrollar expresiones similares para conducción a baja densidad entre cilindros concéntricos. A fin de predecir la rapidez de transferencia de calor es necesario establecer relaciones para el saldo de temperatura para diversas zonas interfaciales de gas a sõlido.

Ya hemos mencionado que el efecto de salto de temperatura surge como resultado de la falla de las moléculas para "ajustarse" a la temperatura de la superficie cuando la trayectoria libre se hace del orden de una dimensión característica del cuerpo. Al parámetro que describe este-comportamiento se le llama *coeficiente de ajuste* α, *y se* **define por**

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_w} \tag{12-54}$$

en donde E_i = **energía de las moléculas incidentes sobre una superficie**
E_r = **energía de las moléculas reflejadas por la superficie**
E_w = **energía que tendrán las moléculas si adquieren energía de la pared a una temperatura** T_w.

Los valores del coeficiente de ajuste se deberán determinar por medio de experimentos y en la Tabla 12-1 se da un breve resumen de estas medidas.

Es posible emplear la teoría cinética de los gases junto con valores de α

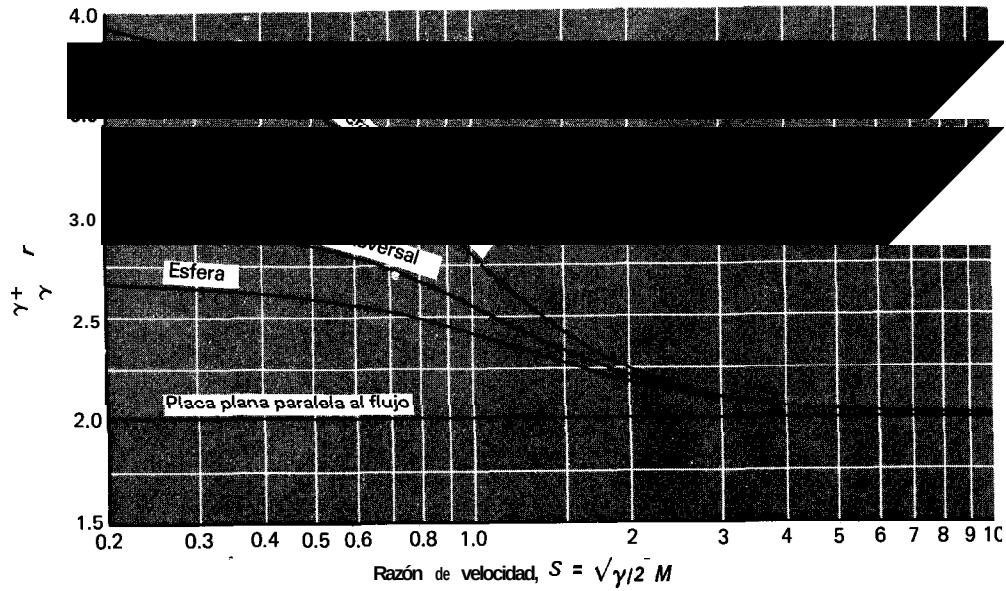


Fig. 12-16 Factores de recuperación para flujo molecular libre, de acuerdo con la Ref. 8.

$$\mathrm{St} = \frac{h}{\rho c_p u_\infty} \tag{12-58}$$

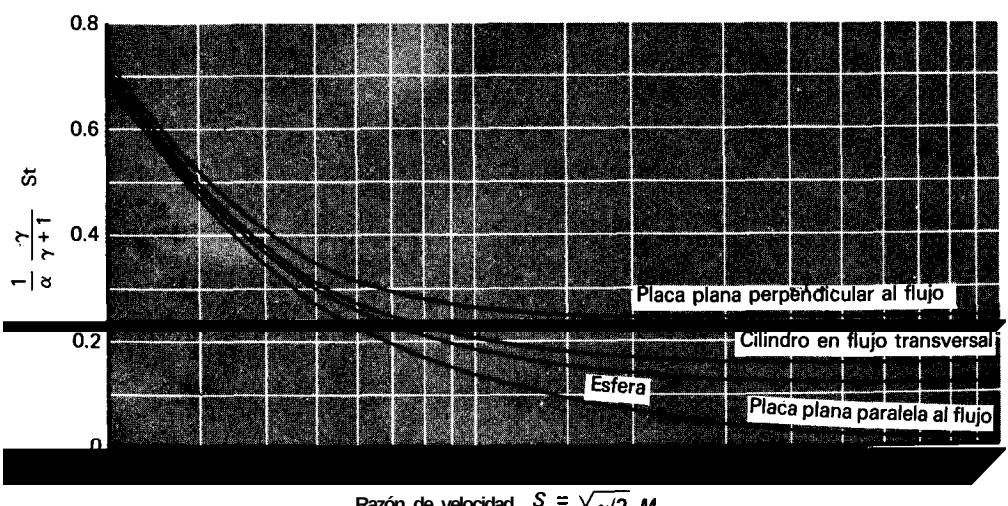


Fig. 12-17 Números de Stanton para flujo molecular libre, de acuerdo con la Ref. 8.

$$\Delta T = \frac{2}{0.9} \frac{0.9}{2.4} \frac{2.8}{0.7} \frac{0.0757}{0.0025} \frac{100 - 30 - 2 \text{ AT}}{}$$

$$= 32.38 \text{ °C } 158.3 \text{ °F]}$$

La transferencia de calor por conducción es entonces

$$\frac{q}{A} = k \frac{T_1 - T_2 - 2 \text{ AT}}{L} = \frac{(0.0291)(70 - 64.76)}{0.025}$$

$$= 6.099 \text{ W/m}^2 \quad [1.93 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

A una presión atmosférica normal la conducción será

$$\frac{q}{A} = k \frac{T_1 - T_2}{L} = 81.48 \text{ W/m}^2 \quad [25.8 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2 1$$

La transferencia de calor por radiación se calcula con la Ec. S-42, tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.06$ para aluminio pulido:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{rad}} = \frac{\sigma(T_1^4 \quad T_2^4)}{2/\epsilon - 1} = \frac{(5.669 \text{ x } 10^{-8})(393^4 - 303^4)}{2/0.06 - 1}$$

$$= 27.05 \text{ W/m}^2 \text{ I8.57 Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

Por tanto, en condiciones de baja densidad la transferencia de calor por radiación es casi 5 veces mayor que la conducción, aun con superficies muy pulidas.

Ejemplo 12-3

Se construye un termopar soldando los cables de manera que se forme una esfera de 1.0 mm de diámetro. Se expone la esfera a una corriente de aire a alta velocidad a $M = 6$, $p = 10^{-6}$ atm y $T_\infty = -70$ °C. Estime la temperatura de la esfera del termopar suponiendo una emisividad de superficie de 0.7. Suponga que la esfera tiene un coeficiente de ajuste igual al del hierro fundido.

Solución

Primero establecemos el régimen de flujo. Evaluando las propiedades a las condiciones de corriente libre, tenernos

$$T_\infty = -70 \text{ °C} = 203 \text{ K} \qquad \mu = 1.329 \text{ x } 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.0181 \text{ W/m} \cdot \text{°C} \qquad c_p = 1006 \text{ J/kg} \cdot \text{°C}$$

La densidad del gas es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(10.132 \text{ x } 10^5)(10^{-6})}{(287)(203)} = 1.739 \text{ x } 10^{-6} \text{ kg/m}^3$$

La velocidad acústica es

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} = [(1.4)(287)(203)]^{1/2} = 285.6 \text{ m/s} \quad [937 \text{ pies/s}]$$

de modo que

$$u_\infty = (6X285.6) = 1714 \text{ m/s } [5623 \text{ pies/s}]$$

El número de Reynolds se calcula ahora como

$$\text{Re} = \frac{\rho u_\infty d}{\mu} = \frac{(1.739 \times 10^{-6})(1714)(10^{-3})}{1.329 \times 10^{-5}} = 0.224$$

Una inspección de la Fig. 12-13 muestra que nos encontramos en el intervalo de moléculas libres. De acuerdo con esto podemos usar las Figs. 12-16 y 12-17 para calcular los parámetros de transferencia de calor. La razón de velocidad molecular se calcula como

$$S = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} M = (0.7)^{1/2}(6) = 5.02$$

De las figuras

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} = 2.04 \qquad \frac{1}{\alpha} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \text{ St} = 0.127$$

Entonces. utilizando $\alpha = 0.9$,

$$r = \frac{(2.04)(1.4)}{\qquad\qquad}$$

de calora partir de

$$h = \rho c_p u_\infty \text{ St} = (1.739 \times 10^{-6})(1006)(1714)(0.127) = 0.381 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Ahora empleamos el balance de energía indicado en la Ec. 12-60 para calcular la temperatura de equilibrio de radiación T_{rw}, **tomando la radiación de los alrededores a = 70 °C:**

$$(0.381)(1942 - T_{rw}) = (5.669 \times 10^{-8})(0.7)[T_{rw}^4 - (203)^4]$$

Una resolución de esta ecuación nos da

$$T_{rw} = 359 \text{ K} = 86 \text{ °C} \quad [187 \text{ °F}]$$

Es fácil ver por este ejemplo que la transferencia de calo; por radiación es muy importante para trabajo con baja densidad, aun cuando se encuentran altas velocidades.

12-5 Ablación

Las muy altas velocidades que existen en el regreso de los proyectiles presenta problemas de transferencia de calor inusitados e interesantes. El principal interés es casi siempre con la energía total que debe absorberse en el campo reentrante más bien que con una *rapidez* de transferencia de calor, ya que los tiempos de regreso son muy cortos. En estas ocasiones una técnica común *es* la ***ablución,*** en la que se permite que parte del cuerpo sólido expuesto al flujo caliente a alta velocidad se funda y desaparezca. Por tanto, parte del calor se gasta en el material fundido en lugar de ser conducido al interior del vehículo. Varios vidrios y plásticos encuentran aplicación en esta técnica como materiales de ablación.

Emplearemos un análisis simplificado del problema de ablación utilizando el sistema de coordenadas y las nomenclaturas que se muestran en la Fig. 12-18. La pared sólida está expuesta a un flujo de calor constante de $(q/A)_0$ en la superficie. Este flujo de calor puede ser el resultado de la transferencia de calor por radiación y convección combinadas a partir de la capa límite a alta velocidad. Como resultado del flujo de calor a alta velocidad, el cuerpo sólido se funde y parte de la superficie desaparece a la velocidad de ablación V_a. Suponemos que se alcanza una situación de estado estacionario de manera que la superficie desaparece a una rapidez constante. También se supone que el espesor del solido es muy grande en comparación con la profundidad del material que desaparece en el proceso de fundición. Si el proceso es esencialmente unidimensional, la ecuación diferencial adecuada para propiedades constantes es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{12-61}$$

Este problema se resuelve más fácil con un simple cambio de variable en un sistema de coordenadas en movimiento. Si se toma el tiempo desde el comienzo de la ablación, entonces un cambio conveniente de variable será:

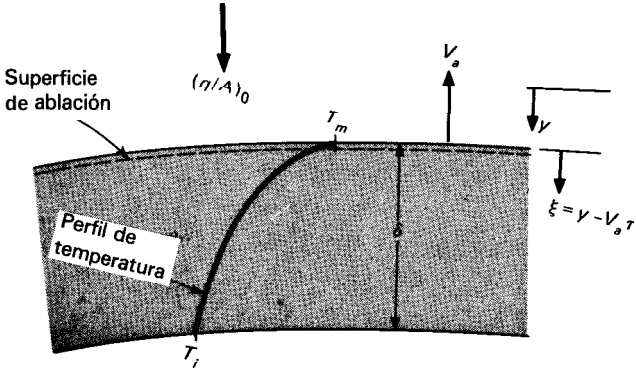


Fig. 12-18 **Esquema de la ablación de una superficie sólida.**

$$\xi = y - V_a \tau \tag{12-62}$$

El efecto de esta transformación es fijar el origen a la superficie del sistema de coordenadas en movimiento. Las derivadas en la Ec. 12-61 se pueden expresar ahora como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \qquad \frac{\partial T}{\partial \tau} = -V_a \frac{\partial T}{\partial \xi}$$

de manera que resulta una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} + \frac{V_a}{\alpha} \frac{dT}{d\xi} = 0$$

Esta ecuación tiene como solución

$$T = C_1 + C_2 \exp \frac{-V_a \xi}{\alpha} \tag{12-63}$$

En la superficie la temperatura es la temperatura de fusión T_m, mientras que la temperatura en el interior del cuerpo es T_i. Las condiciones de frontera adecuadas son entonces

$$T = T_m \qquad \text{en } \xi = 0$$
$$T = T_i \text{ cuando } \xi \to \infty$$

Evaluando las constantes en la Ec. 12-63 se obtiene la solución final

$$\frac{T - T_i}{T_m - T_i} = \exp \frac{-V_a \xi}{\alpha} \tag{12-64}$$

La energía incidente total en el cuerpo se conduce a la lámina o se usa para fundir el material. Por tanto,

$$\left(\frac{q}{A}\right)_0 = \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{cond}} + \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{abl}}$$
$$= -k \frac{\partial T}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} + \rho V_a H_{ab} \tag{12-65}$$

en donde H_{ab} es el calor de ablación. Evaluando el gradiente de temperatura en la superficie de la Ec. 12-64 obtenemos

$$\left(\frac{q}{A}\right)_0 = \rho V_a c (T_m - T_i) + \rho V_a H_{ab} \tag{12-66}$$

la cual puede resolverse para la velocidad de ablación V_a para obtener

$$V_a = \frac{(q/A)_0}{\rho H_{ab}[1 + c(T_m - T_i)/H_{ab}]} \tag{12-67}$$

Como se mencionó antes, el objetivo principal de la ablación es reducir la cantidad de energía conducida al interior del sólido. En consecuencia, es de interés comparar la energía total conducida en un tiempo τ con el total de la energía incidente en ese mismo tiempo. La energía total por conducción es

$$\left(\frac{Q}{A}\right)_{\text{cond}} = \int_0^{\tau} -k\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} d\tau$$
$$= \rho V_a c(T_m - T_i) \tag{12-68}$$

En este tiempo la energía total es $(q/A)_0\tau$. Por consiguiente, formamos la siguiente razón de interés:

$$\frac{(Q/A)_{\text{cond}}}{(Q/A)_{\text{total}}} \quad \frac{\rho V_a c(T_m - T_i)}{(q/A)_0} \tag{12-69}$$

Utilizando la Ec. 12-67 obtenemos

$$\frac{(Q/A)_{\text{cond}}}{(Q/A)_{\text{total}}} = H_{ab}\left[1 + \frac{c(T_m - T_i)}{H_{ab}}\right] \tag{12-70}$$

En este punto es necesario hacer algunas observaciones rápidas. La energía conducida se reduce claramente para valores grandes del calor de ablación. De manera semejante, la rapidez de material eliminado ρV_a depende del calor de ablación y decrece para valores superiores de H_{ab}. Para que esta solución tan sencilla sea aplicable, el espesor total de la lámina δ deberá ser grande comparado con la profundidad de penetración por el proceso de fundición. En términos de los parámetros anteriores esto quiere decir que

$$\delta \gg V_a\tau$$

El lector deberá comprender que el análisis precedente presenta serias fallas. No toma en cuenta la naturaleza transiente del flujo de calor incidente, ni muchas de las complicaciones involucradas en el proceso de transferencia de masa fundida que ocurre en la superficie. Dorrance [12] ha estudiado algunos de estos problemas.

12-6 El tubo calefactor

Hemos visto que uno de los objetivos del análisis de transferencia de calor puede ser el diseño de cambiadores de calor para la' transferencia de energía de un lugar a otro. Entre más pequeño y compacto sea el cambiador, mejor será el diseño. El tubo calefactor es un dispositivo novedoso que permite la transferencia de cantidades sustanciales de calor a través de áreas de superficie pequeñas. La configuración básica de este dispositivo se muestra en la Fig. 12-19. Es un tubo circular con una capa de material absorbente que recubre su superficie interior, tal como se ve en la figura y que deja libre un canal en el centro del tubo. Este contiene también un líquido condensable. El

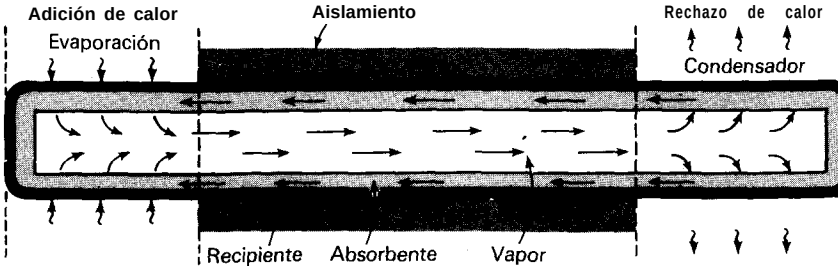


Fig. 12-19 Configuración básica de un tubo calefactor.

cual penetra al material absorbente por capilaridad. Cuando se añade calor a uno de los extremos del tubo (el evaporador), el líquido del material absorbente se evapora y el vapor se mueve hacia el canal libre del tubo. En el otro extremo se elimina el calor (el condensador), y el vapor vuelve a condensarse en el material absorbente. El abastecimiento de líquido se realiza en la sección del evaporador por capilaridad.

En la elaboración de los tubos calefactores se ha empleado una gran variedad de fluidos y de materiales para tubería. La Tabla 12-2 presenta un resumen de algunas de sus características de operación. Se obtienen flujos de calor muy altos y por esta razón se están realizando grandes esfuerzos en la investigación a fin de optimizar los diseños del material absorbente, encontrar nuevas configuraciones para aplicaciones especializadas, etc. Cotter y cols [16, 17], presentan dos de los primeros análisis teóricos sobre tubos calefactores, pero el dispositivo se encuentra en un estado de desarrollo tan rápido que se deberá consultar literatura de investigación actual a fin de obtener la información más reciente. Nuestro principal interés se encuentra en las aplicaciones del dispositivo.

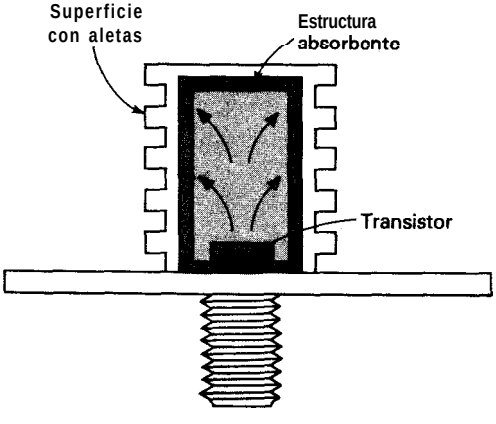
Los problemas de enfriamiento en circuitos microeléctricos son particularmente críticos ya que se deberá disipar la generación de calor de superficies con áreas muy pequeñas, y el funcionamiento de los dispositivos electrónicos depende fuertemente de la temperatura. El concepto de tubo calefactor ofrece una forma conveniente para la transferencia de calor de áreas pequeñas a grandes desde donde podrá disiparse con mayor facilidad. Una de las formas de hacerlo se muestra en la fig. 12-20. Claro está que la superficie de disipación con aletas podría enfriarse por medio de agua, si así se requiriese. La ventaja del tubo calefactor en el enfriamiento en aplicaciones electrónicas reside en su funcionamiento casi isotérmico independiente del flujo de calor, dentro del alcance operacional de la unidad.

El diseño básico de un tubo calefactor puede modificarse para que opere como un dispositivo para el control de la temperatura, tal como se muestra en la Fig. 12-21. En el extremo de eliminación de calor del tubo calefactor se conecta un depósito que contenga gas no condensable. Este gas puede formar entonces una interfase con el vapor y "frustrar" parte de la condensación al absorbente. Con el aumento de calor, se genera más vapor con mayor presión de vapor y el gas no condensable se fuerza de regreso al depósito, abriendo así un área adicional de condensador para eliminar el calor adicional. Cuando hay una reducción de calor, se observa la operación opuesta. Si la temperatura de la fuente de calor cae por debajo de un cierto valor mínimo, dependiendo

Tabla 12-2 Algunas características de operación típicas de los tubos calefactores, de acuerdo con la Ref. 15

Intervalo de Temperatura °C	*Fluido de operación*	*Material del recipiente*	*Flujo de calor axial † medido,* kW/cm²	*Flujo de calor superficial medido* W/cm²
-200 a −80	Nitrógeno líquido	Acero inoxidable	0.067 @ -163 °C	1.01 @ -163 °C
-70 a +60	Amoníaco líquido	Nfquel. aluminio, acero inox.	0.295	2.95
-45 a +120	Metanol	Cobre. nlquel Acero inoxidable	0.45 @ 100 °C‡	75.5 @ 100 °C
+5 a +230	Agua	Cobre. níquel	0.67 @ 200 °C	146 @ 170 °C
+190 a +550	Mercurio§ +0.02% Mágnesio +0.001%	Acero inoxidable	25.1 @ 360 °C¶	181 @ 360 °C
+400 a +800	Potasio§	Nfquel, acero inoxidable	5.6 @ 750 °C	181 @ 750 °C
+500 a +900	Sodio§	Nfquel , acero inoxidable	9.3 @ 850 °C	224 @ 760 °C
+900 a +1500	Litio§	Niobio + 1% zirconio	2.0 @ 1250 °C	207 @ 1250 °C
1500 a +2000	Plata§	Tantalio + 5% tungesteno	4.1	413

† Varía con la temperatura.
‡ Utilizando absorbente trenzado
§ Probando en los Alamos Scientific Laboratory
¶ Valor de medición obtenido al alcanzar el límite sónico del mercurio en el tubo calefactor



Fíg. 12-20 Aplicación del principio de tubo calefactor al enfriamiento de un transistor de potencia, de acuerdo con la Ref. 15.

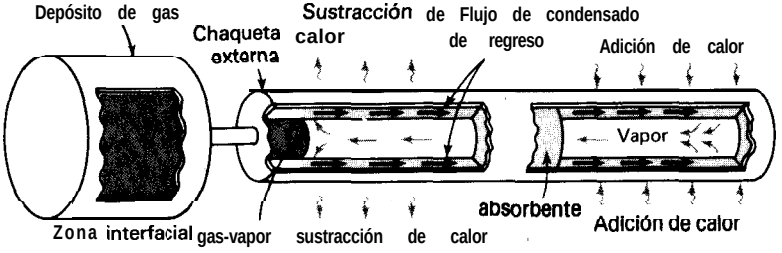


Fig. 12-21 Tubo calefactor combinado con depósito de gas no condensable para dar un dispositivo de control de temperatura, de la Ref. 14.

de la combinación de fluido específico y gas en el tubo calefactor, puede ocurrir corte total. Así la característica de control puede ser particularmente útil para aplicaciones en calentamientos rápidos, además de su valía como nivelador de temperatura para condiciones de carga variable.

Los tubos calefactores *son* **sumamente útiles en equipos de conservación de energía. Un ejemplo se muestra en la Fig. 12-22, en donde se usan gases de escape calientes para operar una caldera de recuperación de calor sobrante. Los gases calientes que provienen de un proceso de combustión y que de otra manera se descargarían en la atmósfera, pasan transversalmente a un extremo de un tubo calefactor con aletas. El otro extremo está sumergido en el agua de una caldera. En la Fig. 12-23 se muestra el esquema de una unidad comercial en donde se puede apreciar que los tubos calefactores están inclinados para mantener un flujo adecuado de líquido y vapor.**

El diseño de tubos calefactores comerciales depende de muchos factores y se trata en detalle en las Refs. 19 y 20.

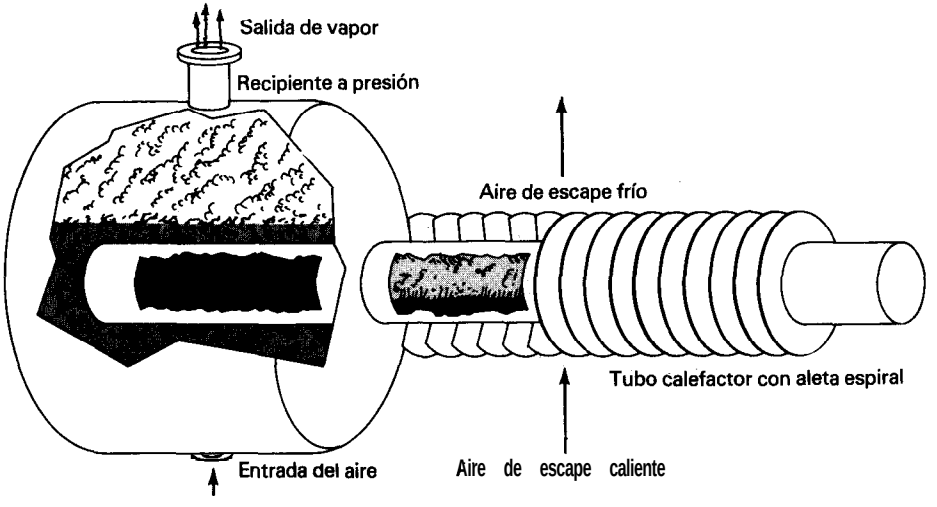


Fig. **12-22** Uso de tubos calefactores para operar calderas de recuperación de calor sobrante. (Cortesía Dr. M. A. Ruch, Q-dot Corporation, Dallas, Texas.)

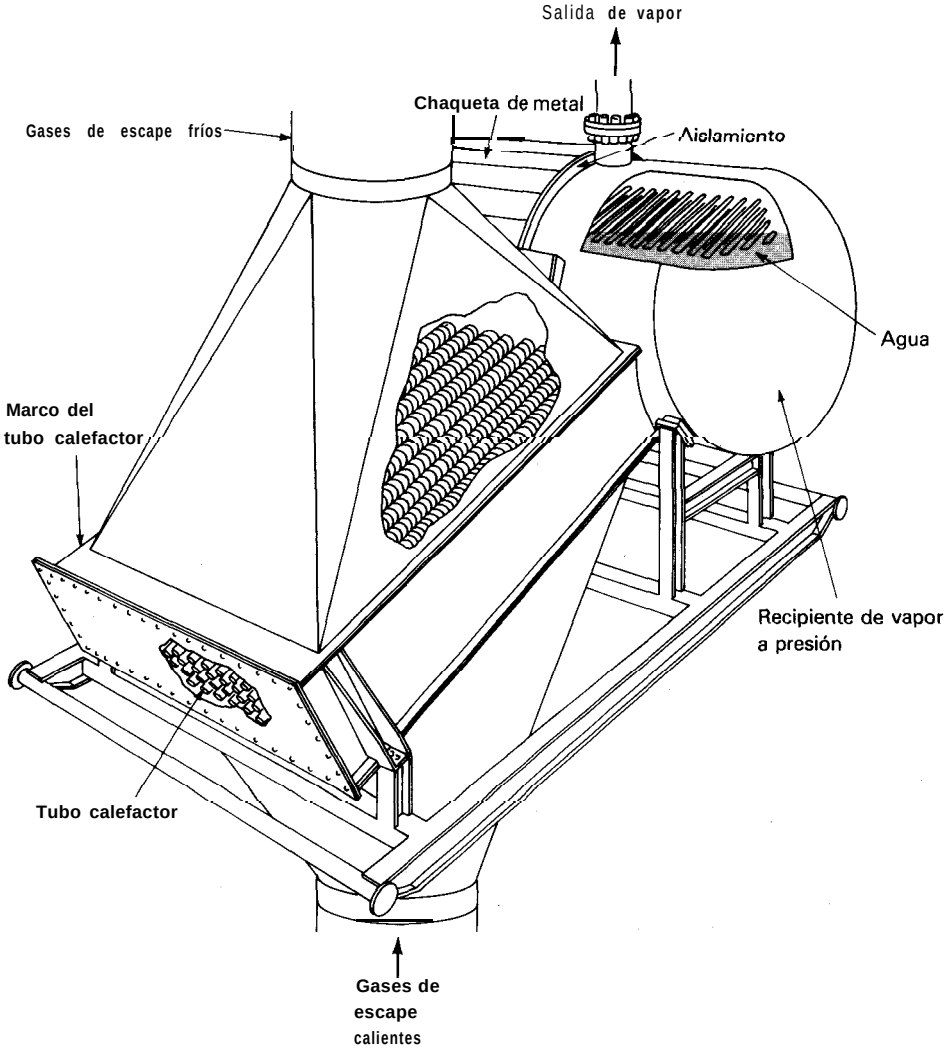


Fig. 12-23 Esquema de una caldera de recuperación de calor sobrante con tubos calefactores (Cortesía Dr. M. A. Ruch, Q-dot Corporation, Dallas, Texas.)

Ejemplo 12-4

Compare el flujo de calor axil en un tubo calefactor que usa agua como fluido de trabajo a 200 °C, con el de una barra sólida de cobre de 8 cm de largo con un diferencial de temperatura de 100 °C.

Solución

Para la barra de cobre el flujo de calor es

$$q'' = \frac{q}{A} = -k \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

La conductividad térmica del cobre es 374 $W/m \cdot °C$, de modo que

$$q'' = -\frac{(374)(-100)}{0.08} = 467.5 \text{ kW/m}^2 = 0.04675 \text{ kW/cm}^2$$

De la Tabla 12-2, el flujo de calor axil típico para un tubo calefactor de agua es

$$q''_{axil} = 0.67 \text{ kW/cm}^2 \ [2.12 \times 10^6 \text{ Btu/h} \cdot \text{pie}^2]$$

Así, este tubo calefactor transfiere más de 10 veces el calor de una barra de cobre puro con un gradiente sustancial de temperatura. Este ejemplo ilustra por qué el tubo calefactor presenta amplias posibilidades de aplicación.

Preguntas de repaso

1. ¿Bajo qué condiciones un campo magnético provocará un aumento en la transferencia de calor cuando se aplica a un fluido conductor? ¿Una disminución en transferencia de calor?
2. ¿En qué difieren las condiciones de frontera para enfriamiento por transpiración de aquellas para flujo ordinario sobre una placa plana?
3. ¿Cómo se hace la distinción en un sentido físico entre flujos de un continuo, deslizamiento y molecular libre?
4. ¿Qué es el número de Knudsen?
5. ¿Qué es el coeficiente de ajuste?
6. ¿Qué significa temperatura de equilibrio radiactivo?
7. ¿Cómo se usa la ablación para enfriamiento en alta velocidad?
8. ¿Qué es un tubo calefactor? ¿Cómo funciona?
9. ¿Por qué es tan útil el tubo calefactor?
10. Describa cómo puede usarse un tubo calefactor como dispositivo de control de temperatura.

Problemas

12-1 Sobre una placa plana fluye aire a -40 °C, 0.7 kN/m^2 y $M = 4.0$. Calcule la temperatura de pared adiabática para un parámetro de inyección de 0.1 y en una posición en la que $Re_x = 10^5$.

12-2 Calcule la rapidez de transferencia de calor q/A para las condiciones del Prob. 12-l. Compare esto con lo que se obtendría sin inyección.

12-3 Un flujo de aire a 540 °C y 1 atm incide sobre el lado frontal de un cilindro poroso horizontal de 7.5 cm de diámetro, a una velocidad de 600 m/s. Se inyecta aire a través del material poroso para mantener la temperatura de superficie a 150 °C. Calcule la rapidez de transferencia de calor a una distancia de 0.75 cm del punto de estancamiento y con un parámetro de inyección de 0.5.

12-4 Derive una expresión para la proporción del calor conducido a través de una capa de aire de baja densidad, al calor conducido para $\lambda = 0$. Trace esta razón versus λ/L para $\alpha = 0.9$ y las propiedades del aire evaluadas a 35 °C.

12-5 Desarrolle una expresión similar a la Ec. 12-53 para conducción de baja densidad entre superficies cilíndricas concéntricas.

12-6 Un alambre fino de hierro de 0.025 mm de diámetro se expone a una corriente de aire de alta velocidad a 10^{-6} atm, -50 °C y $M = 5$. Estime la temperatura de superficie del alambre, suponiendo $\epsilon = 0.4$ ya $= 0.9$. Suponga que la temperatura de radiación de los alrededores es la temperatura de corriente libre.

12-7 Suponga que el alambre del Prob. 12-6 se emplea como un termómetro de resistencia para detectar la temperatura de corriente libre para las condiciones de flujo enunciadas. Trace la temperatura indicada por el alambre versus la temperatura de corriente libre real para el intervalo -85 a -15 °C.

12-8 Se va-a construir un material superaislante con hojas de aluminio pulidas separadas por una distancia de 0.8 mm. El espacio entre las hojas está sellado y evacuado a una presión de 10^{-5} atm. Se usaron cuatro hojas. Las dos hojas exteriores se mantienen a 35 y 90 °C y tienen un espesor de 0.75 mm, mientras que las hojas interiores tienen un espesor de 0.18 mm. Calcule la transferencia por conducción y radiación a través de la Sección laminada, por unidad de área. Para este cálculo, haga que las hojas interiores "floten" en la determinación de la transferencia de calor por radiación. Evalúe las propiedades a 65 "C,

12-9 Fluye aire sobre una placa plana, a $p = 10^{-10}$ atm y $T_\infty = -60$ °C. La velocidad corresponde a $M = 5.0$ y la placa es cuadrada, con 30 cm por lado. Calcule la temperatura de radiación en equilibrio para un coeficiente de ajuste de 0.88 y emisividades de superficie de 0.3 y 0.8. Suponga que la temperatura de radiación de los alrededores es -70 "C.

12-10 ¿Qué rapidez de enfriamiento sería necesaria para mantener la placa del Prob. 12-9 a una temperatura de superficie de 65 °C?

12-11 Dos placas pulidas grandes están separadas por una distancia dé 1.3 mm y el espacio entre ellas se evacua a una presión de 10^{-5} atm. Las propiedades de superficie de las placas son $\alpha_1 = 0.87$, $\epsilon_1 = 0.08$, $\alpha_2 = 0.95$, $\epsilon_2 = 0.23$, donde a es el coeficiente de ajuste. Las temperaturas de las placas son $T_1 = 70$ °C y $T_2 = 4$ °C. Calcule la transferencia de calor total entre las placas por conducción y radiación a baja densidad.

12-12 ¿Qué área de sección transversal de un tubo calefactor de aluminio-amoniaco líquido se requiere para manejar una carga calorífica de 200 000 Btu/h?

12-13 Una placa calentada se coloca en un fluido conductor eléctrico que se mueve a alta velocidad, de tal modo que el número de Eckert es unitario. Se impone al flujo un campo magnético de intensidad suficiente para duplicar en espesor la capa limite hidrodinámica. Estime el porcentaje de reducción o incremento en la rapidez de transferencia de calor como resultado de agregar el campo magnético.

12-14 Calcule la velocidad de inyección para el Prob. 12-1 a Re, $= 10^5$.

Referencias

1 Romig, M.: The Influence of Electric and Magnetic Fields on Heat Transfer to Electrically Conducting Fluids, *Adu. Heat Transfer,* vol. 1, pp. 268–352, 1964

2 Sutton, G. W., and A. Sherman: "Engineering Magnetohydrodynamics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

3 Eckert, E. R. G., and J. P. Hartnett: Mass Transfer Cooling in a Laminar Boundary Layer with Constant Fluid Properties, *Trans. ASME,* vol. 79, pp. 247-254, 1957.

4 Sziklas, E. A.: An Analysis of the Compressible Laminar Boundary Layer with Foreign Gas Injection, *United Aircmft Corp. Res. Dept. Rep.* SR-0539-8, 1956.

5 Leontev, A. I.: Heat and Mass Transfer in Turbulent Boundary Layers, *Adv. Heat Transfer,* vol. 3, 1966.

6 Leadon, B. M., and C. J. Scott: Transpiration Cooling Experiments in a Turbulent Boundary Layer at $M = 3.0$, *J. Aeron. Sci.*, vol. 23, pp. 798-799, 1956.

7 Eckert, E. R. G., et al.: Mass Transfer Cooling of a Laminar Boundary Layer by Injection of a Light Weight Foreign Gas, *Jet Propulsion*, vol. 28, pp. 34-39, 1958.

8 Oppenheim, A. K.: Generalized Theory of Convective Heat Transfer in a Free-Molecule Flow, *J. Aeron. Sci.*, vol. 20, p. 49, 1953.

9 Wachman, H. Y.: The Thermal Accommodation Coefficient: A Critica1 Survey, *ARS J.*, vol. 32, p. 2, 1962.

10 Weidmann, M. L., and P. R. Trumpler: Thermal Accommodation Coefficients, *Trans. ASME*, vol. 68, p. 57, 1946.

11 Devienne, F. M.: Low Density Heat Transfer, *Adv. Heat Transfer*, vol. 2, p. 271, 1965.

12 Dorrance, W. H.: "Viscous Hypersonic Flow," McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

13 Springer, G. S.: Heat Transfer in Rarefied Gases: A Survey, Univ. Mich., *Fluid Dyn. Lab. Publ.* 69-1, May, 1969

14 Feldman, K. T., and G. H. Whiting: Applications of the Heat Pipe, *Mech. Eng.*, vol. 90, p. 48, November 1968.

15 Dutcher, C. H., and M. R. Burke: Heat Pipes: A Cool Way of Cool Circuits, *Electronics*, pp. 93-100, February 16, 1970.

16 Grover, G. M., and T. P. Cotter, and G. F. Erikson: Structures of Very High Thermal Conductance, *J. Appl. Phys.*, vol. 35, p. 1990, 1964.

17 Cotter, T. P.: Theory of Heat Pipes, *Los Alarnos Sci. Lab. Rept.* La-3246-MS, February 1965.

16 Basiulis, A., and T. A. Hummel: The Application of Heat Pipe Techniques to Electronic Component Cooling *ASME Pap.* 72-WA/HT-42.

19 Tien, C. L.: Fluid Mechanics of Heat Pipes, *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, vol. 7, p. 167, 1975.

20 Chi, S. W.: "Heat Pipe Theory and Practice," Hemisphere Publishing Co., New York, 1976.

Apéndice A

Tablas

Tabla A-I **La función de error**

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{fer}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0.00	0.00000	0.76	0.71754	1.52	0.96841
0.02	0.02256	0.78	0.73001	1.54	0.97059
0.04	0.04511	0.80	0.74210	1.56	0.97263
0.06	0.06762	0.82	0.75381	1.58	0.97455
0.08	0.09008	0.84	0.76514	1.60	0.97636
0.10	0.11246	0.86	0.77610	1.62	0.97804
0.12	0.13476	0.88	0.78669	1.64	0.97962
0.14	0.15695	0.90	0.79691	1.66	0.98110
0.16	0.17901	0.92	0.80677	1.68	0.98249
0.18	0.20094	0.94	0.81627	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.96	0.82542	1.72	0.98500
0.22	0.24430	0.98	0.83423	1.74	0.98613
0.24	0.26570	1.00	0.84270	1.76	0.98719
0.26	0.28690	1.02.	0.85084	1.78	0.98817
0.28	0.30788	1.04	0.85865	1.80	0.98909
0.30	0.32863	1.06	0.86614	1.82	0.98994
0.32	0.34913	1.08	0.87333	1.84	0.99074
0.34	0.36936	1.10	0.88020	1.86	0.99147
0.36	0.38933	1.12	0.88079	1.88	0.99216
0.38	0.40901	1.14	0.89308	1.90	0.99279
0.40	0.42839	1.16	0.89910	1.92	0.99338
0.42	0.44749	1.18	0.90484	1.94	0.99392
0.44	0.46622	1.20	0.91031	1.96	0.99443
0.46	0.48466	1.22	0.91553	1.98	0.99489
0.48	0.50275	1.24	0.92050	2.00	0.995322
0.50	0.52050	1.26	0.92524	2.10	0.997020
0.52	0.53790	1.28	0.92973	2.20	0.998137
0.54	0.55494	1.30	0.93401	2.30	0.998857
0.56	0.57162	1.32	0.93806	2.40	0.999311
0.58	0.58792	1.34	0.94191	2.50	0.999593
0.60	0.60386	1.36	0.94556	2.60	0.999764
0.62	0.61941	1.38	0.94902	2.70	0.999866
0.64	0.63459	1.40	0.95228	2.80	0.999925
0.66	0.64938	1.42	6.95538	2.90	0.999959
0.68	0.66278	1.44	0.95830	3.00	0.999978
0.70	0.67780	1.46	0.96105	3.20	0.999994
0.72	0.69143	1.48	0.96365	3.40	0.999998
0.74	0.70468	1.50	0.96610	3.60	1.000000

Tabla A-2 Valores de propiedades para metales*

Metal	Propiedades a 20 °C: ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	k, W/m·°C	α, m²/s x 10^5	Conductividad térmica k W/m. °C: −100 °C −148°F	0°C 32°F	100 °C 212 °F	200 °C 392 °F	300 °C 572 °F	400 °C 752°F	600 °C 1112 °F	800 °C 1472 °F	1000 °C 1832 °F	1200 °C 2192°F
Aluminio:														
PUTO	2 707	0.896	204	8.418	215	202	206	215	226	249				
Al-Cu (Duraluminio), 94-96% Al, 3–5% Cu, con impurezas Mg	2 787	0.886	164	6.676	126	159	182	194						
Ali-Si (Siluminio) contiene cobre 86.5% Al, 1% Cu	2 659	0.867	137	5.933	119	137	144	162	161					
Al-Si (Alusil), 78–80% Al, 20–22% Si	2 627	0.854	161	7.172	144	157	168	175	178					
Al-Mg-Si, 97% Al, 1% Mg, 1% Si, 1% Mn	2 707	0.892	177	7.311		175	189	204						
Plomo	11373	0.130	35	2,343	36.9	35.1	33.4	31.5	29.8					
Hierro;														
Puro	7 897'	0.452	73	2.034	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
Hierro forjado, 0.5% C	7 849	0.46	59	1.626		59	57	52	48	45	36	33	33	33
Acero (C max ≈ 1.5%):														
Acero al carbón														
c ≈ 0.5%	7 833	0.465	54	1.474		55	52	48	45	42	35	31	29	31
1.0%	7 801	0.473	43	1.172		43	43	42	40	36	33	29	28	29
1.5%	7 753	0.486	36	0.970		36	36	36	35	33	31	28	28	29
Acero al nfquel														
Ni= 0%	7 897	0.452	73	2.026										
20%	7 933	0.46	19	0.526										

Tabla A-2 (Continuación)

	Propiedades 20 °C				Conductividad térmica k, W/m. °C									
Metal	ρ, kg/m³	c_p, kJ/ kg·°C	k, W/ m·°C	α, m²/s × 10^5	-100°C −148 °F	0 °C 32 °F	100 °C 212 °F	200 °C 392 °F	300 °C 572 °F	400 °C 752 °F	600 °C 1112 °F	800 °C 1472 °F	1000 °C 1832 °F	1200 °C 2192 °F
40%	8 169	0.46	10	0.279										
80%	8 618	0.46	35	0.872										
Invar 36% Ni	8 137	0.46	10.7	0.286										
Acero al cromo														
Cr = 0%	7 897	0.452	73	2.026	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
1%	7 865	0.46	61	1.665		62	55	52	47	42	36	33	33	
5%	7 833	0.46	40	1.110		40	38	36	36	33	29	29	29	
20%	7 689	0.46	22	0.635		22	22	22	22	24	24	26	29	
Cr-Ni (cromo níquel): 15% Cr,														
10% Ni	7 865	0.46	19	0.527										
18% Cr, 8% Ni														
(V2A)	7 817	0.46	16.3	0.444		16.3	17	17	19	19	22	27	31	
20% Cr, 15% Ni	7 833	0.46	15.1	0.415										
25% Cr, 20% Ni	7 865	0.46	-12.8	0.361										
Acero de Tungsteno														
w = 0%	7 897	0.452	73	2.026										
1%	7 913	0.448	66	1.858										
5%	8 073	0.435	54	1.525										
10%	8314	0.419	48	1.391										
Cobre:														
Puro	8 954	0.3831	386	11.234	407	386	379	374	369	363	353			
Bronce alumínico														
95% Cu, 5% Al	8 666	0.410	83	2.330										

Bronce 75% Cu, 25% Sn	8666	0.343	26	0.859										
Bronce rojo 85% Cu, 9% Sn, 6% Zn	8 714	0.385	61	1.804		59	71							
Latón 70% Cu, 30% Zn	8 522	0.385	111	3.412	88		128	144	147	147				
Alpaca 62% Cu, 15% Ni, 22% Zn	8 618	0.394	24.9	0.733	19.2		31	40	45	48				
Constantan 60% Cu, 40% Ni	8 922	0.410	22.7	0.612	21		22.2	26						
Magnesio: Puro	1,746	1.013	171	9.708	178	171	168	163	157					
Mg-Al (electrolítico) 6–8% Al, 1–2% Zn	1810	1.00	66	3.605		52	62	74	83					
Molibdeno	10 220	0.251	123	4.790	138	125	118	114	111	109	106	102	99	92
Níquel: Puro (99.9%)	8 906	0.4459	90	2.266	104	93	83	73	64	59				
Ni-Cr 90% Ni, 10% Cr	8.666	0.444	17	0.444		17.1	18.9	20.9	22.8	24.6				
80% Ni, 20% Cr	8314	0.444	12.6	0.343		12.3	13.8	15.6	17.1	18.0	22.5			
Plata: Alta pureza	10 524	0.2340	419	17.004	419	417	415	412						
Pura (99.9%)	10 525	0.2340	407	16.563	419	410	415	374	362	360				
Estaño, puro	7 304	0.2265	64	3.884	74	65.9	59	57						
Tungsteno	19 350	0.1344	163	6.271		166	151	142	133	126	112	76		
Zinc, puro	7 144	0.3843	112.2	4.106	114	112	109	106	100	93				

* Adaptada a unidades SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," 2da. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Tabla A-3 Propiedades de no metales*

Sustancia	Temperatura, °C	k, W/m·°C	ρ, kg/m³	c, kJ/kg·°C	α, m²/s × 10⁷
Materiales extructurales y resistentes al calor					
Asfalto	20-55	0.74-0.76			
Ladrillo:					
Ladrillo de construcción común	20	0.69	1600	0.84	5.2
De cara		1.32	2000		
Ladrillo de carborundum	600	18.5			
	1400	11.1			
Ladrillo de cromo	200	2.32	3000	0.84	9.2
	550	2.47			9.8
	900	1.99			7.9
Tierra de diatomeas, moldeado y cocido	200	0.24			
	870	0.31			
Ladrillo refractario cocido a 2426 °F	500	1.04	2000	0.96	5.4
	800	1.07			
	1100	1.09			
cocido a 2642 °F	500	1.28	2300	0.96	5.8
	800	1.37			
	1100	1.40			
Missouri	200	1.00	2600	0.96	4.0
	600	1.47			
	1400	1.77			
Magnesita	200	3.81		1.13	
	650	2.77			
	1200	1.90			
Cemento portland		0.29	1500		
Mortero	23	1.16			
Concreto con escoria	23	0.76			
Bloque con mezcla 1-2-4	20	1.37	1900-2300	0.88	8.2-6.8
Vidrio de ventana	20	0.78 (avg)	2700	0.84	3.4
Borosilicato	30-75	1.09	2200		
Yeso	20	0.48	1440	0.84	4.0
Perfil metálico	20	0.47			
Perfil de madera	20	0.28			
Piedra,:					
Granito		1.73-3.98	2640	0.82	8-18
Piedra caliza	100-300	1.26-1.33	2500	0.90	5.6-5.9
Mármol		2.07-2.94	2500-2700	0.80	10-13.6
Arenisca	40	1.83	2160-2300	0.71	11.2-11.9
Madera (transversal al grano)					
Balsa, 8.8 lb/pie³	30	0.055	140		
Ciprés	30	0.097	460		
Abeto	23	0.11	426	2.72	0.96
Arce	30	0.166	540	2.4	1.28
Pino amarillo	23	0.147	640	2.8	0.82
Pino blanco	30	0.112	430		

Tabla A-3 (Continuación)

Sustancia	*Temperatura* °C	*k*, W/m °C	*ρ*, kg/m³	*c*, kJ/kg·°C	*α*, m²/s x 10⁶
Material aislante					
Asbesto:					
Baja densidad	-45	0.149			
	0	0.154	470-570	0.816	3.3-4
	100	0.161			
Tableros de asbesto cemento	20	0.74			
Hojas	51	0.166			
Filtro, 40 capas/plg	38	0.057			
	150	0.069			
	260	0.083			
20 capas/plg	38	0.078			
	150	0.095			
	260	0.112			
Corrugado, 4 pliegues/plg	38	0.087			
	93	0.100			
	150	0.119			
Asbesto cemento	—	2.08			
Balsamina, 2.2 lb/pie³	32	0.04	35		
Cartón corrugado	—	0.064			
Cartón de bagazo(celotex)	32	0.048			
Corcho, 10 lb/pie³	30	0.043	160		
Corcho granulado	32	0.045	45-120	1.88	2-5.3
Molido	32	0.043	150		
Tierra de diatomeas (Sil-o-cel)	0	0.061	320		
Fieltro, filamentos	30	0.036	130-200		
Lana	30	0.052	330		
Tablero aislante de fibra	20	0.048	240		
Lana de vidrio, 1.5 lb/pie³	23	0.038	24	0.7	22.6
Insulex, seco	32	0.064			
		0.144			
Capoca	30	0.035			
Magnesio, 85%	38	0.067	270		
	93	0.071			
	150	0.074			
	204	0.080			
Lana mineral, 10 lb/pie³	32	0.040	160		
Baja densidad	150	0.067	64		
	260	0.087			
Aserrín	23	0.059			
Sílica aerogel	32	0.024	140		
Virutas de madera	23	0.059			

* Adaptado a unidades SI de. I. Brown y S. M. Marco, "Introduction to Heat Transfer," 3a. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Tabla A-4 Propiedades de líquidos saturados

T, °C	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	ν, m²/s	k, W/m·°C	α, m²/s	Pr	β, K⁻¹
			Amoníaco, NH,				
-50	703.69	4.463	0.435×10^{-6}	0.547	1.742×10^{-7}	2.60	
-40	691.68	4.467	0.406	0.547	1.775	2.28	
-30	679.34	4.476	0.387	0.549	1.801	2.15	
-20	666.69	4.509	0.381	0.547	1.819	2.09	
-10	653.55	4.564	0.378	0.543	1.825	2.07	
0	640.10	4.635	0.373	0.540	1.819	2.05	
10	626.16	4.714	0.368	0.531	1.801	2.04	
20	611.75	4.798	0.359	0.521	1.775	2.02	2.45×10^{-3}
30	596.37	4.890	0.349	0.507	1.742	2.01	
40	580.99	4.999	0.340	0.493	1.701	2.00	
50	564.33	5.116	0.330	0.476	1.654	1.99	
			Bióxido de carbono. CO,				
-50	1 156.34	1.84	0.119×10^{-6}	0.0855	0.4021×10^{-7}	2.96	
-40	1 117.77	1.88	0.118	0.1011	0.4810	2.46	
-30	1076.76	1.97	0.117	0.1116	0.5272	2.22	
-20	1032.39	2.05	0.115	0.1151	0.5445	2.12	
-10	983.38	2.18	0.113	0.1099	0.5133	2.20	
0	926.99	2.47	0.108	0.1045	0.4578	2.38	
10	860.03	3.14	0.101	0.0971	0.3608	2.80	
20	772.57	5.0	0.091	0.0872	0.2219	4.10	14.00×10^{-3}
30	597.81	36.4	0.080	0.0703	0.0279	28.7	
			Bióxido de azufre, SO_2				
-50	1 560.84	1.3595	0.484×10^{-6}	0.242	1.141×10^{-7}	4.24	
-40	1 536.81	1.3607	0.424	0.235	1.130	3.74	
-30	1 520.64	1.3616	0.371	0.230	1.117	3.31	
-20	1 488.60	1.3624	0.324	0.225	1.107	2.93	
-10	1 463.61	1.3628	0.288	0.218	1.097	2.62	
0	1 438.46	1.3636	0.257	0.211	1.081	2.38	
10	1412.51	1.3645	0.232	0.204	1.066	2.18	
20	1386.40	1.3653	0.210	0.199	1.050	2.00	1.94×10^{-3}
30	1359.33	1.3662	0.190	0.192	1.035	1.83	
40	1329.22	1.3674	0.173	0.185	1.019	1.70	
50	1 299.10	1.3683	0.162	0.177	0.999	1.61	
			Diclorodifluorometano (Freón), CCl_2F_2				
-50	1 546.75	0.8750	0.310×10^{-6}	0.067	0.501×10^{-7}	6.2	2.63×10^{-3}
-40	1518.71	0.8847	0.279	0.069	0.514	5.4	
-30	1 489.56	0.8956	0.253	0.069	0.526	4.8	
-20	1460.57	0.9073	0.235	0.071	0.539	4.4	
-10	1 429.49	0.9203	0.221	0.073	0.550	4.0	
0	1 397.45	0.9345	0.214×10^{-6}	0.073	0.557×10^{-7}	3.8	
10	1 364.30	0.9496	0.203	0.073	0.560	3.6	
20	1.330.18	0.9659	0.198	0.073	0.560	3.5	
30	1295.10	0.9835	0.194	0.071	0.560	3.5	
40	1257.13	1.0019	0.191	0.069	0.555	3.5	
50	1215.96	1.0216	0.190	0.067	0.545	3.5	

Tabla A-4 (Continuación)

T, °C	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	ν, m²/s	k, W/m·°C	α, m²/s	Pr	β, K^{-1}
			Glicerina, $C_3H_5(OH)_3$				
0	1 276.03	2.261	0.00831	0.282	0.983×10^{-7}	84.7×10^3	
10	1270.11	2.319	0.00300	0.284	0.965	31.0	
20	1 264.02	2.386	0.00118	0.286	0.947	12.5	0.50×10^{-3}
30	1 258.09	2.445	0.00050	0.286	0.929	5.38	
40	1 252.01	2.512	0.00022	0.286	0.914	2.45	
50	1 244.96	2.583	0.00015	0.287	0.893	1.63	
			Etilenglicol, $C_2H_4(OH)_2$				
0	1 130.75	2.294	57.53×10^{-6}	0.242	0.934×10^{-7}	615	
20	1 116.65	2.382	19.18	0.249	0.939	204	0.65×10^{-3}
40	1 101.43	2.474	8.69	0.256	0.939	93	
60	1 087.66	2.562	4.75	0.260	0.932	51	
80	1077.56	2.650	2.98	0.261	0.921	32.4	
100	1 058.50	2.742	2.03	0.263	0.908	22.4	
			Aceite de motor (sinuso)				
0	899.12	1.796	0.00428	0.147	0.911×10^{-7}	47,100	
20	888.23	1.880	0 00090	0.145	0.872	10,400	0.70×10^{-3}
40	876.05	1.964	0.00024	0.144	0.834	2,870	
60	864.04	2.047	0.839×10^{-4}	0.140	0.800	1,050	
80	852.02	2.131	0.2 75	0.138	0.769	490	
100	840.01	2.219	0.203	0.137	0.738	276	
120	828.96	2.307	0.124	0.135	0.710	175	
140	816.94	2.395	0.080	0.133	0.686	116	
160	805.89	2.483	0.056	0.132	0.663	84	
			Mercurio, Hg				
0	13 628.22	0.1403	0.124×10^{-6}	8.20	42.99×10^7	0.0288	
20	13 579.04	0.1394	0.114	8.69	46.06	0.0249	1.82×10^{-4}
50	13 505.84	0.1386	0.104	9.40	50.22	0.0207	
100	13 384.58	0.1373	0.0928	10.51	57.16	0.0162	
150	13 264.28	0.1365	0.0853	11.49	63.54	0.0134	
200	13 144.94	0.1570	0.0802	12.34	69.08	0.0116	
250	13 025.60	0.1357	0.0765	13.07	74.06	0.0103	
315.5	12 847	0.134	0.0673	14.02	81.5	0.0083	

* Adaptado a unidades SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," Za. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Tabla A-5 **Propiedades del aire a presión atmosférica***

Los valores de μ, k, c_p, y Pr no dependen estrechamente de la presión y pueden usarse sobre un intervalo muy amplio de presiones.

T, K	ρ kg/m³	c_p, kJ/ kg·°C	μ, kg/m·s × 10^5	ν, m²/s x 10^6	k, W/ m·°C	α, m²/s x 10^4	Pr
100	3.6010	1.0266	0.6924	1.923	0.009246	0.02501	0.770
150	2.3675	1.0099	1.0283	4.343	0.013735	0.05745	0.753
200	1.7684	1.0061	1.3289	7.490	0.01809	0.10165	0.739
250	1.4128	1.0053	1.488	9.49	0.02227	0.13161	0.722
300	1.1774	1.0057	1.983	16.84	0.62624	0.22160	0.708
350	0.9980	1.0090	2.075	20.76	0.03003	0.2983	0.697
400	0.8826	1.0140	2.286	25.90	0.03365	0.3760	0.689
450	0.7833	1.0207	2.484	31.71	0.03707	0.4222	0.683
500	0.7048	1.0295	2.671	37.90	0.04038	0.5564	0.680
550	0.6423	1.0392	2.848	44.34	0.04360	0.6532	0.680
600	0.5879	1.0551	3.018	51.34	0.04659	0.7512	0.680
650	0.5430	1.0635	3.177	58.51	0.04953	0.8578	0.682
700	0.5030	1.0752	3.332	66.25	0.05230	0.9672	0.684
750	0.4709	1.0856	3.481	73.91	0.05509	1.0774	0.686
800	0.4405	1.0978	3.625	82.29	0.05779	1.1951	0.689
850	0.4149	1.1095	3.765	90.75	0.06028	1.3097	0.692
900	0.3925	1.1212	3.899	99.3	0.06279	1.4271	0.696
950	0.3716	1.1321	4.023	108.2	0.06525	1.5510	0.699
1000	0.3524	1.1417	4.152	117.8	0.06752	1.6779	0.702
1100	0.3204	1.160	4.44	138.6	0.0732	1.969	0.704
1200	0.2947	1.179	4.69	159.1	0.0782	2.251	0.707
1300	0.2707	1.197	4.93	182.1	0.0837	2.583	0.705
1400	0.2515	1.214	5.17	205.5	0.0891	2.920	0.705
1500	0.2355	1.230	5.40	229.1	0.0946	3.262	0.705
1600	0.2211	1.248	5.63	254.5	0.100	3.609	0.705
1700	0.2082	1.267	5.85	280.5	0.105	3.977	0.705
1800	0.1970	1.287	6.07	308.1	0.111	4.379	0.704
1900	0.1858	1.309	6.29	338.5	0.117	4.811	0.704
2000	0.1762	1.338	6.50	369.0	0.124	5.260	0.702
2100	0.1682	1.372	6.72	399.6	0.131	5.715	0.700
2200	0.1602	1.419	6.93	432.6	0.139	6.120	0.707
2300	0.1538	1.482	7.14	464.0	0.149	6.540	0.710
2400	0.1458	1.574	7.35	504.0	0.161	7.020	0.718
2500	0.1394	1.688	7.57	543.5	0.175	7.441	0.730

* De *Natl. Bur. Stand. (U.S.) Circ. 564,* 1955.

Tabla A-6 Propiedades de gases a presión atmosférica*
Los valores de μ, k, c_p, y Pr no dependen estrechamente de la presión para He, H_2, O_2 y N_2 y pueden usarse sobre un intervalo muy amplio de presiones.

T, K	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	μ, kg/m·s	ν, m²/s	k, W/m·°C	α, m²/s	Pr
			Helio				
144	0.3379	5.200	125.5×10^{7}	37.11×10^{-6}	0.0928	0.5275×10^{-4}	0.70
200	0.2435	5.200	156.6	64.38	0.1177	0.9288	0.694
255	0.1906	5.200	181.7	95.50	0.1357	1.3675	0.70
366	0.13280	5.200	230.5	173.6	0.1691	2.449	0.71
477	0.10204	5.200	275.0	269.3	0.197	3.716	0.72
589	0.08282	5.200	311.3	375.8	0.225	5.215	0.72
700	0.07032	5.200	347.5	494.2	0.251	6.661	0.72
800	0.06023	5.200	381.7	634.1	0.275	8.774	0.72
			Hidrógeno				
150	0.16371	12.602	5.595×10^{-6}	34.18×10^{-6}	0.0981	0.475×10^{-4}	0.718
200	0.12270	13.540	6.813	55.53	0.1282	0.772	0.719
250	0.09819	14.059	7.919	80.64	0.1561	1.130	0.713
300	0.08185	14.314	8.963	109.5	0.182	1.554	0.706
350	0.07016	14.436	9.954	141.9	0.206	2.031	0.697
400	0.06135	14.491	10.864	177.1	0.228	2.568	0.690
450	0.05462	14.499	11.779	215.6	0.251	3.164	0.682
500	0.04918	14.507	12.636	257.0	0.272	3.817	0.675
550	0.04469	14.532	13.475	301.6	0.292	4.516	0.668
600	0.04085	14.537	14.285	349.7	0.315	5.306	0.664
700	0.03492	14.574	15.89	455.1	0.351	6.903	0.659
800	0.03060	14.675	17.40	569	0.384	8.563	0.664
900	0.02723	14.821	18.78	690	0.412	10.217	0.676
			Oxígeno				
150	2.6190	0.9178	11.490×10^{-6}	4.387×10^{-6}	0.01367	0.05688×10^{-4}	0.773
200	1.9.559	0.9131	14.850	7.593	0.01824	0.10214	0.745
250	1.5618	0.9157	17.87	11.45	0.0'2259	0.15794	0.725
300	1.3007	0.9203	20.63	15.86	0.02676	0.22353	0.709
350	1.1133	0.9291	23.16	20.80	0.03070	0.2968	0.702
400	0.9755	0.9420	25.54	26.18	0.03461	0.3768	0.695
450	0.8682	0.9567	27.77	31.99	0.03828	0.4609	0.694
500	0.7801	0.9722	29.91	38.34	0.04173	0.5502	0.697
550	0.7096	0.9881	31.97	45.05	0.04517	0.641	0.700
			Nitrógeno				
200	1.7108	1.0429	12.947×10^{-6}	7.568×10^{-6}	0.01824	0.10224×10^{-4}	0.747
300	1.1421	1.0408	17.84	15.63	0.02620	0.22044	0.713
400	0.8538	1.0459	21.98	25.74	0.03335	0.3734	0.691
500	0.6824	1.0555	25.70	37.66	0.03984	0.5530	0.684
600	0.5687	1.0756	29.11	51.19	0.04580	0.7486	0.686
700	0.4934	1.0969	32.13	65.13	0.05123	0.9466	0.691
800	0.4277	1.1225	34.84	81.46	0.05609	1.1685	0.700
900	0.3796	1.1464	37.49	91.06	0.06070	1.3946	0.711
1000	0.3412	1.1677	40.00	117.2	0.06475	1.6250	0.724
1100	0.3108	1.1857	42.28	136.0	0.06850	1.8591	0.736
1200	0.2851	1.2037	44.50	156.1	0.07184	2.0932	0.748

Tabla A-6 (Continuación)

T, K	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	μ, kg/m·s	ν, m²/s	k, W/m·°C	α, m²/s	Pr
			Bióxido de carbono				
220	2.4733	0.783	11.105×10^{-6}	4.490×10^{-6}	0.010805	0.05920×10^{-4}	0.818
250	2.1657	0.804	12.590	5.813	0.012884	0.07401	0.793
300	1.7973	0.871	14.958	8.321	0.016572	0.10588	0.770
350	1.5362	0.900	17.205	11.19	0.02047	0.14808	0.755
400	1.3424	0.942	19.32	14.39	0.02461	0.19463	0.738
450	1.1918	0.980	21.34	17.90	0.02897	0.24813	0.721
500	1.0732	1.013	23.26	21.67	0.03352	0.3084	0.702
550	1.9739	1.047	25.08	25.74	0.03821	0.3750	0.685
600	0.8938	1.076	26.83	30.02	0.04311	0.4483	0.668
			Amoniaco NH_3				
273	0.7929	2.177	9.353×10^{-6}	1.18×10^{-5}	0.0220	0.1308×10^{-4}	0.90
323	0.6487	2.177	11.035	1.70	0.0270	0.1920	0.88
373	0.5590	2.236	12.886	2.30	0.0327	0.2619	0.87
423	0.4934	2.315	14.672	2.97	0.0391	0.3432	0.87
473	0.4405	2.395	16.49	3.74	0.0467	0.4421	0.84
			Vapor de agua				
380	0.5863	2.060	12.71×10^{-6}	2.16×10^{-5}	0.0246	0.2036×10^{-4}	1.060
400	0.5542	2.014	13.44	2.42	0.0261	0.2338	1.040
450	0.4902	1.980	15.25	3.11	0.0299	0.307	1.010
500	0.4405	1.985	17.04	3.86	0.0339	0.387	0.996
550	0.4005	1.997	18.84	4.70	0.0379	0.475	0.991
600	0.3652	2.026	20.67	5.66	0.0422	0.573	0.986
650	0.3380	2.056	22.47	6.64	0.0464	0.666	0.995
700	0.3140	2.085	24.26	7.72	0.0505	0.772	1.000
750	0.2931	2.119	26.04	8.88	0.0549	0.883	1.005
800	0.2739	2.152	27.86	10.20	0.0592	1.001	1.010
850	0.2579	2.186	29.69	11.52	0.0637	1.130	1.019

* Adaptado a unidades SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake, "Heat and Mass Transfer," 2a. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Tabla A-7 Propiedades físicas de algunos metales comunes de bajo punto de fusión

Metal	*Punto de fusión* °C	*Punto de bullición normal* °C	*Temperatura,* °C	*Densidad* kg/m³ $\times 10^{-3}$	*Viscosidad* kg/m s x 10^3	*Capacidad calorífica* kJ/kg·°C	*Conductividad térmica* W/m °C	*Número de Prandtl*
Bismuto	271	1477	316	10.01	1.62	0.144	16.4	0.014
			760	9.47	0.79	0.165	15.6	0.0084
Plomo	327	1737	371	10.5	2.40	0.159	16.1	0.024
			704	10.1	1.37	0.155	14.9	0.016
Litio	179	1317	204	0.51	0.60	4.19	38.1	0.065
			982	0.44	0.42	4.19		
Mercurio	-39	357	10	13.6	1.59	0.138	8.1	0.027
			316	12.8	0.86	0.134	14.0	0.0084
Potasio	63.8	760	149	0.81	0.37	0.796	45.0	0.0066
			704	0.67	0.14	0.754	33.1	0.0031
Sodio	97.8	883	204	0.90	0.43	1.34	80.3	0.0072
			704	0.78	0.18	1.26	59.7	0.0038
Sodio Potasio								
22% Na	19	826	93.3	0.848	0.49	0.946	24.4	0.019
			760	0.69	0.146	0.883		
56% Na	-11	784	93.3	0.89	0.58	1.13	25.6	0.026
			760	0.74	0.16	1.04	28.9	0.058
Plomo bismuto								
44.5% Pb	125	1670	288	10.3	1.76	0.147	10.7	0.024
			649	9.84	1.15			

* adaptado a unidades SI de J. G. Knudsen y D. L. Katz, "Fluid Dynamics and Heat Transfer," McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Tabla A-8 Coeficientes de difusión de gases y vapores en aire a 25 °C y 1 atm*

Substancia	D, cm²/s	$Sc = \frac{\upsilon}{D}$	*Substancia*	D, cm²/s	$Sc = \frac{\upsilon}{D}$
Amoníaco	**0.28**	**0.78**	Acido fórmico	0.159	0.97
Bióxido de Carbono	0.164	0.94	Acido acético	**0.133**	**1.16**
Hidrógeno	0.410	**0.22**	Anilina	**0.073**	**2.14**
oxígeno	**0.206**	**0.75**	Benceno	**0.088**	**1.76**
Agua	**0.256**	**0.60**	Tolueno	**0.084**	**1.84**
Eter etílico	0.093	**1.66**	Etilbenceno	**0.077**	**2.01**
Metanol	0.159	0.97	Propilbenceno	0.059	**2.62**
Alcohol etílico	0.119	**1.30**			

* De J. H. Perry (Ed.), "Chemical Engineers' Handbook," 4a. Ed., McGraw-Hill Book Company. New York, 1963.

Tabla A-S Propiedades del agua (líquido saturado)*

°F	°C	c_p, kJ/kg·°C	ρ, kg/m³	μ, kg/m·s	k, W/m °C	Pr	$\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k}$, 1/m³ °C
32	0	4.225	999.8	1.79×10^{-3}	0.566	13.25	1.91×10^{9}
40	4.44	4.208	999.8	1.55	0.575	11.35	6.34×10^{9}
50	10	4.195	999.2	1.31	0.585	9.40	1.08×10^{10}
60	15.56	4.186	998.6	1.12	0.595	7.88	1.46×10^{10}
70	21.11	4.179	997.4	9.8×10^{-4}	0.604	6.78	1.91×10^{10}
80	26.67	4.179	995.8	8.6	0.614	5.85	2.48×10^{10}
90	32.22	4.174	994.9	7.65	0.623	5.12	3.3×10^{10}
100	37.78	4.174	993.0	6.82	0.630	4.53	4.19×10^{10}
110	43.33	4.174	990.6	6.16	0.637	4.04	4.89×10^{10}
120	48.89	4.174	988.8	5.62	0.644	3.64	5.66×10^{10}
130	54.44	4.179	985.7	5.13	0.649	3.30	6.48×10^{10}
140	60	4.179	983.3	4.71	0.654	3.01	7.62×10^{10}
150	65.55	4.183	980.3	4.3	0.659	2.73	8.84×10^{10}
160	71.11	4.186	977.3	4.01	0.665	2.53	9.85×10^{10}
170	76.67	4.191	973.7	3.72	0.668	2.33	1.09×10^{11}
180	82.22	4.195	970.2	3.47	0.673	2.16	
190	87.78	4.199	966.7	3.27	0.675	2.03	
200	93.33	4.204	963.2	3.06	0.678	1.90	
220	104.4	4.216	955.1	2.67	0.684	1.66	
240	115.6	4.229	946.7	2.44	0.685	1.51	
260	126.7	4.250	937.2	2.19	0.685	1.36	
280	137.8	4.271	928.1	1.98	0.685	1.24	
300	148.9	4.296	918.0	1.86	0.684	1.17	
350	176.7	4.371	890.4	1.57	0.677	1.02	
400	204.4	4.467	859.4	1.36	0.665	1.00	
450	232.2	4.585	825.7	1.20	0.646	0.85	
500	260	4.731	785.2	1.07	0.616	0.83	
550	287.7	5.024	735.5	9.51×10^{-5}			
600	315.6	5.703	678.7	8.68			

* **Adaptado de A. I. Brown y S. M. Marco,** "Introduction to Heat Transfer," 3a. **Ed.,** McGraw-Hill **Book Company, New York, 1958.**

Tabla A-10 Emisividad normal total de diversas superficies*

Superficie	*T*, °F	*Emisividad* ε
Metales y sus óxidos		
Aluminio :		
Placa muy pulida, 98.3% pura	440–1070	0.039-0.057
Hoja comercial	212	0.09
Fuertemente oxidada	299-940	0.20-0.31
Techo con revestimiento de aluminio	100	0.216
Latón:		
Muy pulido :		
73.2% Cu, 26.7%' Zn	476-674	0.028-0.031
62.4% Cu, 36.8% Zn, 0.4% Pb, 0.3% Al	494-710	0.033-0.037
82.9% Cu, 17.0% Zn	530	0.030
Rolado y pulido, pero con la dirección del pulido visible	70	0.038
Placa opaca	120-660	0.22
Cromo pulido (véanse aleaciones de níquel para aceros Ni- Cr)	100-2000	0.08-0.36
Cobre :		
Pulido	242	0.023
	212	0.052
Placa calentada largo tiempo, cubierta con una gruesa capa de óxido	77	0.78
Oro puro, muy pulido	440-1160	0.018-0.035
Hierro y acero y (no incluye inoxidable):		
Acero pulido	212	0.066
Hierro pulido	800-1880	0.14-0.38
Hierro colado, recientemente torneado	72	0.44
torneado y calentado	1620-1810	0.60-0.70
Acero, suave	450–1950	0.20–0.32
Superficies oxidadas:		
Placa de hierro, en baño ácido y después oxidado al rojo	68	0.61
Hierro, superficie gris oscuro	212	0.31
Lingote tosco de hierro	1700-2040	0.87-0.95
Hoja de acero con capa gruesa de óxido	75	0.80
Plomo :		
Sin oxidar, 99.96% puro	260-440	0.057-0.075
Oxidado gris	75	0.28
Oxidado a 300 °F	390	0.63
Magnesio, óxido de magnesio	530-1520	0.55-0.20
Molibdeno		
Filamento	1340-4700	0.096-0.202
Masivo, pulido	212	0.071
Metal monel, oxidado a ll 10 °F	390-1110	0.41-0.46
Níquel:		
Pulido	212	0.072
Oxido de níquel	1200–2290	0.59-0.86
Aleaciones del níquel :		
Cobre níquel, pulido	212	0.059
Alambre de micromo, brillante	120–1830	0.65-0.79
Alambre de micromo, oxidado	120-930	0.95-0.98
Platino puro, placa pulida	440–1160	0.054-0.104
Plata :		
Pulida, pura	440–1160	0.020-0.032
Pulida	100-700	0.022-0.031
Aceros inoxidables :		
Pulido	212	0.074
Tipo 301;B	450–1725	0.54-0.63

Tabla A-10 (Continuación)

Superficie	*T*, °F	*Emisividad* ε
Metales y sus óxidos		
Estaño, hierro al estaño, brillante	76	0.043 and 0.064
Tungsteno, filamento	6000	0.39
Zinc, hoja de hierro galvanizado muy brillante	82	0.23
Refractario, materiales de construcción, pinturas y varios		
Alúmina (85–99.5% Al_2O_3, 0–12% SiO_2, O - - 1 % Ge_2O_3); efecto del tamaño de gran", micras (μm):		
10 μm		0.30-0.18
50 μm		0.39-0.28
100 μm		0.50-0.40
Asbestos, tableros	74	0.96
Ladrillo:		
Rojo, tosco, pero sin grandes irregularidades	70	0.93
Refractario	1832	0.75
Carbón:		
Carbón T (Gebrüder Siemens) 0.9% ceniza, empezó con emisividad de 0.72 a 260 °F, per" con el calentamiento cambió a los valores que se dan	260-1160	0.81-0.79
Filamento	1900-2560	0.526
Placa áspera	212-608	0.77
Negro de humo, depósito áspero	212-932	0.84–0.78
Losetas de concreto	1832	0.63
Esmalte blanco fundido sobre hierro	66	0.90
Vidrio :		
Liso	72	0.94
Pyrex, plomo y sosa	500-1000	0.95-0.85
Pinturas, lacas y barnices :		
Barniz blanco nieve sobre placa áspera de hierro	73	0.906
Laca negra brillante atomizada sobre hierro	76	0.875
Cromalaca negra brillante sobre capa de hierro estañado	70	0.821
Cromalaca negra mate	170-295	0.91
Laca blanca o negra	100-200	0.80-0.95
Laca negra mate	100-200	0.96-0.98
Pinturas y lacas de aluminio :		
10% al 22% laca sobre superficie tosca o suave	212	0.52
Otros pinturas de Al, de contenido y envejecimiento variables	212	0.27-0.67
Porcelana vidriada	72	0.92
Cuarzo, fundido, tosco	70	0.93
Papel para techad"	69	0.91
Placa de hule duro, brillante	74	0.94
Agua	32-212	0.95-0.963

* Cortesía de H. C. Hottel, de W. H. McAdams, "Heat Transmission," 3a. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

Tabla A-II Dimensiones de tubería de acero

Tamaño nominal de tubería, plg	Diámetro extremo, plg	Cédula NO.	Espesor de pared, plg	Diámetro interno, plg	Area de sección metálica. plg^2	Area de sección transversal interna $pies^2$
$\frac{1}{8}$	0.405	40	0.068	0.269	0.072	0.00040
		80	0.095	0.215	0.093	0.00025
$\frac{1}{4}$	0.540	40	0.088	0.364	0.125	0.00072
		80	0.119	0.302	0.157	0.00050
$\frac{3}{8}$	0.675	40	0.091	0.493	0.167	0.00133
		80	0.126	0.423	0.217	0.00098
$\frac{1}{2}$	0.840	40	0.109	0.622	0.250	0.00211
		80	0.147	0.546	0.320	0.00163
$\frac{3}{4}$	1.050	40	0.113	0.824	0.333	0.00371
		80	0.154	0.742	0.433	0.00300
1	1.315	40	0.133	1.049	0.494	0.00600
		80	0.179	0.957	0.639	0.00499
$1\frac{1}{2}$	1.900	40	0.145	1.610	0.799	0.01414
		80	0.200	1.500	1.068	0.01225
		160	0.281	1.338	1.429	0.00976
→ 2	2.375	40	0.154	2.067	1.075	0.02330
		80	0.218	1.939	1.477	0.02050
3	3.500	40	0.216	3.068	2.228	0.05130
		80	0.300	2.900	3.016	0.04587
4	4.500	40	0.237	4.026	3.173	0.08840
		80	0.337	3.826	4.407	0.07986
5	5.563	40	0.258	5.047	4.304	0.1390
		80	0.375	4.813	6.112	0.1263
		120	0.500	4.563	7.953	0.1136
		160	0.625	4.313	9.696	0.1015
6	6.625	40	0.280	6.065	5.584	0.2066
		80	0.432	5.761	8.405	0.1810
10	10.75	40	0.365	10.020	11.90	0.5475
		80	0.500	9.750	16.10	0.5185

Tabla A-12 Factores de conversión

Longitud:
12 plg = 1 pie
2.54 cm = 1 plg
1 μm = 10^{-6} m = 10^{-4} cm

Masa:
1 kg = 2.205 lb_m
1 slug = 32.16 lb_m
454 g = 1 lb_{fm}

Fuerza:
1 dyn = 2.248 x 10^{-6} lb_f
1 lb_f = 4.448 N
10" dyn = 1 N

Energía:
1 pie·lb_f = 1.356 J
1 kWh = 3413 Btu
1 hp·h = 2545 Btu
1 Btu=252 cal
1 Btu = 778 pies.14

Presión:
1 atm $lb_f/plg^2$6 = 2116 $lb_f pie^2$
1 atm = 1.01325 x 10^5 N/m^2
1 plg Hg = 70.73 lb_f/pie^2

Viscosidad:
1 centipoise = 2.42 $lb_m/h \cdot$ pie
1 $lb_f \cdot s/pie^2$ = 32.16 $lb_m/s \cdot$pie

Conductividad térmica:
1 cal/s ·cm ·°C = 242 Btu/h pie·°F
1 W/cm ·°C = 57.79 Btu/h·pie·°F

Conversiones útiles a unidades SI

Longitud:
1 plg = 0.0254 m
1 plg = 0.3048 m
1 mi = 1.60934 km

Area:
1 plg^2 = 645.16 mm^2
1 pie ^{2} = 0.092903 m^2
1 mi^2 = 2.58999 km^2

Presión:
1 atm = 1.01325 x 10^5 N/m^2
1 lb_f/plg^2 = 6894.76 N/m^2

Energía:
1 erg = 10^{-7} J
1 Btu = 1055.06 J
1 pie.14 = 1.35582 J
1 cal (15°C) = 4.1855 J

Potencia:
1 hp = 745.7 W
1 Btu/h = 0.293 W

Flujo calorífico:
1 $Btu/h \cdot pie^2$ = 3.15372 W/m^2
1 Btu/h·pie = 0.96128 W/m

Conductividad térmica:
1 Btu/h·pie·°F = 1.730278 W/m·°C

Coeficiente de transferencia de calor:
1 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$ = 5.67683 $W/m^2 \cdot °C$

Volumen:
1 plg^3 = 1.63871 X 10^{-5} m^3
1 pie ^{3} = 0.0283168 m^3
1 gal = 231 plg^3 = 0.0037854 m^3

Masa:
1 lb_m = 0.45359237 kg

Densidad
1 lb_m plg^3 = 2.76799 X 10^7 kg/m^3
1 lb_m/pie^3 = 16.0185 kg/m^3

Fuerza:
1 dyn = 10^{-5} N
1 lb_f = 4.44822 N

Apéndice B

Soluciones Exactas a Ecuaciones de Capa Límite Laminar

Deseamos obtener una solución a las ecuaciones de momento y energía de capa limite laminar, suponiendo que las propiedades del fluido son constantes y que el gradiente de presión es nulo. Tenemos:

continuidad:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{B-1}$$

momento:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{B-2}$$

energía:
$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{B-3}$$

Obsérvese que por ahora se ha omitido el término de disipación viscosa en la ecuación de energía. De acuerdo con el análisis de orden de magnitud de la Sec. 6-1,

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{B-4}$$

Suponemos ahora que los perfiles de velocidad tienen formas similares a diferentes distancias del borde principal de la placa plana. La variable significativa es así y/δ, y suponemos que la velocidad puede expresarse como una función de esta variable. Entonces tenemos:

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Introduciendo el estimado de orden de magnitud para δ a partir de la Ec. B-4:

$$\frac{u}{u_\infty} = g(\eta) \tag{B-5}$$

donde
$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/u_\infty}} = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \tag{B-6}$$

A η se le llama aquí la variable de similaridad y $g(\eta)$ es la función que buscamos como una solución. De acuerdo con la ecuación de continuidad, una función de corriente ψ puede definirse de manera que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{B-7}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{B-8}$$

Insertando la Ec. B-7 en la Ec. B-5, da

$$\psi = \int u_\infty g(\eta)\, dy = \int u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\, g(\eta)\, d\eta$$

$$\psi = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} f(\eta) \tag{B-9}$$

donde $f(\eta) = \int g(\eta)\, d\eta$.

De las Ecs. B-8 y B-9 obtenemos

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} + f \right) \tag{B-10}$$

Haciendo transformaciones similares en los otros términos en la Ec. B-2: obtenemos

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0 \tag{B-11}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse numéricamente para la función $f(\eta)$. Las condiciones de frontera son

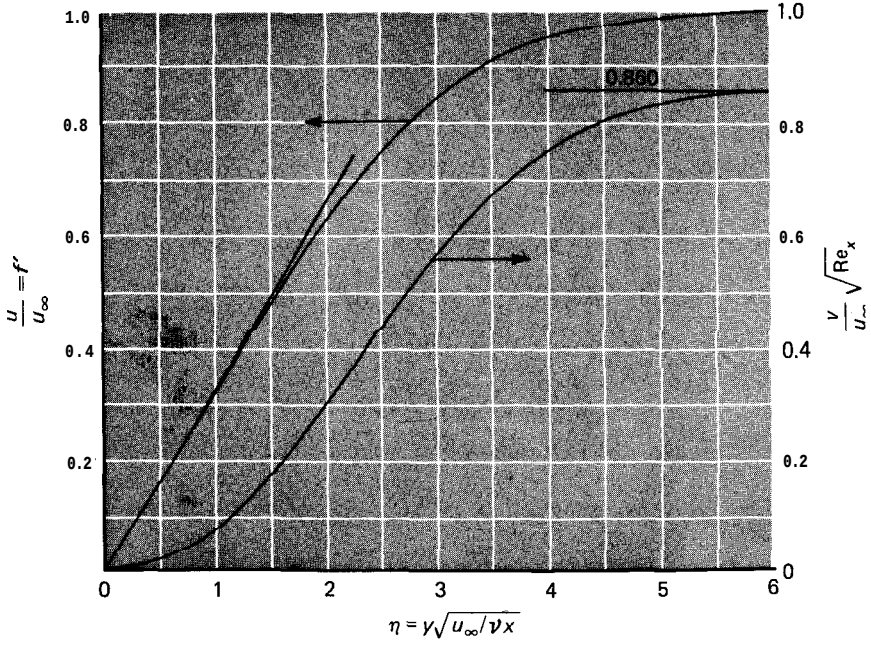


Fig. B-I **Perfiles de velocidad en la capa límite laminar.**

Coordenadas físicas		*Coordenadas de similitud*	
$u = 0$	en $y = 0$	$\frac{df}{d\eta} = 0$	en $\eta = 0$
$v = 0$	en $y = 0$	$f = 0$	en $\eta = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	en $y \to \infty$	$\frac{df}{d\eta} = 1.0$	en $\eta \to \infty$

La primera solución a la Ec. B-1 1 fue obtenida por Blasius.* Los valores de u y v se presentan en la Fig. B-l, tal como se obtuvieron de esta solución.

La ecuación de energía se resuelve de manera similar definiendo primero una variable de temperatura adimensional como

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_w}{T_\infty - T_w} \tag{B-12}$$

donde también se supone que θ y T pueden expresarse como funciones de la variable de similaridad η. La Ec. B-3 se convierte entonces en

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \tag{B-13}$$

con condiciones de frontera

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{en } y = 0,\ \eta = 0 \\ 1.0 & \text{en } y = \infty,\ \eta = \infty \end{cases}$$

Dada la función $f(\eta)$, la solución a la Ec. B-13 se puede obtener como

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{\Pr}{2}\int_0^\eta f\,d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\Pr}{2}\int_0^\eta f\,d\eta\right) d\eta} \tag{B-14}$$

Pohlhausen? da esta solución y se muestra en la Fig. B-2. Para números de Prandtl entre 0.6 y 15 se encontró que el gradiente de temperatura adimensional en la superficie podía representarse satisfactoriamente por

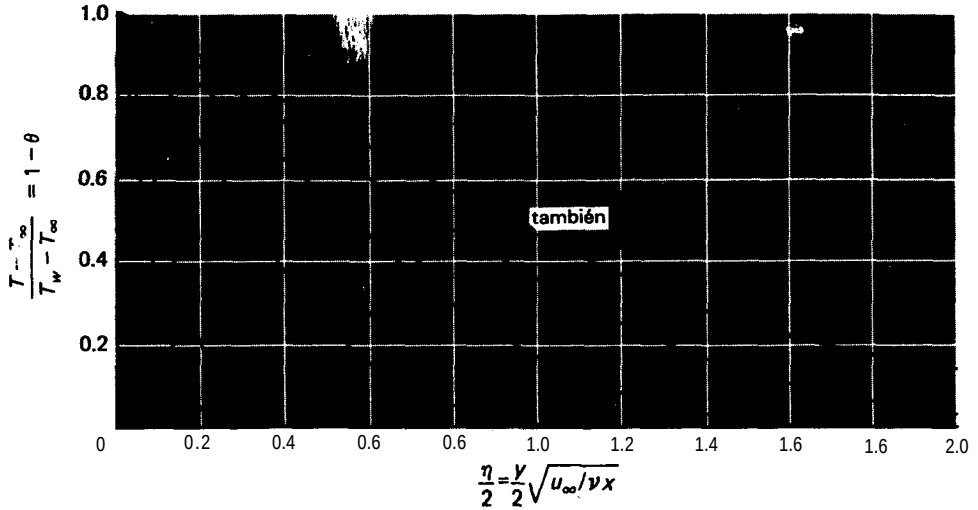
$$\left(\frac{d\theta(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0.332\ \Pr^{1/3} \tag{B-15}$$

El coeficiente de transferencia de calor puede expresarse subsecuentemente por

---

* H. Blasius, *Z. Math Phys* Vol. 56, Pág. 1, 1908.

† E. Pohlhausen, Z. *Angew Math Mech.*, Vol. 1, Pág. 115, 1921



Rg. B-2 Perfiles de la temperatura en la capa limite laminar con pared isotérmica.

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\ \mathrm{Re}_x^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{B-16}$$

de acuerdo con los resultados del Cap. 5.

Ahora consideremos una solución de toda la ecuación de energía, incluyendo el término de disipación viscosa. Tenemos

$$u\frac{\partial T}{ax} + v\frac{\partial T}{ax} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{B-17}$$

La solución a esta ecuación se obtiene primero para el caso de una placa adiabática. Introduciendo un nuevo perfil de temperatura adimensional en términos de la temperatura de estancamiento T_0,

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T(\eta) - T_\infty}{u_\infty^2/2c_p}$$

La Ec. B-17 se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Pr}\, f\frac{d\theta}{d\eta} + 2\,\mathrm{Pr}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 = 0 \tag{B-18}$$

Para el caso de la pared adiabática, las condiciones de frontera son

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \qquad \text{en } y = 0,\ \eta = 0$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en } y = \infty,\ \eta = \infty$$

La solución a la Ec. B-18 está dada por Pohlhausen como

$$\theta_a(\eta, \text{Pr}) = 2\text{Pr} \int_\eta^\infty \left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)^{\text{Pr}} \left[\int_0^\eta \left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)^{2-\text{Pr}} d\eta \right] d\eta \tag{B-19}$$

donde el símbolo θ_a se usa para indicar la solución de pared adiabática. En la Fig. B-3 se da un diagrama de la solución. El factor de recuperación se expresa como

$$r = \theta_a(0, \text{Pr})$$

Para números de Prandtl cerca de la unidad esto se reduce a la relación expresada en la Ec. 5-121

$$r = \text{Pr}^{1/2} \tag{5-121}$$

Ahora considérese el caso en que la pared se mantiene a cualquier temperatura diferente a T_{aw}; es decir, existe transferencia de calor ya sea hacia o desde el fluido. Las condiciones de frontera se expresan ahora como

$$T = \begin{cases} T_w & \text{en } y = 0,\ \eta = 0 \\ T_\infty & \text{en } y = \infty,\ \eta = \infty \end{cases}$$

Observemos que el término de calentamiento viscoso en la Ec. B-18 proporciona una solución particular a la ecuación. Si no hubiera calentamiento viscoso, la solución a la pared adiabática daría un perfil de temperatura uniforme a lo largo de la capa límite.

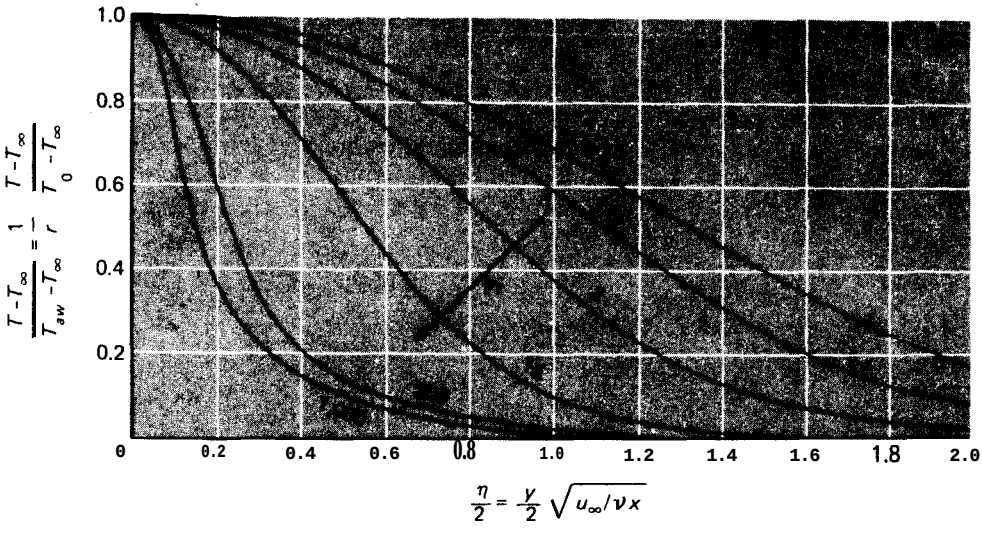


Fig. B-3 Perfiles de temperatura en capa límite laminar con pared adiabática.

Ahora suponemos que el perfil de temperatura para el caso combinado de una pared caliente y una disipación viscosa, puede representarse por una combinación lineal de las soluciones expresadas en las Ecs. B-14 y B-19. Esta suposición se justifica en vista de que la Ec. B-18 es lineal en la variable dependiente θ, Entonces escribimos

$$T - T_\infty = (T_a - T_\infty) + (T_c - T_{aw}) \tag{B-20}$$

donde $T_a - T_\infty$ es la distribución de temperatura a partir de la Ec. B-19 y $T_c - T_{aw}$ es la solución a partir de la Ec. B-14, con T_{aw} tomando el mismo papel que T_∞ en esa solución. La Ec. B-20 puede escribirse

$$T - T_\infty = \theta_a(T_0 - T_\infty) + \theta(T_{aw} - T_w) + T_w - T_{aw} \tag{B-21}$$

Esta solución puede ponerse a prueba insertándola en la Ec. B-18. Así resulta

$$(T_0 - T_\infty)\left[\frac{d^2\theta_a}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f\frac{d\theta_a}{d\eta} + 2\Pr\left(\frac{d^2f}{d\eta^2}\right)^2\right] + (T_{aw} - T_w)\left(\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\Pr f\frac{d\theta}{d\eta}\right) = 0$$

Un examen de esta relación indica que la Ec. B-21 es una solución válida para las verdaderas condiciones de frontera de la pared calentada. El gradiente de temperatura en la pared puede entonces expresarse *como*

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = (T_0 - T_\infty)\left.\frac{\partial \theta_a}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} + (T_{aw} - T_w)\left.\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$$

El primer término es cero y la Ec. B-15 puede utilizarse para evaluar el segundo término. Así resulta

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0.332(T_{aw} - T_w)\Pr^{1/3} \tag{B-22}$$

Esta relación sugiere inmediatamente la definición del coeficiente de transferencia de calor para el caso en que el calentamiento viscoso es importante mediante la relación

$$\frac{q}{A} = h(T_w - T_{aw}) \tag{B-23}$$

El análisis continúa entonces como se estudió en la Sec. 5-12.

Indice

Ablación, 576
Absorbencia
para radiación solar, 426
para radiación térmica, 344
Acbenbach, E., 297
Adams. J.A., 126
Agua
propiedades del, 600
tensión superficial para, 468
Aihara. T.. 339
Aire, propiedades del, 596
Aislamiento, aplicaciones del, 44
Al-Arabi, 3.40
Albedo
de superficies naturales. 431
de vapor de agua. 432
definición de, 430
Aletas
distribución de temperatura en, 59
Fishenden, M., 339
pérdida de calor a partir de, 59
tipos de, 66
Almacenamiento térmico, respuesta transitoria, 520
Allen. R.W., 296
Análisis de capacidad global, limitaciones del, 135
Analogía
de Colbum, 222
eléctrica, para conducción de calor en estado estacionario, 119
entre transferencia de calor y fricción de fluido, 221. 261
para conducción de calor en estado no estacionario, 132
Ames, W.F., 126
Arpaci. VS.. 126. 191, 338
Audunson, T., 338

Bachmann, R.N.. 450
Baker, D.R.. 552
Bandas de absorción en la atmósfera, 433
Barakat, H.Z.. 126
Barron R., 39
Bayley, F.J., 338
Beckman, W.A., 450
Bell, R.J.. 481
Benard, H., 338
Bergles, A.E., 339
Bernstein, M.. 296
Bird, R.B., 552
Birkebak, R.C., 339
Bishop, E.N.. 338
Black, 1.A., 39
Blasius. H., 608
Blindaje contra radiación, efecto sobre la razón de transferencia de calor, 375
Blum. H.A.. 78
Boelter. L.A., 295
Boggs, J.H., 339
Bromley, L.A., 480
Brown
C.K., 338
D.R., 78
Bucles de circulación natural, 330
Burke, M.R., 585

Caída de presión
cn bancos de tubos, 282
en tubos, 239

Calentamiento
viscoso en capa límite, 210, 241
y enfriamiento transitorios *(Véase* Conducción, estado no estacionario)
Cambiador de calor
compacto, 515
consideraciones de diseño para, 524
de calor de chaqueta y tubo, 491
de calor de flujo transversal, 490, 492
de flujo transversal, 492, 493
de tubo y chaqueta, 491
efecto de propiedades variables sobre, 518
eficacia de, 502
fórmulas para, 507
estudio *general* de, 485
factores de incrustación para, 489
Cambiadores de calor compactos, 515
Capa limite
hidrodinámica
espesor de, 206
estudio general de, 195
hidromagnética, 556
térmica, definición de la. 212
Capacidad térmica en formulación numérica, 167
Capacitancia. térmica, 132
Capas límite
análisis integral de energía para, 213
calentamiento viscoso en, 210, 241
capa de amortiguamiento en, 224
distribución de temperatura en, 213
ecuación de continuidad para, 203
ecuación de energía para, 210
ecuación de momento para, 204
efectos de la disipación viscosa en, 210
estudio general de, 194
hidrodinámicas 194
hidromagnéticas 556
influencias de un campo magnético sobre, 556
laminar: ecuación de momento integral para, 206
perfil de velocidad para, 207
soluciones exactas a. 605
subcapa laminar, 194. 224
térmica, 213
transición de, 195, 224
turbulentas, espesor de, 231
Carslaw H.S.. 126
Carter. C.R.. 450
Cess, R.D., 449, 532
Cilindros
coeficiente de arrastre para, 273
convección libre en, 311
flujo transversal. (Véase Flujo transversal en cilindros)
transferencia de calor por convección forzada en, 275
Citakoglu. E., 481
Claassen L, 338
Clark, J.A., 126
Clausing. A.M., 78
Clifton, J.V., 338
Coeficiente
de absorción monocromática, 380
de ajuste
definición del, 570
valores del, 571
de arrastre
definición de, 272
para Cilindros, 274
para esferas. 273
de difusión
definición de. 534
para gases, 535, 599
de fricción para placas planas, 222
de transferencia de calor
definición de, 28
efecto de inyección de fluido sobre, 562
efecto de la rugosidad, 262
en ebullición por película. 473
en espacio cerrado, 321
en flujo molecular libre, 572
en sistemas de dinámica de magneto fluidos, 559
en términos de gradiente de temperatura, 212
global. (Véase Coeficiente global de transferencia de calor)
influencia de un campo magnético sobre, 559
para bancos de tubos, 282
para capa límite turbulenta sobre placa plana, 230
para cilindros en flujo transversal, 275
para cilindros no circulares, 279
para condensación por película. 454
para convección forzada a partir de esferas, 278
para esferas en flujo transversal, 437
para flujo de alta velocidad, 240
en tubos, 236, 263
para flujo turbulento en tubos, 238, 259
para metales líquidos, 286
para radiación, 437
por convección libre: en aire, 320
sobre superficies verticales, 301
de transferencia de calor por convección. (*Véase* Coeficiente de transferencia de calor)
de transferencia de calor por radiación, 437
de transferencia de calor total
definición del, 48, 484
valores aproximados del, 486
de transferencia de masa

definición de, 541
para convección forzada, 543
de transferencia de masa por convección forrada, 542
Coeficientes de fricción de piel. fórmulas empíricas para. 229
Colburn, A.P., 296
Colector solar, 428
Condensación
coeficientes aproximados para, 476
dentro de tubos horizontales, 458
en superficies inclinadas. 456
número de, 456
por goteo, 452
por película, tratamiento analítico de, 451
Condiciones de frontera, exactitud de, 107
Conducción
a través de una pared compuesta, 41
a través de una pared plana, 41
a través de un cilindro hueco, 46
analogía eléctrica para, 119
con fuentes de calor, 51
ecuaciones de: coordenadas cilindricas, 22
definiendo, 18
general tridimensional, 20
general unidimensional, 20
efecto de conductividad variable sobre, 41
en estado estacionario: método numérico bidimensional para, 92
en estado no estacionario: con condiciones de frontera de convección, 141
analogía eléctrica para, 133
en sólido semiinfinito, 137
método de capacidad global. 131
método gráfico para, 179
método numérico, 157
uso de gráficas de Heisler, 14.1
sistemas multidimensionales, 152
sistemas múltiples de capticidad global. 133
en sistemas cilfndricos, 44
factor de forma de, 86
ley de Fourier de, 18
trazo de flujo para, 85
Conductancia de contacto, tabla de calores, 69
Conductividad térmica
de gases, 23, 24
de líquidos, 23
de solidos, 26
de superaislantes 26, 27
ecuaci6n de definición, 18
mecanismo físico de la. 23
(véase Conductividad térmica)
Connally, T.J.. 340
Consideraciones de diseño para cambiadores de calor, 524
Constante solar, 425
Convección
estudio general de la, 28. 193
forzada
combinada con convección libre, 330
en tubos. 233, 257
para flujo de alta velocidad, 242
para metales liquidos, 286
transferencia de calor por, para flujo sobre placa plana, 218
libre
a partir de esferas, 321
a partir de sólidos rectangulares, 316
combinado con convección forzada, 330
en cilindros, 311
en espacios cerrados, 326
en placa plana vertical, 309
en placas horizontales, 315
espesor de capa límite para, 305
mecanismo físico de la, 28
(véase también Convección forzada: convección libre)
Coordenadas
cilíndricas. 22
esféricas, 22
Cotter. T.P., 585
Crank, J., 126
Crisol modelo para medidas de difusión. 547
Cuerpo gris para radiación térmica, 346

Chapman. A.J.. 338
Cheesewrigth, R., 338
Chu, H.H.S., 340
Churchill, S.W., 251, 269, 340

Dake, J.M.K., 450
Dale, J.D., 339
Datos de transferencia de calor por convección. correlación de, 257
de Groot, S.R., 552
Depew. C.A., 340
Dcvienne. F.M., 585
Diámetro hidráulico. 262
Diferencia
de temperatura media logarítmica, 494
factores de corrección para, 497
progresiva en métodos numéricos, 162
regresiva en métodos numéricos, 162
Difusión
de agua en la atmósfera. 548
de vapor de agua, 539
en gases, 535
en líquidos y sólidos, 541
equimolal, 538
ley de Fick de, 534
mecanismo físico de la, 534

Dimensiones y unidades. 30
Dipprey. D.F., 296
Dispersión en ia atmósfera. 430
Distribución de temperatura
en aletas. 58
en capa limite laminar, 214
en flujo laminar en tubos, 235
en sólidos con fuentes de calor, 52
Dittus. F.W., 295
Doherty. P.. 39
Dorrance. W.H.. 585
Drake. R.M.. 296
Duffie. J-A.. 450
Dunklc. R.V.. 449
Dusinberre. G.M., 126. 190
Dutcher, C.H., 585
Dwyer, O.E.. 297

Eagleson, PS.. 450
Ebullición
de estanque. 460
(véase también Ebullición por nucleación en estanque)
efecto de las burbujas en. 462
flujo pico de calor en, 472
global. 460, 470
local. 460.470
mecanismo físico de. 461
película de. 461, 472
coeficiente de transferencia de calor en. 472
por convección forzada, 470
por convección forrada. cálculo de. 470
por nudeación en estanque
correlación para. 466
mecanismo físico de. 462
relaciones simplificadas de. para agua. 474
saturada, 460
sobreenfriada, 460
subenfriada 460
tamaño de burbuja en, 462
(véase también Nucleación en ebullición en estanque)
Eckert, E.R.G., 251. 296, 337. 449, 585
Ecuación
de Bernoulli, 198
de continuidad
para capa límite, 203
para flujo en tubos, 197
de energía para flujo estacionario, 198
de Laplace, 79
Edwards D.K., 450
Eficaccia de cambiadores de calor, 502, 507
Eficiencia
de aletas
cálculo de. 61
definición de, 59
para aletas circunferenciales 61
para aletas rectanfulares y triangulares. 60
(véase Eficacia de aletas)
Efecto de entrada en tubos, 264
Efectos de la rugosidad sobre la transferencia de calor. 262
Egbert, R-B.. 450
Emery R.P.. 338
Emisividad
de bióxido de carbono. 381
de superficies definición de. 395
valores de, 601
de vapor de agua. 384
Emslie A.C.. 127
Endo, S., 339
Enfriamiento por transpiración. 560
Esferas
coeficiente de arrastre para. 273
convección libre a partir de. 321
transferencia de calor en flujo transversal, 279
Esfuerzo cortante
definición del. 191
en ftujo laminar pobre placa plana, 221
Espectro electromagnético. 342
Espesor
critico de aislamiento 50
de capa límite
definición de. 194
para convección libre. 305
para flujo laminar en placa plana, 208
orden de magnitud para. 255
Evans L.B.. 337
Evaporación de agua. 539
Exactitud
de condiciones de frontera, 107
de soluciones numéricas, 106

Factor
de ángulo. 352
de configuración, 352
de forma
conducción, definición del, 86
para radiación. (*Véase* Factores de forma para radiación)
de fricción para tubos lisos, 261
de recuperación
cálculo del, 242
definición del, 241
entalpía, 243
de recuperación de entalpía, 243
de turbiedad, definición del, 433
de vista, 352
Factores
de encrustamiento para cambiadores de calor. 490
de conversión, 32. 605

de forma para radiación
definición de. 352
gráficas para. 357
Fand. R.M., 296
FeIdman. K.T.. 585
Fenómeno de Leidenfrost. 472
Fluctuación turbulenta, 226
Flujo
de calor pico en ebullición , 472
de calor quemado, valores aproximados. 477
de plano de estancamiento. 563
efecto de inyección de fluido, 563
deslizante, 567
en tubos
ecuación de continuidad para, 197
factor de fricción para, 260
Laminar: transferencia de calor en. 237. 264
distribución de temperatura en, 235
perfil de velocidad para. 234
relaciones empíricas para. 255
transferencia de calor turbulenta en, 261
laminar
[redacted] de transferencia de calor para. 218
eu tubos. (Véase Flujo en tubos, laminar)
espesor de capa límite para, 207
perfil de velocidad en, 234
sobre placa plana 194
molecular libre. 567
separado. 274
transversal
sobre cilindros. 27 1
sobre esferas. 271
transversal a cilindros. 271
separado, 272
transversal a bancos de tubos, 283
(véase *también* Flujo laminar; flujo en tuberías; flujo turbulento)
turbulento
en tubos, 238
coeficiente de transferencia de calor para, 259
esfuerzo cortante en, 226
perfil de velocidad en. 231
propiedades de contraflujo en, 226, 229
sobre placa plana, 224
Formulación numérica para problemas de radiación, 409
Formulaciones explícita e implícita, 163
Fox, W.E., 552
Franklin. J.L., 340
Fricción fluida relacionada con transferencia de calor, 222
Fugii. T.. 339
Función de error, 138, 588
Gambill. W.R., 481
Gases
coeficiente de difusión para, 535, 599
conductividad térmica de, 23
difusión en, 535
propiedades de los, 597
Gauvin, W.H.. 338
Gebbart. B.. 338, 481
Geiger. R.. 450
Generación de calor, 51
Gibbon, N.C., 39
Giedt. W.H., 295
Guilliland, E.R., 552
Glaser. P.E.. 39
Globe. S., 337
Goldman, C.R., 450
Goldstein. R.J.. 339
Gowen, R.A.. 296
Graff, J.G.A., 339
Gráfica
cuadrada curvilínea, 85
de eficacia NUT (número de unidades de transferencia). 508. 511
de flujo para conducción, 85
de Schmit, 179
Grashof. Franz. 305n
Grcgg. J.L.. 338
Grigull, U.. 127
Grimson. E.C., 296
Gröber, H.. 190
Grover. G.M.. 585
Gubareff. G.C.. 449
Gumley, P.. 296.
Gunness. R.C., 338

Habne, E.W.P., 338
Hahne, E.. 127
Haley, K.W., 481
Harleman, D.R.F., 450
Harper, W.B., 78
Hartnett. J.P., 296, 584
Hausen, H., 295
Hawkins, G., 481
Heisler, M.P., 190
Hering, R.G., 449
Hilpert, R.. 295
Holman, J.P., 251, 337, 449, 481
Hollands, H.G.T., 340
Hottel, H.C.. 449
Howell, J.R., 449
Husar, R.B., 338

Identidad de Kirchhoff, 345
Impacto de gotas, transferencia de calor en. 462
hura. H. 339

Insolación
definición de, 430
solar promedio. 430
Intensidad de radiación, 353
Irvine, T.R.. 296
Irradiación. definición de, 368
Ito, C.H., 340

Jackson, T.W., 338
Jaeger. J.C., 126
Jakob, Max, 190, 296, 337, 449, 481
Janssen, J.E., 449
Johnson
K.R.. 126
V.K., 449
Jordan, R.C., 449
Jost, W., 552

Kalish. S.. 297
Katz, D.L., 295
Kaufman. S.J.. 296
Kayan, D.F., 126
Kays, W.M., 296, 532
Kem. D.R., 78
Kline, S.J., 296
K"Udse"
Kohler, M.A.. 552
Kondratyev. K.Y., 450
Kramers, H., 295
Krasshold, H.. 339
Kraus, A.D., 78
J.D., 295
número de, definición. 295

Landis, F., 339
Langley, definición, 430
Leppert, G.. 296, 481
Levy, S., 481
ley
de desplazamiento de Wien para radiación térmica, 348
de difusión de Fick, 534
de enfriamiento de Newton, 28
de Fourier de conducción de calor, 18
de las presiones parciales de Dalton, 540
de radiación de Planck, 346
de radiación térmica de Stefan-Boltzmann, 343
Lienhard. J.H., 481
Lightfoot, E.N.. 552
Líquidos
conductividad térmica de, 25
saturados. propiedades de. 594
y sólidos. difusión en, *540*
Liu, C.Y.. 339
London, A.L., 297. 532

Longitud de mezclado, 227
Longitudes medias de haz, tabla de, 385
Lubarsky, B., 296

Lloyd, J.R., 339

MacCregor, R.K., 338
Mack, L.R., 338
McAdams, W.H.. 295, 337, 449. 480
McDonald, J.S., 340
McCinnis, F.K., 481
Medida de temperatura, efecto de la radiación, 436
Metais, B., 337
Metales
líquidos
convección forxada para, 286
propiedades de. 599
transferencia de calor con, 288
propiedades de, 589. *(Véase también Métales* líquidos; no metales)
Método
de diferencias finitas. *(Véaw* Método numérico)
de Gauss-Seidel, 106
de la entalpía de referencia. 243
de la temperatura de referencia para flujo a alta velocidad, 242
de redes para análisis de radiación. 369
de redes para radiación. 369
de relajación, 100
de separación de variables para resolución de ecuaciones diferenciales parciales, 82
gráfico para conducción bidimensional en estado estacionario, 85
numérico
con condición de frontera de convección, 94
estabilidad de, 168
Métodos matriciales para problemas de conducción, 99
Módulo
de Biot. 149
de Fourier, 149
Mojado en condensación por goteo, 451
Mollendorf, J.C., 338
Moody, F.F., 295
Moore. C.J., 78
Moran, W.R., 339
Mueller. W.K., 339
Mull, W., 339
Myers. G.E., 126. 191

Nakai. S.. 297
Nelson, K.E.. 449
Newell, M.E., 338
Nicolson. P., 126
Nix. G.H., 481

No metales propiedades de, 592
Nordenson, T.J., 552
Número
de Graetz 264, 330
de Crashof
definición del, 305
relajación con transición en convección libre, 305
de influencia magnética, 556
de Lewis, 543
de Nusseh, definición del, 218
de Peclet. definición del, 261
de Prandtl
definición del, 226
significado físico del, 226
de Reynolds
critico, para placa plana, 195
definición del, 195
para condensación, 455
para flujo en tubos: 197
de Schmidt, definición del, 542
de Sherwood, definición del. 543
de Stanton, definición del, 222
NUT (número de unidades de transferencia), definición de, 505
Nusselt. Wilhelm. 480

Okazaki, T., 297
Oppenheim, A.K.. 449, 585
Orden de magnitud para espesor de capa límite, 255
Ostrach, J., 338
O'toole, J., 339
Ozisik. M.N., 120, 191
Ozoe. H., 252

Parámetro de inyección, 561
Pera. L., 339
Pérdida de calor a partir de aletas. 59
Perfil de velocidad
en capa límite laminar, 208
en flujo laminar en tubos, 234
en flujo turbulento en tubos, 238
influencia de inyección de fluido, 561
universal, 228
Petukhov, BS.. 297
Pitts, C.C., 481
Pohlhausen, E., 608
Potencia emisiva para radiación térmica, 345
Prandtl, Ludwing, 226
Presión, parcial. 537
Prigogine, I., 552
Propiedades
de contraffujo, en flujo turbulento, 225. 229
de estancamiento, 199, 241
de gases, 597
de líquidos saturados, 594
de metales, 589
de metales líquidos, 599
de no metales, 592
de radiación monocromática, 346
de radiación, (Véase *Propiedades específicas)*
del agua, 600
del aire, 596

Radiación
a partir de conductores eléctricos, 360
a partir de no conductores eléctricos, 360
absorbencia para. 496
comportamiento superficial real, 356
de cuerpo gris, 346
de cuerpo negro, 343
efecto sobre medición de temperatura, 436
en medio absorbente y transmisor, 390
estudio general de la, 342
formulación para solución numérica, 409
intensidad de la, 354
ley de Planck de la, 346
mecanismo físico de la, 341
método de redes para el análisis de la, 368
poder emisivo para, 345
reflectividad para, 344
reflexión difusa para, 344
solar, 425
absorbencia para, 427
influencia de la absorción atmosférica 430
transmitancia para, 344. *(Véase también* Radiación solar)
Radiosidad
definición de la, 367
difusa, definición de, 397
Raithby, G.D.. 340
Raphael, J.M., 450
Reflectancia para radiación térmica, 344
reflexión
difusa para radiación térmica, 344
especular, 344
Regímenes
de ebullición, 460
de flujo para transferencia de calor de baja densidad, 568
Reid, R.L., 39
Reiher H., 339
Relaciones empíricas para flujo en tubos y tuberías, 257
Resistencia
de contacto, 69
térmica, 42. 101
en formulación numérica, 101
para frontera de convección, 49
valores en diferentes sistemas de coordenadas, 105
térmica de contacto, 67

Richardson, P.D., 190
Richtmeyer, R.D., 126
Rogers, D.F., 126
Rohsenow, W.M., 481
Romig. M., 584
Rase, J.W., 481
Ross, D.C., 339
Rotern, Z., 338
Rowe, 339

Sabersky. R.H.. 296
Salman, Y.K.. 340
Salto de temperatura. 570
Sanders. C.J.. 338
Sarofim, A.F.. 449
Scanlan. J.A.. 338
Schlichting, H., 251, 295
Schmidt
  E., 339, 481
  F.W., 338
Schneider. P.L., 126. 190
Schultz. H.D.. 127
Schuring. W., 481
Seban. R.A., 293
Sellschop. W., 481
Separación de flujo. 272
Sepetoski, W.K.. 127
Serie de Fourier, 84
Shah, R.. 297
Sheriff. N., 296
Sherman A.. 584
Shimazaki, T.T., 296
Sieder, E.N.. 296
Siegel, R., 449
Silveston, P.L.. 339
Simonds, R.R., 339
Singh, S.N.. 339
Sistema internacional de unidades, 33
Skupkinsh, E.. 296
Smith, T.E., 449
Soehngen, E., 337
Soluciones numéricas, exactitud de, 106
Sparrow, E.M.. 336, 449
Springer, G.S., 585
Stefany, N.E.. 337
Stein, R.. 296
Stewart, W.E., 552
Strong, P.F., 127
Sunderland, J.E., 78, 126
Superaislantes. 26, 27
Superficie extendida, ecuación unidimensional para, 57
Superficies especulares-difusas, análisis para, 406
Sutton, G.W.. 584
Sziklas, E.A., 584

Tamaño de burbujas en ebullición, 462
Tamaños de tubería, 603
Tanger, GE., 481
Temperatura
  de pared adiabática, 241
  de película, 218
  de referencia, para flujo de alta velocidad, 242
  global, 236, 256
    definición de, 236
    relacionada con transferencia de calor, 255
  solar equivalente, 427
Tensión superficial para agua, 468
Térmica. resistencia. *(Véase* Resistencia térmica)
Threlkeld. J.L., 449
Tong, LS., 481
Torborg, R.H., 449
Townes H.W.. 296
Transferencia
  de calor a alta velocidad, 241
  de calor de baja densidad, 566
  de calor en dinámica de magneto fluidos, 553
  de calor en metales líquidos, análisis de flujo viscoso, 288
  de masa. estudio general de la, 534
Transición de capas límite, 195, 223
Transmisión especular-difusa, 405
Transmitancia para radiación térmica, 344
Trayectoria libre media
  efecto sobre transferencia de calor entre placas paralelas, 568
  para aire. 568
  relacionada con transferencia de calor de baja densidad, 567
Trumpler. P.R., 585
Tubo calefactor. 578

Unidades
  sistema internacional, 33
  y dimensiones, 30

Vachon, R.I., 481
Valor R., definición del, 43
Van der Held, E., 339
Vapor de agua
  absorbencia monocromática para, 382
  albedo del, 432
  emisividad del, 383
Variable de similitud, 608
Velocidad molecular media, 568
Viscosidad
  de contraflujo, 226
  definición de la, 194
  dinámica. definición de, 194
  mecanismo físico de la, 194
Vliet, G.C., 296, 338
Von Karmán, T., 251

Wachman. H.Y.. 585
Wallis, G.B.. 481
Wamer, C.Y., 338
Weber. N., 3.39
Weibelt. J.A., 449
Weidmann. M.L.. 585
Wcstwatcr. J.W., 481
Whitakcr, S., 252, 296
Whiting, G.H.. 585
Witte. L.C., 296
Yamada, Y., 339
Ybarrondo. L.J., 78
Yuge, T.. 337
Zicnkiewicz. O.C.. 191
Zuber. N., 480
Zukawkas, A., 297

Cantidad física	*símbolo*	*Conversión de SI a inglés*	*Conversión de inglés a SI*
Longitud	L	1 m = 3.2808 pie	1 pie = 0.3048 m
Area	A	1 m^2 = 10.7639 pie^2	1 pie^2 = 0.092903 m^2
Volumen	v	1 m^3 = 35.3134 pie^3	1 pie' = 0.028317 m^3
Velocidad	ν	1 m/s = 3.2808 pie/s	1 pie/s = 0.3048 m/s
Densidad	ϱ	1 kg/m^3 = 0.06243 lb_m/pie^3	1 lb_m/pie^3 = 16.018 kg/m^3
Fuerza	F	1 N = 0.2248 lb_f	1 ib, = 4.4482 N
Masa	m	1 kg = 2.20462 lb_m	1 lb_m = 0.45359237 kg
Presión	p	1 N/m^2 = 1.45038 x 10^{-4} lb_f/plg^2	1 lb_f/plg^2 = 6894.76 N/m^2
Energía calor	q	1 kJ = 0.94783 Btu	1 Btu = 1.05504 kJ
Flujo de calor	Q	1 W = 3.4121 Btu/h	1 Btu/h = 0.29307 w
Flujo de calor por unidad de área	q/A	1 W/m^2 = 0.317 $Btu/h \cdot pie^2$	1 $Btu/h \cdot pie^2$ = 3.154 W/m^2
Flujo de calor por unidad de longitud	q/L	1 W/m = 1.0403 Btu/h·pie	1 Btu/h·pie = 0.9613 W/m
Ceneración de calor *por* unidad de volumen	q	1 W/m^3 = 0.096623 $Btu/h \cdot pie^3$	1 $Btu/h \cdot pie^3$ = 10.35 W/m^3
Energía por unidad de masa	q/m	1 kJ/kg = 0.4299 Btu/lb_m	1 Btu/lb_m = 2.326 kj/kg
Calor específico	c	1 $kJ/kg \cdot °C$ = 0.23884 $Btu/lb_m \cdot °F$	1 $Btu/lb_m \cdot °F$ = 4.1869 $kJ/kg \cdot °C$
Conductividad térmica	k	1 $W/m \cdot °C$ = 0.5778 Btu/h*pie*°F	1 Btu/h.pie*°F = 1.7307 $W/m \cdot °C$
Coeficiente de transferencia de calor por convección	h	1 $W/m^2 \cdot °C$ = 0.1761 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$	1 $Btu/h \cdot pie^2 \cdot °F$ = 5.6782 $W/m^2 \cdot °C$
Viscosidad dinámica	p	1 kg/m·s = 0.672 lb_m/pie·s = 2419.2 lb_m/pie·h	1 lb_m/pie·s = 1.4881 kg/m·s
Viscosidad cinemática y difusividad térmica	ν, α	1 m^2/s = 10.7639 pie^2/s	1 pie^2/s = 0.092903 m^2/s

Esta obra se terminó de imprimir en abril de 1999
en los talleres de FORSA, S.A. de C.V.
Av. Tláhuac No.43-F, Col. Santa Isabel Industrial
C.P. 09870, México D.F.

TRANSFERENCIA DE CALOR

El libro constituye un tratado elemental de los principios de transferencia de calor. La presentación de sus temas sigue las líneas clásicas de tratamientos separados para conducción, convección y radiación, aunque se subraya que el mecanismo físico de la transferencia de calor por convección es el de conducción a través de la capa estacionaria de fluido cerca de la superficie de transferencia de calor. El autor enfatiza la comprensión física mientras que, al mismo tiempo, expone datos experimentales significativos en aquellas circunstancias que no permiten una solución anaiítica simple.

Es importante señalar que esta nueva edición refleja obviamente muchos compromisos y procesos evolutivos, dentro de los cuáles se cuentan: la revisión de técnicas analíticas y datos experimentales, así como la adopción del Sistema Internacional como el conjunto de unidades básico en el texto; esto sin descuidar el enfoque sencillo que Holman ha dado al contenido del libro, con el fin de que sea mejor comprendido por el estudiante que se inicia en el estudio de esta materia.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.

GRUPO PATRIA CULTURAL

ISBN 968-26-0649-7

9 789682 606496